

**MATHEMATISCHE
ANNALEN**

129. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
HEINRICH BEHNKE RICHARD COURANT
MÜNSTER (WESTF.) NEW YORK
HEINZ HOPF KURT REIDEMEISER
ZÜRICH GÖTTINGEN
FRANZ RELICH BARTEL L. VAN DER WAERDEN
GÖTTINGEN ZÜRICH

129. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1955

Unveränderter Nachdruck 1969
Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York

Alle Rechte vorbehalten.
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.
Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Printed in Germany.

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, · München 22 · Bruderstraße 9

Inhalt des 129. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Baer, R., Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung	139
(Anschrift: University of Illinois, Mathematical Department, Urbana, Ill., USA)	
Baker, I. N., The Iteration of Entire Transcendental Functions and the Solution of the Functional Equation $f\{f(z)\} = F(z)$	174
(Anschrift: Tübingen, Mathematisches Institut der Universität)	
Barner, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. III. Schie- bungen als Abrollvorgänge. Singularitätenkurven auf Komplexflächen. Inva- riante Gebilde.	304
(Anschrift: Merzhausen b. Freiburg i. Br., Weinbergstr. 8)	
Becker, H., Poincarésche Reihen zur hermiteschen Modulgruppe.	187
(Anschrift: Heidelberg, Schröderstr. 15)	
Behrens, E.-A., Ein topologischer Beitrag zur Strukturtheorie nichtassoziativer Ringe	297
(Anschrift: Frankfurt a. M., Math. Institut d. Universität, Schumannstr. 58)	
Bennhold, Fr., Zur synthetischen Begründung der projektiven Geometrie der Ebene	213
(Anschrift: Frankfurt a. M., Dehnhardtstr. 45)	
Busemann, H., On Normal Coordinates in Finsler Spaces	417
(Anschrift: University of Southern California, 3518 University Avenue, Los Angeles 7, Cal./USA.)	
Frölicher, A., Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen	50
(Anschrift: The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., USA)	
Grauert, H., Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume.	233
(Anschrift: Münster i. W., Math. Institut d. Universität, Schloß)	
Grauert, H., und R. Remmert, Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume	274
Heinz, E., Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind	451
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut, Bunsenstr. 3—5)	
Jürgens, K., Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$	330
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut d. Universität, Bunsenstr. 3—5)	
Klingen, H., Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen. I.	345
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut d. Universität, Bunsenstr. 3—5)	
Ohmann, D., Eine Verallgemeinerung der STEINERschen Formel.	209
(Anschrift: Milano/Italia, Via Poerio 20, Scuola Germanica)	
Ostrowski, A., Über die analytische Fortsetzung von Taylorschen und Dirichletschen Reihen.	1
(Anschrift: Basel, Mathematische Anstalt der Universität, Rheinsprung 21)	
Petersson, H., Über automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinuitäts- gebiet	370
(Anschrift: Münster i. W., Tannenbergsstr. 25)	

Remmert, R. s. Grauert, H.

Rothstein, W., Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen 96
(Anschrift: Marburg/Lahn, Mathematisches Institut der Universität)

Schaefer, H., Positive Transformationen in lokalkonvexen halbgeordneten Vektorräumen 323
(Anschrift: Leipzig C 1, Math. Institut d. Universität, Talstr. 35)

Schaefer, H., Über die Methode der a priori-Schranken 415

Schäffer, J. J., Smallest Lattice-Point Covering Convex Set 265
(Anschrift: Zürich/Schweiz, Math. Institut d. Universität)

Schütte, K., Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen 181
(Anschrift: Marburg/Lahn, Lutherstr. 4)

Schütte, K., Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität 424

Singer, I. M., and J. Wermer, Derivations on Commutative Normed Algebras . . 260
(Anschrift: Dept. of Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island, USA)

Springer, G., Extreme Punkte der konvexen Hülle schlichter Funktionen 230
(Anschrift: Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität, Schloßplatz 2)

Tietz, H., Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen 44
(Anschrift: Braunschweig, Gaußstraße 24)

Tietz, H., Laurent-Trennung und zweifach unendliche Faber-Systeme 431

Tietz, H., Berichtigung der Arbeit „Zur Realisierung Riemannscher Flächen“ in Math. Ann. 128, 453—458 (1955) 450

Unkelbach, H., Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. I. 391
(Anschrift: Bad Godesberg, Kurfürstenstr. 42)

Wermer, J. s. Singer. I. M.

Über die analytische Fortsetzung von Taylorschen und Dirichletschen Reihen.

Von

ALEXANDER OSTROWSKI in Basel.

Inhaltsübersicht.

Einleitung

§ 1. Konvergenzverhalten der Dirichlet-Stieltjesschen Integrale (Hilfssätze 1—3)	5
§ 2. Definition und Fortsetzung von $\Phi(u)$	7
§ 3. Die Integrationskontur $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ und die Abschätzung von $\Phi(u)$ in G_t (Hilfssatz 4)	10
§ 4. Darstellung von $\varphi(\zeta)$ durch $\Phi(u)$ mit Hilfe eines Konturintegrals (Hilfssatz 5)	15
§ 5. Eine Abschätzung von $f(s)$ (Hilfssatz 6)	17
§ 6. Darstellung von $F(s)$ durch ein Konturintegral für $\Re s > k$ (Hilfssatz 7)	18
§ 7. Ein Satz über die Analytizität von Integralen als Funktionen eines Parameters (Hilfssatz 8)	20
§ 8. Analytische Fortsetzung von $F(s)$ für $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$ (Satz I)	21
§ 9. Ein Hilfssatz über Linienelemente längs eines Streckenzuges (Hilfssatz 9)	24
§ 10. Die Wege $L(s_0)$, $\Lambda(s_0)$ und $D(s_0)$ (Hilfssatz 10)	26
§ 11. Die Kontur $D(s_0)$ (Hilfssatz 11)	30
§ 12. Die Regularität von $\Phi(u)$ längs $D(s_0)$ (Hilfssatz 12)	34
§ 13. D^* , $D(s_1)$, H_0 und H_1 (Hilfssatz 13)	38
§ 14. Analytische Fortsetzung von $F(s)$ für $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$ (Satz II)	40
Literaturverzeichnis	43

Einleitung.

Hat die Potenzreihe $f(z) = \sum c_\nu z^\nu$ einen positiven Konvergenzradius, so läßt sich die Frage nach ihrer Fortsetzung ins Äußere des Konvergenzkreises nur dann entscheiden, wenn man c_ν in geeigneter Weise als eine „einfache“ Funktion von ν darstellen kann. Eines der ersten und schönsten Ergebnisse in dieser Richtung stellt der Satz von LEAU (1899) [vgl. LEAU (1) des Literaturverzeichnisses] dar, wonach, wenn $c_\nu = \varphi(\nu)$ ist, wo $\varphi(z)$ im Unendlichen regulär ist, $f(z)$ längs jedes Halbstrahls vom Ursprung aus fortsetzbar ist, der $z = 1$ nicht trifft. Dieser Satz ist dann von FABER (1903) [vgl. FABER (1)] dahin erweitert worden, daß unter den obigen Annahmen $f(z)$ sich in die ganze Riemannsche Fläche von $\lg(1 - z)$ fortsetzen läßt, wenn aus ihr sämtliche Punkte mit $|z| \leq 1$ entfernt werden, die nicht zum Hauptblatt der Riemannschen Fläche, in dem der Konvergenzkreis liegt, gehören. Im Anschluß an den Beweis dieser Tatsache hat FABER die Vermutung ausgesprochen, daß $f(z)$ in allen Zweigen die singulären Punkte nur in $z = 0$, $z = 1$ und $z = \infty$ haben kann. Diese Vermutung wurde von uns 1933 in der Tat bestätigt und dabei insbesondere an einem Beispiel gezeigt, daß auch in $z = 0$ eine Singularität eines Zweiges von $f(z)$ wirklich liegen kann¹⁾.

¹⁾ In einer 1929 erschienenen Arbeit [WIGERT (1)] hat S. WIGERT für $\sum \varphi(\nu) z^\nu$ einen Ausdruck hergeleitet. Dieser Ausdruck ist gültig in der längs der positiven reellen Achse von $z = 1$ nach ∞ aufgeschnittenen Ebene. Daraus lassen sich gewisse Aufschlüsse über die bei Fortsetzungswegen, die jenen Schnitt nicht treffen, sich ergebenden Singularitäten erhalten.

Diese zuerst merkwürdig anmutende Ausnahmestellung des Ursprungs erscheint weniger bemerkenswert, wenn man das ganze Problem als ein solches der *Theorie der Dirichletschen Reihen* auffaßt und in entsprechender Weise verallgemeinert. Setzt man nämlich $z = e^{-s}$, so geht $f(z)$ in $\Sigma c_\nu e^{-\nu s}$ über, und hier entspricht $z = 0$ dem Punkt $s = \infty$. Zugleich stellt sich heraus, daß eine solche Umschreibung des Problems überhaupt unentbehrlich ist, wenn man es weiter verfolgen will, sofern man einfache und geometrisch durchsichtige Formulierungen zu erhalten wünscht.

Wir werden uns daher von vornherein mit einer Dirichletschen Reihe

$$(1) \quad f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

beschäftigen, wo die λ_ν eigentlich monoton ins Unendliche wachsen und $f(s)$ eine endliche Konvergenzabszisse besitzt. Auch in diesem allgemeineren Falle läßt sich ein Analogon der obigen Tatsachen formulieren, das zugleich auch die Formulierung im Falle der Taylorschen Reihen ganz erheblich erweitert. Nämlich, ist allgemein $\varphi(z)$ im Unendlichen regulär, so ist die durch die Dirichletsche Reihe

$$(2) \quad F(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\lambda_\nu) c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

dargestellte Funktion längs jedes Weges aus der Konvergenzhalbebene von (1) fortsetzbar, längs dessen $f(s)$ fortsetzbar ist.

Bei der weiteren Untersuchung dieses Problems handelt es sich vornehmlich darum, die Annahmen über $\varphi(z)$ auszuweiten. Einen besonders schönen und wichtigen Satz in dieser Richtung hat 1919 H. CRAMÉR [CRAMÉR (1)] bewiesen. CRAMÉR beweist: *Es möge die Funktion $\varphi(z)$ eine ganze Funktion höchstens vom Normaltypus k der Ordnung 1 sein, d. h. es möge für jedes $\varepsilon > 0$*

$$(3) \quad \varphi(z) = O(e^{(k+\varepsilon)r}) \quad (|z| = r, r \rightarrow \infty)$$

gellen. Dann ist, wenn (1) eine absolute Konvergenzabszisse σ^ hat, die Funktion $F(s)$ aus der Halbebene $\Re s > \sigma^* + k$ längs jedes Weges fortsetzbar, längs dessen $f(s)$ derart fortsetzbar ist, daß dabei der Konvergenzradius $> k$ bleibt.* 1923 haben wir einen neuen Beweis des Cramérschen Satzes gegeben [OSTROWSKI (1)], aus dem sich zugleich ergibt, daß er gar nicht an die Annahme der Existenz einer „absoluten“ Konvergenzabszisse gebunden ist, sondern auch dann richtig bleibt, wenn in der obigen Formulierung unter σ^* die gewöhnliche Konvergenzabszisse verstanden wird. Dieser Beweis beruht auf der Relation

$$(4) \quad F(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(u) f(s-u) du,$$

wo längs der Kreislinie $|u| = k + \varepsilon$ integriert wird. $\Phi(u)$ ist dabei die zu $\varphi(z)$ gehörende *Unterfunktion*, die, wenn $\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu$ ist, gegeben wird durch

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu! A_\nu}{u^{\nu+1}}.$$

Bei der Verallgemeinerung des Cramérschen Ansatzes wird man nun die Voraussetzung, daß $\varphi(z)$ ganz ist, fallen lassen und statt dessen annehmen, daß

$\varphi(z)$ für ein $R > 0$ regulär ist für $|z| \geq R$ und $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ ist, wo $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ gilt, und diese beiden Schranken auch $-\infty$ bzw. $+\infty$ sein können. Im übrigen wird wiederum die Gültigkeit von (3) vorausgesetzt, unter der weiteren Bedingung $\alpha_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \alpha_2 - \varepsilon$. Diese Fragestellung wurde bisher in der Literatur von SOULA (1925) [SOULA (1)] und W. BERNSTEIN (1933) [BERNSTEIN (1)] im speziellen Falle $\frac{\pi}{2} > \alpha_2 > 0 > \alpha_1 > -\frac{\pi}{2}$ behandelt, wobei SOULA $k = 0$ und W. BERNSTEIN beliebiges $k > 0$ voraussetzt.

Diese Ansätze entsprechen allerdings einer unnötig speziellen geometrischen Konfiguration, da für $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$ sich das Resultat gleichmäßig formulieren läßt, ohne daß $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_1 > -\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt zu werden braucht. In diesem Falle liefert unser Satz I (vgl. § 8) das folgende Resultat: Ist s_0 ein Punkt der Halbebene $\Re s \leq k + \sigma^*$ und ist $f(s)$ in den Punkt s_0 geradlinig fortsetzbar längs aller Richtungen des Richtungsbüschels $\left\langle \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \frac{3\pi}{2} - \alpha_2 \right\rangle$, und zwar durchweg mit Funktionselementen, deren Konvergenzradien $> k$ sind, so ist auch $F(s)$ längs aller Strahlen dieses Richtungsbüschels aus der Halbebene $\Re s > k + \sigma^*$ in s_0 fortsetzbar. Man vergleiche hierzu die Fig. 5 in § 8. An Hand dieser Figur können die obigen Bedingungen für $f(s)$ so charakterisiert werden, daß $f(s)$ im Dreieck Δ dieser Figur durchweg regulär ist mit dem Regularitätsradius $> k$, während die Behauptung besagt, daß $F(s)$ im gesamten abgeschlossenen Dreieck Δ^* regulär ist. Ist insbesondere $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$, so bedeutet dies: *Ist $f(s)$ in s_0 aus der Richtung $-(\alpha_2 + \alpha_1)/2$ geradlinig fortsetzbar mit dem Konvergenzradius $> k$, so ist auch $F(s)$ aus dieser Richtung in s_0 fortsetzbar²⁾.*

Im Fall $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$ liefert unser Satz II das entsprechende Resultat. Wir benutzen in diesem Falle einen aus der Halbebene $\Re s > k + \sigma^*$ herkommenden polygonalen, sich nicht überschneidenden Weg L , der in s_0 mündet und längs dessen bei geeigneter Konvention über die Richtungsfortsetzung sämtliche Richtungen im Büschel $\left(-\alpha_2 + \frac{\pi}{2}, -\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)$ liegen. Wir verlangen dann, daß $f(s)$ längs L in s_0 derart fortsetzbar ist, daß dabei der Regularitätsradius $> k$ bleibt. Andererseits wird dem Weg L die sogenannte k -Bedingung auferlegt, wonach Punkte von zwei nicht unmittelbar aneinanderstoßenden Teilstrecken von L stets eine Distanz $> 2k$ haben. Dann besagt der Satz II (vgl. § 14), daß $F(s)$ längs L in s_0 fortsetzbar ist³⁾.

²⁾ Hier kann natürlich an sich $(\alpha_2 + \alpha_1)/2$ jede Richtung aus $(-\pi/2, \pi/2)$ sein. Man beachte, daß in den von SOULA und W. BERNSTEIN betrachteten Fällen in diesem Grenzfalle nur die positive x -Richtung möglich ist.

Für den Fall der Taylorsche Reihen $\Sigma \varphi(\nu) z^\nu$ und unter Beschränkung auf $k < \pi$ und $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ findet sich der entsprechende Spezialfall von unserem Satz I in LINDELÖF [LINDELÖF (1) p. 109] unter Bezugnahme auf frühere Veröffentlichungen von LEROY und MELLIN.

³⁾ Die beiden oben angegebenen Sätze I und II verallgemeinern ganz wesentlich das entsprechende Resultat meiner früheren Abhandlung [OSTROWSKI (2)]. Auf die Möglichkeit dieser Verallgemeinerung habe ich schon a. a. O. am Ende der Einleitung (pp. 724 bis 725) hingewiesen.

Der Beweis dieser Sätze beruht auf einer geeigneten Abänderung des Integrals in (4), wobei der Integrationsweg aus dem Unendlichen herkommt und wieder ins Unendliche geht. $\Phi(u)$ ist auch hier die mit Hilfe der entsprechend abgeänderten Laplacetransformation zu definierende Unterfunktion von $\varphi(z)$.

Sinngemäß zerfällt dieser Beweis in einen funktionentheoretischen und einen geometrischen Teil.

Im funktionentheoretischen Teil handelt es sich um die Definition und Diskussion von $\Phi(u)$, wobei der Kern der ganzen Betrachtung in der Herleitung des Hilfssatzes 4 (§ 3) liegt, durch den die Konvergenz von (4) sicherzustellen ist. Die Schwierigkeiten beim Beweis dieses Hilfssatzes rühren vor allem daher, daß das „Laplaceintegral“ nicht ins Innere des Kreises $|z| = R$ geführt werden kann. Es ist vielleicht von Interesse darauf hinzuweisen, daß solange $\alpha_1 > -\pi$ und $\alpha_2 < \pi$ ist, man diese Betrachtung dennoch auf den Fall $R = 0$ zurückführen kann, durch eine geeignete Translation in der z -Ebene.

Im geometrischen Teil des Beweises handelt es sich um die Konstruktion des neuen Integrationsweges D für das Integral (4), der den Weg L „im Inneren“ enthält, und zwar so nah, daß $f(s-u)$ auch noch längs D regulär bleibt. Es kommt dann vor allem darauf an, daß längs dieses Weges auch $\Phi(u)$ regulär ist. Nun wird aber das Riemannsche Flächenstück, auf dem $\Phi(u)$ regulär ist, im wesentlichen bis auf zwei Viertelebenen durch $\arg u$ charakterisiert, während bei der Charakterisierung des Weges L die „lokalen“ Richtungen längs dieses Weges benutzt werden.

Der topologische Kern des betreffenden Teiles unseres Beweises besteht nun in der Herstellung einer Beziehung zwischen den beiden in Betracht kommenden Richtungsgrößen. Die topologische Grundlage wurde von uns bereits 1935 in zwei Mitteilungen über die Topologie der orientierten Linienelemente [OSTROWSKI (3, 4)] entwickelt. Die hier in Frage kommenden Sätze aus diesen Veröffentlichungen werden im § 9 zusammengestellt.

Die letzte zu überwindende Schwierigkeit in diesem geometrischen Teil des Beweises rührt davon her, daß zum Regularitätsgebiet von $\Phi(u)$ noch zwei Viertelebenen gehören, die sich nicht mehr direkt durch $\arg u$ charakterisieren lassen. Diese Schwierigkeit wird im § 12 durch etwas speziellere Überlegungen überwunden.

Obgleich das Hauptergebnis des Satzes II von sehr großer Allgemeinheit ist, so ist doch die bei unserer Herleitung dem Wege L aufzuerlegende k -Bedingung natürlich eine gewisse Erschwerung bei der Ausdeutung dieses Ergebnisses. Für $k = 0$ wird diese Bedingung gegenstandslos. Für $k > 0$ aber läßt sie sich auf jeden Fall dann eliminieren, wenn $-\alpha_1 = \alpha_2 = \infty$ ist. Doch soll hierauf in einer späteren Mitteilung eingegangen werden.

Im übrigen haben wir im folgenden Text unsere Sätze I und II nicht nur für Dirichletsche Reihen, sondern gleich allgemeiner für sogenannte Dirichlet-Stieltjessche Integrale formuliert und bewiesen.

§ 1. Konvergenzverhalten der Dirichlet-Stieltjesschen Integrale.

Es sei $A(\lambda)$ eine für ein $a \geq 0$ im Intervall $\langle a, \infty \rangle$ definierte Funktion, die auf jeder endlichen Teilstrecke dieses Intervalls von beschränkter Schwankung ist. Betrachten wir das Integral

$$(1.1) \quad f(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} dA(\lambda),$$

so hat dieses Integral bekanntlich ganz analoge Eigenschaften wie die Dirichlet-schen Reihen vom Typus

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (\lambda_n \geq 0),$$

die offenbar aus (1.1) durch geeignete Spezialisierung entstehen. Insbesondere besitzt (1.1) eine sogenannte „Konvergenzabszisse“ σ^* , derart, daß (1.1) in der Halbebene $\Re s > \sigma^*$ überall konvergiert und in der Halbebene $\Re s < \sigma^*$ überall divergiert (σ^* kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein). Diese Tatsache folgt sofort aus dem folgenden

Hilfssatz 1. Ist (1.1) für ein $s = s'$ konvergent, so konvergiert (1.1) für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig für alle s des Winkelraumes

$$(1.3) \quad |\arg(s - s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Darüber hinaus gilt für $N_1 > N \geq a$,

$$(1.4) \quad \left| \int_N^{N_1} e^{-\lambda s} dA(\lambda) \right| \leq \frac{c}{\sin \varepsilon} e^{-N \Re(s - s')}$$

für $0 < \varepsilon < 1$ und für

$$(1.5) \quad \Re(s - s') > 0, \quad |\arg(s - s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad c = c(N) = \sup_{\lambda \geq N} \left| \int_N^\lambda e^{-\lambda s'} dA(\lambda) \right|.$$

Beweis. Setzen wir $\alpha = \Re(s - s')$, $\theta = \arg(s - s')$, so gilt offenbar wegen (1.5) $\alpha = |s - s'| \cos \theta \geq |s - s'| \sin \varepsilon$,

$$(1.6) \quad |s - s'| \leq \frac{\alpha}{\sin \varepsilon}.$$

Ferner gilt,

$$(1.7) \quad A_0(\lambda) = \int_N^\lambda e^{-\lambda s'} dA(\lambda)$$

gesetzt, durch partielle Integration

$$\int_N^{N_1} e^{-\lambda s} dA(\lambda) = \int_N^{N_1} e^{-\lambda(s-s')} dA_0(\lambda) = e^{-\lambda(s-s')} A_0(\lambda) \Big|_N^{N_1} + (s - s') \int_N^{N_1} A_0(\lambda) e^{-\lambda(s-s')} d\lambda$$

und daher wegen (1.5), da $A_0(N) = 0$ ist,

$$\left| \int_N^{N_1} e^{-\lambda s} dA(\lambda) \right| \leq e^{-N_1 \alpha} |A_0(N_1)| + \frac{\alpha}{\sin \varepsilon} \int_N^{N_1} |A_0(\lambda)| e^{-\lambda \alpha} d\lambda.$$

Dies ist aber, nach der Definition von c ,

$$\leq c e^{-N_1 \alpha} + \frac{c \alpha}{\sin \varepsilon} \int_N^{N_1} e^{-\lambda \alpha} d\lambda = \frac{c}{\sin \varepsilon} e^{-N \alpha} - c e^{-N_1 \alpha} \left(\frac{1}{\sin \varepsilon} - 1 \right),$$

woraus nunmehr (1.4) unmittelbar folgt. Damit ist aber der Hilfssatz 1 bewiesen, da c mit $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Ersetzen wir ferner in (1.4) N durch a , so folgt für $c^* = c(a)$ und $N_1 \rightarrow \infty$

$$(1.8) \quad |f(s)| \leq \frac{c^*}{\sin \varepsilon} e^{-a \Re(s-s')} \quad (|\arg(s-s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon).$$

Die Relation (1.8) kann leicht durch eine etwas allgemeinere ersetzt werden. Man setze

$$(1.9) \quad g(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} A_1(\lambda) dA(\lambda),$$

wo für $A(\lambda)$ die obigen Annahmen gelten sollen und $A_1(\lambda)$ für $\lambda \geq a$ stetig ist. Setzen wir hier

$$(1.10) \quad A^*(\lambda) = \int_a^\lambda A_1(\lambda) dA(\lambda),$$

so ergibt sich (1.9) aus (1.1), wenn darin $A(\lambda)$ durch $A^*(\lambda)$ ersetzt wird.

Nehmen wir nunmehr an, daß $g(s)$ für $s = s'$ konvergiert und setzen wir

$$(1.11) \quad C^* = \sup_{\lambda \geq a} \left| \int_a^\lambda e^{-\lambda s'} A_1(\lambda) dA(\lambda) \right|,$$

so folgt aus (1.8)

$$(1.12) \quad |g(s)| < \frac{C^*}{\sin \varepsilon} e^{-a \Re(s-s')} \quad (|\arg(s-s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon).$$

Für $A_1(\lambda) \equiv 1$ liefert das wiederum (1.8), während, wenn wir $A(\lambda) \equiv \lambda$ setzen, wir die analoge Abschätzung für das Laplacesche Integral $\int_a^\infty e^{-\lambda s} A_1(\lambda) d\lambda$ erhalten.

Zusatz zu Hilfssatz 1. *Liegt s' innerhalb der Konvergenzhalbebene oder auf der Konvergenzgeraden⁴⁾ von (1.1), so gilt für jedes ε mit $0 < \varepsilon < 1$:*

$$(1.8^*) \quad |f(s)| \leq c^{**}(\varepsilon, s') e^{-a \Re(s-s')} \quad (|\arg(s-s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, |s-s'| \geq \varepsilon).$$

Beweis: Ersetzt man für ein $\delta > 0$ in (1.8) s' durch $s' + \delta$ und ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$, so ergibt sich für $|f(s)|$ eine Schranke im Bereich

$$(1.13) \quad |\arg(s-s'-\delta)| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Betrachten wir andererseits den Bereich

$$(1.14) \quad |\arg(s-s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

so fällt für $\delta > 0$ jeder von s' verschiedene Punkt von (1.14) schließlich in den Bereich (1.13). Daher kann man ein positives $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählen, daß dann die

⁴⁾ Die Konvergenzgerade von (1.1) ist die Gerade $\Re s = \sigma^*$.

Punkte von (1.14), die nicht in (1.13) liegen, von s' eine kleinere Distanz als ε haben. (Man überzeugt sich leicht, daß z. B. $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\pi}$ gesetzt werden kann.) Daraus folgt (1.8*) unmittelbar.

Hilfssatz 2. Es sei (1.1) für $s = 0$ konvergent und es sei $\varphi(\lambda)$ eine für alle $\lambda \geq a$ stetig differenzierbare Funktion von λ mit der Eigenschaft, daß für eine gewisse nicht negative Konstante k und jedes positive ε die Relation gilt:

$$(1.15) \quad \varphi(\lambda) = O(e^{(k+\varepsilon)\lambda}), \quad \varphi'(\lambda) = O(e^{(k+\varepsilon)\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

Dann konvergiert das Integral

$$(1.16) \quad F(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) dA(\lambda)$$

für alle s mit $\Re s > k$.

Beweis: Setzt man für ein s mit $\Re s > k$:

$$B(\lambda) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} dA(\lambda) \quad (\lambda \geq a),$$

so folgt aus (1.4) für $s' = 0$ und $N_1 \rightarrow \infty$

$$B(\lambda) = O(e^{-\lambda s}) \quad (\lambda \rightarrow \infty);$$

zugleich gilt nach partieller Integration

$$F(s) = - \int_a^\infty \varphi(\lambda) dB(\lambda) = \varphi(a) B(a) + \int_a^\infty \varphi'(\lambda) B(\lambda) d\lambda.$$

Die Konvergenz des Integrals rechts und das Verschwinden von $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) B(\lambda)$ folgt hierbei aus

$$\varphi(\lambda) B(\lambda) = O(e^{-\lambda(s-k-\varepsilon)}), \quad \varphi'(\lambda) B(\lambda) = O(e^{-\lambda(s-k-\varepsilon)}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

für jedes s mit $\Re s > k$, wenn ε entsprechend klein angenommen wird.

Hilfssatz 3. Im endlichen Intervall $\langle a, b \rangle$ möge $A(\lambda)$ von beschränkter Variation und $\varphi(\lambda)$ stetig sein. Dann ist das Integral

$$(1.17) \quad \int_a^b e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) dA(\lambda)$$

eine ganze Funktion von s .

Beweis: Entwickelt man (1.17) nach Potenzen von s :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{s^\nu}{\nu!} \int_a^b \lambda^\nu \varphi(\lambda) dA(\lambda),$$

so folgt die Behauptung sofort daraus, daß das Integral im ν -ten Glied der unendlichen Reihe $= O((|a| + |b|)^\nu)$ mit $\nu \rightarrow \infty$ ist.

§ 2. Definition und Fortsetzung von $\Phi(s)$.

Es sei

$$(2.1) \quad -\infty \leq \alpha_1 < 0 < \alpha_2 \leq \infty, \quad R > 0,$$

wobei also $\alpha_1 = -\infty$ und $\alpha_2 = \infty$ zugelassen sind. Wir bezeichnen mit $G_R(\alpha_1, \alpha_2)$ das Gebiet $|z| > R, \alpha_1 < \arg z < \alpha_2$. Das Intervall der Richtungen

für $|u| > 2k$ miteinander übereinstimmen. Nun gilt nach dem Cauchyschen Satze für ein $R^* > R$ die Relation

$$(2.7) \quad \int_R^{R^* e^{i\chi_2}} \varphi(z) e^{-uz} dz - \int_R^{R^* e^{i\chi_1}} \varphi(z) e^{-uz} dz = \int_{R^* e^{i\chi_1}}^{R^* e^{i\chi_2}} \varphi(z) e^{-uz} dz,$$

wo im ersten Integral längs $|z| = R$ von R bis $e^{i\chi_2} R$ und sodann längs des Halbstrahls $\arg z = \chi_2$ zu integrieren ist und der Integrationsweg im zweiten Integral analog gewählt wird. Im Integral rechts aber ist der Integrand für $u = \varrho e^{i\varphi}$, $\varphi = -\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ absolut

$$\leq C_0(\varepsilon, \chi_1, \chi_2) e^{(k+\varepsilon)R^* - \varepsilon R^* \cos(\chi + \varphi)} < C_0(\varepsilon, \chi_1, \chi_2) e^{-R^* (\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon - k - \varepsilon)},$$

wenn $\chi = \arg z$ von χ_1 bis χ_2 läuft. Rechts ist aber für $\varrho > 2k$ der Koeffizient von R^* für hinreichend kleine ε negativ, so daß das Integral in (2.7) mit $R^* \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Dann liefert aber (2.7) unsere Behauptung unmittelbar.

Wir sehen, daß durch (2.4) die Funktion $\Phi(u)$ eindeutig auf dem Riemannschen Flächenstück $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ definiert wird, das aus der Vereinigungsmenge aller Halbebenen (2.5) besteht, und auf der Riemannschen Fläche von $\lg z$ liegt. Wird k durch ein $t > k$ ersetzt, so wird jede der Halbebenen (2.5) durch einen echten Teil ersetzt, und $\Gamma(t, \alpha_1, \alpha_2)$ ist ein echter Teil von $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$. $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ wird für endliche α_1, α_2 durch die Halbstrahlen $\arg u = -\alpha_1$ und $\arg u = -\alpha_2$ in drei Teilgebiete zerlegt, von denen das eine durch

$$(2.8a) \quad |u| > k, \quad -\alpha_2 < \arg u < -\alpha_1$$

gegeben wird, während die beiden anderen die Viertelebenen sind (siehe Fig. 1):

$$(2.8b) \quad \Re u e^{i\alpha_1} > k, \quad 0 < \arg u + \alpha_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$(2.8c) \quad \Re u e^{i\alpha_2} > k, \quad 0 > \arg u + \alpha_2 > -\frac{\pi}{2}.$$

Falls eine der Größen α_1, α_2 unendlich wird, fällt natürlich die zugehörige Viertelebene weg.

Aus der Bildungsweise von $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ folgt offenbar, daß wenn C ein im positiven Sinne durchlaufener Kreisbogen um 0 ist, dessen Anfangs- und Endpunkt in $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ liegen, dann auch der ganze Kreisbogen C in $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ liegt.

Die auf die geschilderte Weise durch (2.4) definierte Funktion $\Phi(u)$ soll im folgenden als die *Unterfunktion* zu $\varphi(z)$ bezeichnet werden, in Analogie zu einer in der Theorie der Laplace-Transformationen häufig benutzten Ausdrucksweise.

Wir wollen nun die Darstellung (2.4) von $\Phi(u)$ durch partielle Integration umformen. Es sei die Bemerkung vorausgeschickt, die aus der bekannten Cauchyschen Abschätzung der Ableitungen einer regulären Funktion sofort folgt: *Zugleich mit der Funktion $\varphi(z)$ sind auch ihre drei ersten Ableitungen in $G_R(\alpha_1, \alpha_2)$ regulär und genügen gleichfalls den Relationen vom Typus (2.2), mit gleichem Wert von k , aber natürlich anderen Werten von $C_0(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2)$.* Wir for-

men nun ein Teilintegral des Integrals (2.4), wo für ein $R^* > R$ bis zum Punkt $R^* e^{iz}$ integriert wird, durch partielle Integration um:

$$\int_R^{R^* e^{iz}} \varphi(z) e^{-uz} dz = -\frac{1}{u} \varphi(z) e^{-uz} \Big|_R^{R^* e^{iz}} + \frac{1}{u} \int_R^{R^* e^{iz}} \varphi'(z) e^{-uz} dz,$$

und daher wegen (2.3)

$$u \int_R^{R^* e^{iz}} \varphi(z) e^{-uz} dz = -\varphi(z) e^{-uz} \Big|_{z=R^* e^{iz}} + \int_R^{R^* e^{iz}} \varphi'(z) e^{-uz} dz.$$

Lassen wir hier R^* ins Unendliche gehen, so konvergiert für ein festes u aus der Halbebene (2.5) der erste Term der rechten Seite gegen Null, wegen der Relation (2.2) für $\varphi(z)$. Der letzte Term der rechten Seite konvergiert aber gegen die Unterfunktion zu $\varphi'(z)$. So erhalten wir schließlich die für jeden Punkt u aus $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ für geeignete χ gültige Relation

$$(2.9) \quad \Phi(u) = \frac{1}{u} \int_R^{\infty e^{iz}} \varphi'(z) e^{-uz} dz.$$

(2.9) zeigt, daß unter unseren Annahmen $u \Phi(u)$ zu $\varphi'(z)$ als Unterfunktion gehört. Wegen der Relation (2.3) läßt sich die von (2.4) zu (2.9) führende Überlegung weiter iterieren, und wir erhalten die wiederum für jeden Punkt u von $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ für geeignete χ gültige Relation

$$(2.10) \quad \Phi(u) = \frac{1}{u^2} \int_R^{\infty e^{iz}} \varphi'''(z) e^{-uz} dz.$$

§ 3. Die Integrationskontur $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ und die Abschätzung von $\mathcal{Q}(u)$ in G_1 .

Wir werden im folgenden bis und mit dem § 7 den Fall $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ abschließen. Es werden demnach in den folgenden Betrachtungen wiederholt zwei Fälle zu unterscheiden sein, je nachdem $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ oder $> \pi$ ist. Wir zeigen nun zuerst, daß in beiden Fällen sich zwei reelle Zahlen β_1, β_2 so wählen lassen, daß die drei Relationen

$$(3.1) \quad (a) \frac{\pi}{2} > \beta_2 \geq \beta_1 > -\frac{\pi}{2}, \quad (b) \beta_2 > \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \quad (c) \beta_1 < -\frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

erfüllt sind, wobei im zweiten Falle $\beta_1 = \beta_2$ gewählt werden soll. Die Vorschriften zur Auffindung dieser Zahlen sind verschieden in den beiden erwähnten Fällen.

Es sei *erstens* $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$. Dann gilt offenbar wegen (2.1)

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - \alpha_2 > -\frac{\pi}{2} - \alpha_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Hier haben wir daher β_1 und β_2 in beliebiger Weise zu wählen, aber so, daß die Relationen erfüllt sind

$$(3.2) \quad \frac{\pi}{2} > \beta_2 > \frac{\pi}{2} - \alpha_2 > -\frac{\pi}{2} - \alpha_1 > \beta_1 > -\frac{\pi}{2} \quad (\alpha_2 - \alpha_1 < \pi)$$

Es sei zweitens $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$. Dann gilt $-\frac{\pi}{2} - \alpha_1 > \frac{\pi}{2} - \alpha_2$. Wir betrachten nun das Intervall $(\frac{\pi}{2} - \alpha_2, -\frac{\pi}{2} - \alpha_1)$ und behaupten, daß es unendlich viele gemeinsame Punkte mit dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat. Dies folgt sofort daraus, daß der Endpunkt jedes dieser Intervalle rechts vom Anfangspunkt des anderen Intervalls liegt. In der Tat gilt ja wegen (2.1)

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Ist nun der Durchschnitt dieser beiden Intervalle etwa das Intervall (γ_1, γ_2) , so setzen wir

$$(3.3) \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma_1 < \beta < \gamma_2.$$

Dann sind offenbar alle drei Relationen (3.1) erfüllt, und zwar in allgemeinste Weise erfüllt, wenn $\beta_1 = \beta_2$ sein soll.

Es sei nun $t > k$, aber im übrigen beliebig gewählt. Wir betrachten dann den später als Integrationskontur zu benutzenden Weg $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$, der folgendermaßen zusammengesetzt ist: Er besteht aus dem Bogen des Kreises $|u| = t$ mit $-\frac{\pi}{2} + \beta_2 \leq \arg u \leq \frac{\pi}{2} + \beta_1$, und den beiden in den Endpunkten dieses Bogens gezogenen, ins Innere der Halbebene $\Re u < 0$ gerichteten Halbtangen-

ten, die mit der positiven reellen Achse die Winkel $\beta_2 - \pi$ und $\beta_1 + \pi$ bilden (und also für $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$ parallel zueinander im Abstände $2t$ verlaufen). (Vgl. hierzu die Fig. 2, 3, von denen die erste für $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, die zweite für $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$ gezeichnet ist.) Wir betrachten nun die Punkte der u -Ebene, die zwischen der Geraden $\Re u = t$ und dem Weg C liegen. Fügen wir zur Menge dieser Punkte ihre im Endlichen liegenden Randpunkte hinzu, so wird die entstehende Punktmenge mit G_t bezeichnet. Sie wird offenbar durch den Punkt $u = t$ in zwei getrennte Teilstücke zerlegt.

Es ist leicht einzusehen, daß die durch (2.4) eingeführte Funktion $\Phi(u)$ auf der Menge G_t regulär ist. Nach dem im § 2 über ihr Regularitätsgebiet Gesagten genügt es zu beweisen, daß sämtliche in den Punkten des Bogens $-\frac{\pi}{2} + \beta_2 \leq \arg u \leq \frac{\pi}{2} + \beta_1$ an den Kreis $|u| = t$ gezogenen Tangenten in $F(k, \alpha_1, \alpha_2)$ verlaufen. Und dies ist, wegen $t > k$, sofort klar, sobald wir

^{a)} Man beachte, daß wegen (3.1) $-\pi/2 + \beta_2 < 0, \pi/2 + \beta_1 > 0$ ist.

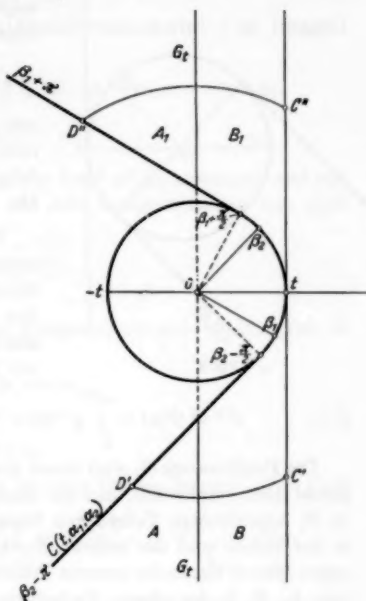


Fig. 2

gezeigt haben, daß sowohl $\frac{\pi}{2} + \beta_1$ als auch $-\frac{\pi}{2} + \beta_2$ im Intervall $(-\alpha_2, -\alpha_1)$ liegen. Dies folgt aber sofort aus den Relationen (3.1). — Wir beweisen nunmehr den

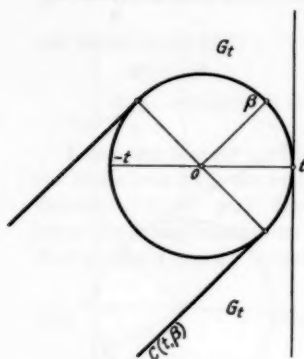


Fig. 3

Hilfssatz 4. Für positive $\zeta \geq \zeta_0$ gleichmäßig auf der ganzen Punktmenge G_t gilt die Relation:

$$(3.4) \quad |u^3 e^{\zeta u} \Phi(u)| \leq C(\zeta), \quad (\zeta \geq \zeta_0),$$

und zwar gleichmäßig in bezug auf ζ in jedem endlichen Intervall der Halbgeraden $\zeta \geq \zeta_0$. — ζ_0 hängt dabei von der Wahl der Größen β_1, β_2 ab.

Der Beweis des Hilfssatzes 4 verlangt etwas umständliche Überlegungen. Wir gehen bei diesem Beweis von (2.10) aus. Zerlegt man den Integrationsweg in (2.10) in zwei Teilstücke durch den Punkt $R e^{ix}$, so können wir schreiben

$$(3.5) \quad e^{\zeta u} u^3 \Phi(u) = \int_R^{\infty e^{ix}} q'''(z) e^{-u(z-t)} dz = \int_R^{R e^{ix}} + \int_{R e^{ix}}^{\infty e^{ix}} = I + II.$$

Die Punktmenge G_t wird durch das sie durchsetzende Stück der imaginären Achse derart unterteilt, daß sie nunmehr aus vier, in der Figur 2 mit A, A_1, B, B_1 bezeichneten Teilstücken besteht, wobei die inneren Punkte von A, A_1 in der linken und die inneren Punkte von B, B_1 in der rechten Halbebene liegen; ferner liegen die inneren Punkte von A, B in der unteren und diejenigen von A_1, B_1 in der oberen Halbebene. Man entnimmt sofort der Figur 2, daß auf diesen Teilstücken von G_t die folgenden Relationen gelten:

$$(3.6a) \quad \text{auf } A: \beta_2 - \pi < \arg u \leq -\frac{\pi}{2};$$

$$(3.6b) \quad \text{auf } B: 0 \leq \Re u \leq t, \Im u < 0;$$

$$(3.6a_1) \quad \text{auf } A_1: \frac{\pi}{2} \leq \arg u < \pi + \beta_1;$$

$$(3.6b_1) \quad \text{auf } B_1: 0 \leq \Re u \leq t, \Im u \geq 0.$$

Wir definieren nun eine positive Zahl ω durch

$$(3.7) \quad \omega = \frac{1}{3} \min \left[\frac{\pi}{2} - \beta_2, \beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2 + \alpha_2 - \frac{\pi}{2}, -\alpha_1 - \beta_1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\alpha_1, \alpha_2 \right].$$

Daß $\omega > 0$ ist, d. h. daß die in der eckigen Klammer stehenden Größen positiv sind, folgt sofort aus den Relationen (3.1). Wir setzen nunmehr fest

$$(3.8) \quad \zeta_0 = \frac{R}{\sin \omega}.$$

⁹⁾ Die entsprechenden Relationen im Fall der Fig. 3 ergeben sich sofort, wenn man oben $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ setzt. Dasselbe gilt auch für die weiter im Laufe des Beweises angegebenen Formeln und Überlegungen.

Da ferner (3.4) sich im wesentlichen auf ins Unendliche strebende u bezieht, darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit von vornherein annehmen, daß

$$(3.9) \quad |u| > \frac{2t}{\sin \omega}$$

gilt.

Bei den im folgenden zu benutzenden Abschätzungen wird χ im Integral (3.5) immer den Relationen genügen

$$(3.10) \quad \alpha'_1 = \text{Max}(-\pi + \omega, \alpha_1 + \omega) \leq \chi \leq \text{Min}(\alpha_2 - \omega, \pi - \omega) = \alpha'_2,$$

$$(3.11) \quad |\chi + \arg u| \leq \frac{\pi}{2} - \omega.$$

Wir können daher, indem wir (2.2) mit $k + \varepsilon = t$ auf $\varphi'''(z)$ anwenden und auf solche z , die unter der Annahme (3.10) auf dem Integrationsweg von (3.5) liegen, die folgende Relation aufstellen

$$(3.12) \quad |\varphi'''(z)| \leq C_1 e^{t|z|}.$$

Hier hängt C_1 natürlich von t und ω ab.

Andererseits folgt aus (3.11) längs des Integrationsweges des Integrals II in (3.5)

$$\Re u z \geq |u| |z| \sin \omega$$

und daher wegen (3.9)

$$\Re u z \geq 2t|z|.$$

Beachten wir daher, daß $\Re u \leq t$ in G_t ist, so folgt für das Integral II in (3.5)

$$|\text{II}| \leq C_1 \int_{Re^{i\chi} z}^{\infty e^{i\chi} z} e^{t|z| - \Re u z + t\zeta} |dz| \leq C_1 e^{t\zeta} \int_{Re^{i\chi} z}^{\infty e^{i\chi} z} e^{-t|z|} |dz| < C_1 e^{t\zeta} \int_0^{\infty} e^{-tz} dz,$$

$$(3.13) \quad |\text{II}| \leq \frac{C_1}{t} e^{t\zeta}.$$

Wir brauchen also nur noch I zu betrachten — es sei hervorgehoben, daß diese Betrachtung wegfällt für $R = 0$. — Aus (3.5) und (3.12) folgt

$$(3.14) \quad |\text{I}| \leq C_1 e^{tR} \int_R^{\infty e^{i\chi} z} e^{-\Re u(z-\zeta)} |dz|.$$

Es sei nunmehr u in A gelegen. Dann wählen wir χ so, daß die Relationen

$$(3.15) \quad \frac{\pi}{2} - \beta_2 + \omega < \chi < \pi - \omega, \quad 0 < \chi < \alpha_2 - \omega$$

erfüllt sind. Daß diese Relationen miteinander verträglich sind, d. h. daß die beiden Intervalle (3.15) gemeinsame Punkte haben, folgt daraus, daß wegen (3.7) der Endpunkt jedes dieser Intervalle rechts vom Anfangspunkt des anderen liegt. Für (3.15) ist die rechtsseitige Relation (3.10) klar. Die linksseitige folgt daraus, daß $\alpha'_1 < 0$ ist. Die Gültigkeit von (3.11) ergibt sich, wenn die erste Ungleichung (3.15) gliedweise zu (3.6a) addiert wird.

Wir haben nunmehr im Integral in (3.14) das Argument von $z - \zeta$ abzugrenzen. Man vergleiche zu diesem Zwecke die Fig. 4. Aus ihr folgt sofort, daß

der Winkel, den der Vektor von ζ nach einem Punkt z der oberen Hälfte von $|z| = R$ mit der negativen x -Achse bildet, höchstens gleich ist dem Winkel, den die von ζ_0 aus an den Kreis $|z| = R$ oberhalb der reellen Achse gelegte Tangente



Fig. 4

mit der negativen x -Achse bildet. Dieser letztere ist aber wegen (3.8) gleich ω . Wir haben daher längs des Integrationsweges von I: $\pi \geq \arg(z - \zeta) \geq \pi - \omega$. Daraus folgt aber wegen (3.6a) $\frac{\pi}{2} \geq \arg u(z - \zeta) \geq$

$$\geq \beta_2 - \omega \geq \beta_1 - \omega > -\frac{\pi}{2}.$$

Wir sehen, daß $u(z - \zeta)$ einen nicht negativen Realteil hat, so daß aus (3.14) sofort folgt

$$(3.16) \quad |I| \leq C_1 e^{tR} R \chi < \pi C_1 R e^{tR}.$$

Aus (3.13) und (3.16) folgt nunmehr

$$(3.17) \quad |e^{\zeta u} u^2 \Phi(u)| \leq C_1 e^{t\zeta} \left(\pi R e^{tR} + \frac{1}{t} \right).$$

Für u in A_1 verläuft die Überlegung durchaus symmetrisch. Man wählt χ den beiden Ungleichungen gemäß

$$(3.18) \quad -\pi + \omega < \chi < -\beta_1 - \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \alpha_1 + \omega < \chi < 0.$$

Dann folgt (3.10) sofort, wegen $\alpha'_2 > 0$, und (3.11) ergibt sich durch gliedweise Addition von (3.6a₁) zur ersten Ungleichung (3.18). Für $\arg(z - \zeta)$ längs des Integrationsweges von (3.12) erhält man hier aus der zur Fig. 4 in bezug auf die reelle Achse symmetrischen Figur die Relation

$$-\pi \leq \arg(z - \zeta) \leq -\pi + \omega$$

und daher wegen (3.6a₁)

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg u(z - \zeta) \leq \beta_1 + \omega \leq \beta_2 + \omega \leq \frac{\pi}{2},$$

so daß der Exponent unter dem Integrationszeichen in (3.14) nicht positiv ist und daher auch in diesem Fall (3.16) und damit auch (3.17) gilt.

Liegt nun u in $B + B_1$, so setzen wir $\chi = \omega$, wenn u in B und $\chi = -\omega$, wenn u in B_1 liegt. (3.10) folgt dann sofort aus (3.7). Aus Fig. 2 und (3.9) folgen dann weiter die folgenden Schranken für $\arg u$

$$(B) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg u \leq -\frac{\pi}{2} + \omega,$$

$$(B_1) \quad \frac{\pi}{2} - \omega \leq \arg u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Daraus folgt (3.11) unmittelbar.

Beachtet man nun ferner, daß längs des ganzen Integrationsweges in diesen Fällen $\arg z$ zwischen 0 und ω bzw. 0 und $-\omega$ liegt, so folgen in beiden Fällen die folgenden Relationen längs des Integrationsweges

$$(B) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg uz \leq -\frac{\pi}{2} + 2\omega,$$

$$(B_1) \quad \frac{\pi}{2} - 2\omega \leq \arg uz \leq \frac{\pi}{2}.$$

Da in beiden Fällen die Schranken für $\arg uz$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen, folgt, daß auf jeden Fall $\Re uz \geq 0$ ist. Andererseits gilt in $B + B_1$: $\Re u \leq t$ und daher

$$\Re u \zeta \leq t \zeta.$$

Nunmehr ergibt sich aus (3.14)

$$|I| \leq \omega C_1 R e^{tR+t\zeta} \quad (u < B + B_1).$$

Daraus und aus (3.13) folgt wegen $\omega < \pi$ von neuem (3.17), und der Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Aus unserem Beweis ergibt sich zugleich der folgende

Zusatz zu Hilfssatz 4. Als die untere Schranke ζ_0 der Werte von ζ in Hilfssatz 4 kann die Zahl $\zeta_0 = \frac{R}{\sin \omega}$ gewählt werden, wo ω durch (3.7) gegeben ist.

§ 4. Darstellung von $\varphi(\zeta)$ durch $\Phi(u)$ mit Hilfe eines Konturintegrals.

Hilfssatz 5. Es sei $\varphi(z)$ eine den im § 2 zugrunde gelegten Bedingungen genügende Funktion und $\Phi(u)$ die dazu nach der Vorschrift von § 2 gebildete Unterfunktion. Es sei $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ ein nach den Vorschriften von § 3 gebildeter Weg, der im positiven Sinne in bezug auf den Ursprung durchlaufen wird. Dann gilt für jedes reelle $\zeta > \zeta_0$ die Darstellung

$$(4.1) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{u\zeta} \Phi(u) du,$$

wo das Integral rechts absolut konvergiert und ζ_0 durch (3,8) (§ 3) gegeben ist.

Beweis: Die absolute Konvergenz des Integrals rechts in (4.1) folgt unmittelbar aus Hilfssatz 4 (§ 3). — Wir beweisen zuerst die folgende Formel, die für jedes $\zeta > R$ und $t > k$ gilt:

$$(4.2) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} e^{u\zeta} \Phi(u) du.$$

Führen wir rechts eine neue Integrationsvariable v vermöge $u = t + iv$ ein, so verwandelt sich (4.2) in

$$(4.3) \quad e^{-\zeta t} \varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta v} \Phi(t + iv) dv.$$

Beim Beweis von (4.3) werden wir die Fouriersche Integralformel in komplexer Schreibweise benutzen, die hierher gesetzt werden möge:

$$(4.4) \quad g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv\zeta} dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivz} g(z) dz.$$

(4.4) gilt unter der Annahme, daß das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(z)| dz$ existiert, für jedes ζ , für das $g(z)$ stetig ist und sowohl $g'_+(\zeta)$ als auch $g'_-(\zeta)$ existiert⁷⁾.

⁷⁾ Vgl. z. B. A. OSTROWSKI, Vorlesungen über Infinitesimalrechnung Bd. 3 (1954) Formel (108.7) auf S. 448, wo f durch g , t durch z , α durch v und z durch ζ zu ersetzen sind.

$\Phi(t + i v)$ wird durch die Formel (2.4) mit $\chi = 0$ dargestellt, da $t + i v$ in der Halbebene $\Re u > k$ liegt. Wir können daher schreiben

$$\Phi(t + i v) = \int_R^{\infty} (e^{-t z} \varphi(z)) e^{-i v z} dz.$$

Führen wir daher $g(z)$ durch

$$(4.5) \quad g(z) = \begin{cases} e^{-t z} \varphi(z) & z > R, \\ 0 & z \leq R \end{cases}$$

ein, so gilt

$$\Phi(t + i v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-i v z} dz$$

und der Ausdruck rechts in (4.3) nimmt die Gestalt an

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \zeta v} dv \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-i v z} dz.$$

Nun ist wegen (4.5) und (2.2) $|g(z)|$ integrierbar von $-\infty$ bis $+\infty$ und zugleich ist $g(z)$ regulär für alle $\zeta > R$. Daher ist für $\zeta > R$ (4.4) anwendbar, und wir erhalten für den Ausdruck rechts in (4.3) $g(\zeta) = e^{-\zeta t} \varphi(\zeta)$, womit (4.3) verifiziert und (4.2) bewiesen ist.

Man beachte nun, daß der Integrand in (4.2) regulär auf der ganzen Menge G_t und in ihren endlichen Randpunkten ist. Wenn wir daher den Integrationsweg in (4.2) in die Integrationskontur C deformieren wollen, können wir in folgender Weise vom Cauchyschen Integralsatz Gebrauch machen. Man beschreibe um den Ursprung zwei Kreisbögen vom Radius $R^* > t$, von denen der eine das Stück $A + B$ von G_t durchsetzt, von einem Punkt C' auf der Geraden $\Re u = t$ bis zu einem Punkt D' auf der Kontur C ; während der andere analog das Stück $A_1 + B_1$ von G_t von einem Punkt C'' auf $\Re u = t$ bis D'' auf C durchsetzt (vgl. Fig. 2 in § 3). Dann läßt sich das von C' bis C'' erstreckte Teilstück des Integrals in (4.2) nach dem Cauchyschen Satze wie folgt zerlegen:

$$(4.6) \quad \int_{C' + C''} = \int_{C' D'} + \int_{D' D''} + \int_{D'' C''};$$

wo das erste und dritte Integral rechts längs der oben beschriebenen Kreisbögen genommen werden, während das mittlere Integral über das entsprechende Stück von C erstreckt wird.

Aus Hilfssatz 4 (§ 3) folgt nunmehr für das erste Integral rechts (man beachte, daß dabei ζ konstant gehalten werden darf)

$$\int_{D' C'} = \int_{D' C'} 0 \left(\frac{1}{R^{*2}} \right) du = 0 \left(\frac{R^*}{R^{*2}} \right) = 0 \left(\frac{1}{R^*} \right),$$

und analog ist das dritte Integral rechts $0 \left(\frac{1}{R^*} \right)$.

Da daher diese beiden Integrale mit $R^* \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren, ergibt sich aus (4.6) in der Grenze (4.1).

Zusatz zu Hilfssatz 5. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 gilt:

$$(4.7) \quad \varphi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u e^{u \zeta} \Phi(u) du.$$

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß für jedes Paar $\zeta_2 > \zeta_1$ mit $\zeta_1 > \zeta_0$ das Integral (4.7) in bezug auf ζ in $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Dies folgt aber nach Hilfssatz 4 (§ 3) aus

$$u e^{u\zeta} \Phi(u) = u e^{(\zeta - \zeta_0)u} e^{\zeta_0 u} \Phi(u) = 0 \left(\frac{1}{u^2} e^{(\zeta_1 - \zeta_0)u} \right) (\Re u < 0).$$

§ 5. Eine Abschätzung von $f(s)$.

Es sei der Weg $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ nach den Vorschriften von § 3 gebildet. Wir betrachten nun das sich ins Unendliche erstreckende Gebiet, das links von C liegt, und lassen u dieses Gebiet und die Punkte von C durchlaufen. s möge die Kreisscheibe $|s - s_1| \leq \delta$ durchlaufen. Dann durchlaufen die Punkte $s - u$ eine Punktmenge, die wir mit

$$(5.1) \quad C_i = C_i(t, \beta_1, \beta_2, s_1, \delta)$$

bezeichnen. Ihr Rand ergibt sich offenbar, wenn man C am Ursprung spiegelt, sodann einer Parallelverschiebung um s_1 unterwirft und sodann längs des entstehenden Weges eine Kreisscheibe mit dem Radius δ mit ihrem Mittelpunkt gleiten läßt. Dann ist der „äußere Rand“ des entstehenden Streifens zugleich der Rand von (5.1).

Hilfssatz 6. Es mögen über $\varphi(z)$ die in § 2 gemachten Annahmen gelten und es sei der Weg $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ gemäß den Vorschriften von § 3 gewählt. ζ_0 sei durch (3.8) definiert.

Für ein $a > \zeta_0$ möge $A(\lambda)$ auf jedem endlichen Teilintervall des Halbstrahls $\lambda \geq a$ von beschränkter Variation sein und das Integral

$$(5.2) \quad f(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} dA(\lambda)$$

möge für $\Re s > 0$ konvergieren.

Es seien $\delta > 0$ und ein Punkt s_1 so beschaffen, daß f regulär auf C_i ist, wobei für die in der rechten Halbebene liegenden Punkte von C_i die durch (5.2) gegebene Bestimmung zu nehmen ist.

Ist dann R' so gewählt, daß $a > R' > \zeta_0$ ist, so gilt

$$(5.3) \quad |e^{-R'u} f(s - u)| \leq C_2(s_1, \delta, t, \beta_1, \beta_2, f)$$

für alle s mit $|s - s_1| \leq \delta$ und für alle u auf dem Weg C und auf dem links von diesem Weg gelegenen Gebiet. Die Schranke C_2 in (5.3) hängt dabei nur von f und den als Argument bei C_2 angegebenen Parametern ab.

Beweis: Für $s - u$ schreiben wir der Kürze halber u' , so daß u' die Menge C_i durchläuft. Durch die Gerade $\Re u' = 1$ wird C_i in zwei Stücke zerschnitten, wobei natürlich das links von dieser Geraden liegende Stück auch leer sein könnte. Ist dieses Stück nicht leer, so ergänzen wir es durch die auf $\Re u' = 1$ liegenden Randpunkte und erhalten eine beschränkte abgeschlossene Menge $C_i^{(l)}$. Ebenso ergänzen wir das rechts von $\Re u' = 1$ gelegene unendliche Stück von C_i durch die auf dieser Geraden liegenden Randpunkte und nennen die entstehende Punktmenge $C_i^{(r)}$. Dann gibt es eine Konstante C_3 , so daß durchweg auf $C_i^{(l)}$ gilt:

$$|f(u')| \leq C_3.$$

Legen wir andererseits vom Ursprung aus Stützstrahlen an die Menge $C_i^{(r)}$, so bilden diese Stützstrahlen mit der positiven reellen Achse Winkel $< \frac{\pi}{2}$, so daß es ein ε , $1 > \varepsilon > 0$ gibt, für das $|\arg u'| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ in $C_i^{(r)}$ ist. Dann liefert aber (1.8*), auf $f(u')$ und $s_0 = 0$ angewandt:

$$|f(u')| < C_4 e^{-a \Re u'} \quad (u' < C_i^{(r)}).$$

Man beachte nun, daß wenn $\Re u < -(|s_1| + \delta + t + 1)$ ist, dann sicherlich $\Re(s - u) > 1$ gilt. Dies bedeutet also, daß wenn u' in $C_i^{(r)}$ liegt, dann sicher $-\Re u \leq |s_1| + \delta + t + 1$ ist, so daß in diesem Falle

$$|e^{-R'u} f(s - u)| \leq C_3 e^{R'(|s_1| + \delta + t + 1)}$$

ist. Liegt aber u' in $C_i^{(r)}$, so folgt aus der obigen Abschätzung, wegen $|\Re s| \leq |s_1| + \delta$:

$$|e^{-R'u} f(s - u)| \leq C_4 e^{-R'\Re s} e^{-(a - R')\Re u'} \leq C_4 e^{R'(|s_1| + \delta)} = C_5.$$

Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

§ 6. Darstellung von $F(s)$ durch ein Konturintegral für $\Re s > k$.

Hilfssatz 7: Es mögen $f(s)$ und $\varphi(z)$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 6 genügen und es sei der Weg $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$ gemäß den Vorschriften von § 3 gewählt. ω und ζ_0 seien durch (3.7) bzw. (3.8) und $\Phi(u)$ nach § 2 definiert. Bildet man dann das Integral

$$(6.1) \quad F(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) dA(\lambda),$$

das nach Hilfssatz 2 für $\Re s > k$ konvergiert, und ist $a > \zeta_0$, so gilt für $\Re s > t$:

$$(6.2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) f(s - u) du = F(s).$$

Beweis: Man kann offenbar in den Darstellungen (5.2) und (6.1) von $f(s)$ und $F(s)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $A(a) = 0$ ist. Wir beweisen zunächst, daß unter den obigen Annahmen für jedes endliche $N > a$ die folgende Relation gilt:

$$(6.3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) du \int_a^N e^{-\lambda(s-u)} dA(\lambda) = \int_a^N e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) dA(\lambda).$$

Formen wir die Stieltjesschen Integrale auf beiden Seiten von (6.3) um, so erhalten wir beziehungsweise

$$(6.4) \quad A(N) e^{-Ns} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) e^{Nu} du + \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) (s - u) du \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda(s-u)} d\lambda,$$

$$(6.5) \quad A(N) \varphi(N) e^{-Ns} + \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda s} (s \varphi(\lambda) - \varphi'(\lambda)) d\lambda.$$

Daß die ersten Terme in (6.4) und (6.5) einander gleich sind, folgt sofort aus (4.1), da $N > a > \zeta_0$ ist. Es genügt daher, um die Übereinstimmung von (6.4) und (6.5) zu beweisen, die beiden folgenden Relationen nachzuweisen

$$(6.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) du \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda(s-u)} d\lambda = \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

$$(6.7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C u \Phi(u) du \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda(s-u)} d\lambda = \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda s} \varphi'(\lambda) d\lambda.$$

Zum Nachweis von (6.6) gehen wir vom Ausdruck rechter Hand aus und setzen für $\varphi(\lambda)$ die Integraldarstellung (4.1) ein. Dabei denken wir uns den Integrationsweg C zerlegt in eine unendliche Summe von Teilbögen der Länge 1

$$(6.8) \quad C = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C^{(\nu)}.$$

Dann wird der Ausdruck rechts in (6.6) zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^N \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \int_{C^{(\nu)}} e^{u\lambda} \Phi(u) du.$$

Man beachte nun, daß die unter dem Zeichen der Integration nach λ stehende unendliche Reihe gleichmäßig in bezug auf λ konvergiert, da hier λ im endlichen Intervall $\langle a, N \rangle$ variiert und die Abschätzung (3.4) des Hilfssatzes 4 (§ 3) für den ν -ten Term dieser unendlichen Reihe die Abschätzung durch $O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$ liefert, gleichmäßig in λ . Daher können wir diese Reihe nach λ gliedweise integrieren und erhalten für den Ausdruck rechts in (6.6)

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_a^N \int_{C^{(\nu)}} A(\lambda) e^{-\lambda s} e^{u\lambda} \Phi(u) du d\lambda.$$

Da in den Integralen unter dem Summenzeichen der Integrand eine meßbare Funktion von u und λ ist, kann nach dem Fubinischen Satze die Integration nach u mit derjenigen nach λ vertauscht werden. So ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^N \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda s} e^{u\lambda} \Phi(u) d\lambda du = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) du \int_a^N A(\lambda) e^{-\lambda(s-u)} d\lambda,$$

womit (6.6) bewiesen ist.

Der Beweis von (6.7) erfolgt genau ebenso, wenn man in der obigen Überlegung (4.1) durch (4.7) ersetzt und wiederum (3.4) berücksichtigt.

Lassen wir nunmehr in (6.3) N ins Unendliche wachsen, so strebt der Ausdruck rechts gegen das Integral in (6.1), d. h. gegen $F(s)$, da ja das Integral in (6.1) für $\Re s > k$ konvergiert. Wir haben daher nur noch zu beweisen, daß der Ausdruck links in (6.3) gegen den Ausdruck links in (6.2) konvergiert. Da nun für $\Re s > t$ nach unseren Annahmen über C der Wert von $\Re(s-u)$ positiv ist, ist in (6.2) $f(s-u)$ durch das entsprechende Integral (5.2) darstellbar und unsere

Behauptung reduziert sich nun darauf, daß

$$(6.9) \quad \int_C \Phi(u) du \int_N^\infty e^{-\lambda(s-u)} dA(\lambda)$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Der Ausdruck (6.9) kann offenbar in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(6.10) \quad e^{-\zeta_0 s} \int_C e^{\zeta_0 u} \Phi(u) du \int_N^\infty e^{-(\lambda - \zeta_0)(s-u)} dA(\lambda).$$

Hier aber ist nach (3.4) der Faktor $e^{\zeta_0 u} \Phi(u)$ gleich $0 \left(\frac{1}{|u|^2} \right)$. Das innere Integral läßt sich, wenn dort $\lambda - \zeta_0$ als neue Integrationsvariable eingeführt und sodann wieder mit λ bezeichnet wird, in der Form schreiben

$$(6.11) \quad \int_{N-\zeta_0}^\infty e^{-\lambda(s-\zeta_0)} dA(\lambda + \zeta_0).$$

Ist nun $\Re s - t = p$, so ist für u auf $C(t, \beta_1, \beta_2)$: $\Re(s-u) \geq p > 0$ und es folgt aus (1.4), angewandt für $N_1 = \infty$, $s' = \frac{p}{2}$, daß (6.11) gleich $0 \left(e^{-\frac{p}{2}(N-\zeta_0)} \right) = 0 \left(e^{-\frac{p}{2}N} \right)$ gleichmäßig in bezug auf u ist. Daher ist der Ausdruck (6.10) gleich $0 \left(e^{-\frac{p}{2}N} \right) 0 \left(\int_C \frac{du}{|u|^2} \right)$ und dies konvergiert mit $N \rightarrow \infty$ gegen 0. Daher strebt (6.9) gleichfalls gegen Null und (6.2) ist bewiesen.

§ 7. Ein Satz über die Analytizität von Integralen als Funktionen eines Parameters.

Hilfssatz 8. *Es sei G ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet in der s -Ebene und C ein stückweise glatter unendlicher Kurvenbogen, wobei diese stückweise Glattheit in dem Sinne zu verstehen ist, daß die „Eckpunkte“ von C sich nicht im Endlichen häufen. $\Phi(u)$ sei stückweise stetig für alle u auf C° , und $f(s)$ sei regulär und eindeutig auf der offenen Menge $G - C$, die von den Punkten $s - u$ durchlaufen wird, wenn s und u unabhängig voneinander G beziehungsweise C durchlaufen. Endlich soll das Integral*

$$(7.1) \quad W(s) = \int_C f(s-u) \Phi(u) du$$

für alle s in G gleichmäßig konvergieren. Dann stellt dieses Integral eine in G reguläre Funktion von s dar.

Beweis. Nach dem Satz von MORERA genügt es zu zeigen, daß das Integral $\int_P W(s) ds$ längs eines beliebigen, vollständig in G liegenden Jordanschen Polygons P verschwindet⁹⁾. Man denke sich nun C in eine unendliche Summe von Teilbögen $C^{(v)}$ der Länge ≤ 1 zerlegt, $C = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} C^{(v)}$, wobei $\Phi(u)$ längs jedes $C^{(v)}$

⁹⁾ Dies bedeutet, daß $\Phi(u)$ auf jedem endlichen Teilbogen von C stückweise stetig ist.

¹⁰⁾ Vgl. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionstheorie, Bd. 1, 3. Aufl. 1920, p. 302, wo sogar bewiesen wird, daß es genügt, als geschlossene Integrationswege achsenparallele Rechtecke zu verwenden.

bei geeigneter Festlegung der Werte in den Eckpunkten stetig ist. Dann gilt

$$(7.2) \quad W(s) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \int_{C^{(v)}} f(s-u) \Phi(u) du,$$

wo die Reihe nach Annahme für s auf G gleichmäßig konvergiert. Daher folgt

$$\int_P W(s) ds = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \int_P \int_{C^{(v)}} f(s-u) \Phi(u) du ds,$$

und es genügt zu beweisen, daß hier sämtliche Glieder der unendlichen Reihe rechts verschwinden. Nun gilt aber

$$\int_P \int_{C^{(v)}} f(s-u) \Phi(u) du ds = \int_{C^{(v)}} \left(\int_P f(s-u) ds \right) \Phi(u) du,$$

da der Integrand für die in Betracht kommenden Werte von s und u eine stetige Funktion dieser beiden Variablen ist. Hier folgt für jedes u auf $C^{(v)}$ aus dem Cauchyschen Satze

$$\int_P f(s-u) ds = \int_{P-u} f(t) dt = 0,$$

wo $P-u$ das aus P durch Parallelverschiebung um u hervorgehende Polygon ist, das nach der Annahme mitsamt seinem Innern zum Regularitätsgebiet von $f(s)$ gehört. Damit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

§ 8. Analytische Fortsetzung von $F(s)$ für $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$.

Das Büschel der analytischen Richtungen γ mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ werden wir allgemein mit $W \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ bezeichnen.

Ist $f(s)$ für $\Re s > \sigma^*$ regulär, so werden wir von einem Punkt s_0 mit $\Re s_0 < \sigma^*$ sagen, $f(s)$ sei in s_0 längs der Richtungen aus $W \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ mit dem Regularitätsradius $> k$ fortsetzbar, wenn $f(s)$ längs jedes in s_0 mündenden und auf s_0 hin gerichteten Halbstrahls mit einer Richtung aus $W \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ derart in den Punkt s_0 fortsetzbar ist, daß dabei die Konvergenzradien der zugehörigen Funktionselemente durchweg $> k$ sind.

Satz I. Es sei $f(s)$ durch (1.1) gegeben, wo $A(\lambda)$ auf jeder endlichen Teilstrecke von $\langle a, \infty \rangle$ von beschränkter Schwankung ist und die Konvergenzabszisse σ^* von $f(s)$ endlich ist.

Es seien α_1 und α_2 reell und derart, daß

$$(8.1) \quad \alpha_1 < 0 < \alpha_2, \quad \alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$$

ist. $\varphi(z)$ sei regulär für alle z mit $|z| \geq R$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ und möge für jedes Zahlenpaar α'_1, α'_2 mit $\alpha_1 < \alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha_2$ einer Relation (2.2) genügen. Bildet man sodann die Funktion $F(s)$ mit Hilfe des Integrals (6.1), so ist $F(s)$ für $\Re s > k + \sigma^*$ regulär und aus dieser Halbebene in einen Punkt s_0 geradlinig fortsetzbar längs der Richtungen des Richtungsbüschels

$$(8.2) \quad W \left\langle \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \frac{3\pi}{2} - \alpha_2 \right\rangle,$$

wenn die Funktion $f(s)$ aus der Halbebene $\Re s > k + \sigma^*$ in s_0 längs aller Richtungen des Büschels (8.2) mit einem Regularitätsradius $> k$ fortsetzbar ist¹⁰⁾.

¹⁰⁾ Es ist übrigens klar, daß man im Satze I die untere Grenze a in (1.1) durch eine beliebige reelle Zahl ersetzen darf, da dann nach dem Hilfssatz 3 (§ 1) sowohl zu $f(s)$ als auch zu $F(s)$ nur ganze transzendente Funktionen addiert zu werden brauchen.

Beweis. Man beachte, daß für $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ sich das Büschel (8.2) auf eine einzige Richtung

$$\alpha^* = \frac{3\pi}{2} - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

reduziert. In diesem Falle ist aber $f(s)$ offenbar in jeden festen Punkt s_0 mit der im Satz postulierten Eigenschaft auch längs eines Richtungsbüschels $W \langle \alpha^* - \varepsilon, \alpha^* + \varepsilon \rangle$ für geeignet kleines ε mit dem Regularitätsradius $> k$ fortsetzbar. Daher ergibt sich in diesem Falle die Behauptung des obigen Satzes für ein solches s_0 , wenn wir in seiner Formulierung α_2 durch $\alpha_2 - \varepsilon$ und α_1 durch $\alpha_1 + \varepsilon$ ersetzen, wobei natürlich $\varepsilon < \min(\alpha_2, -\alpha_1)$ zu wählen ist. Wir können daher beim Beweis des Satzes 1 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß

(8.3)

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$$

ist.

Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Konvergenzabszisse σ^* von $f(s)$ gleich 0 ist, da man den allgemeinen Fall durch die Substitution $s^* = s - \sigma^*$ darauf zurückführen kann.

Bildet man ferner die Funktion

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) - [\varphi(R) + \varphi'(R)(z - R) + \frac{1}{2}\varphi''(R)(z - R)^2],$$

so gilt offenbar

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_a^\infty e^{-\lambda s} \varphi^*(\lambda) dA(\lambda) + \\ &+ [\varphi(R) - R\varphi'(R) + \frac{1}{2}R^2\varphi''(R)]f(s) - \\ &- [\varphi'(R) - R\varphi''(R)]f'(s) + \frac{1}{2}\varphi''(R)f''(s). \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $f'(s)$ und $f''(s)$ längs jedes Weges fortsetzbar sind, längs dessen $f(s)$ fortsetzbar ist, so sieht man, daß man beim Beweis unseres Satzes $\varphi(z)$ durch $\varphi^*(z)$ ersetzen kann. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Relationen (2.3) bereits für $\varphi(z)$ erfüllt sind.

Ist nun s_0 ein Punkt mit der im Satze I postulierten Eigenschaft, so gilt dasselbe offenbar für jeden Punkt aus einer genügend kleinen Umgebung von s_0 . Man zeichne nun das Dreieck Δ mit der Basis auf $\Re s = k + 1$ und der Spitze in s_0 , dessen beide von s_0 ausgehenden, in die rechte Halbebene gerichteten Seiten mit der positiven reellen Achse

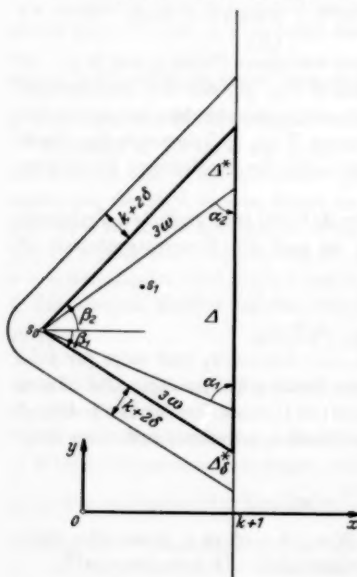


Fig. 5

beziehungsweise die Winkel $-\frac{\pi}{2} - \alpha_1$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$ bilden (vgl. Fig. 5).

Das Dreieck Δ erweitern wir nunmehr, indem wir von s_0 für ein hinreichend kleines $\omega > 0$ die Halbstrahlen mit den Richtungen $-\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - 3\omega$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + 3\omega$ bis zu ihren Schnittpunkten mit der Geraden $\Re s = k + 1$ legen. Das so entstehende Dreieck sei mit Δ^* bezeichnet (vgl. Fig. 5). Setzen wir dann

$$(8.4) \quad \beta_1 = -\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - 3\omega, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 + 3\omega,$$

so läßt sich ω so klein wählen, daß $f(s)$ in jeden Punkt des abgeschlossenen Dreiecks Δ^* längs der Richtungen aus $W(\pi + \beta_1, \pi + \beta_2)$ geradlinig fortsetzbar ist mit dem Regularitätsradius $> k$. Zugleich gelten, wenn ω klein genug ist, für die so gewählten Werte β_1, β_2 die Relationen (3.2) sowie die Relationen (3.7).

Soll nun die Fortsetzbarkeit von $F(s)$ in das abgeschlossene Dreieck Δ^* bewiesen werden, so können wir offenbar die Zahl a in der Definition (1.1) von $f(s)$ durch jede größere Zahl a_1 ersetzen; denn damit werden von $f(s)$ und $F(s)$ nur die Integrale

$$\int_a^{a_1} e^{-\lambda s} dA(\lambda), \quad \int_a^{a_1} e^{-\lambda s} \varphi(\lambda) dA(\lambda)$$

abgezogen, die nach Hilfssatz 3 (§ 1) ganze Funktionen sind. Wir können daher, nachdem das Dreieck Δ^* gebildet worden ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$(8.5) \quad a > \zeta_0 = \frac{R}{\sin \omega}$$

ist.

Offenbar läßt sich nunmehr eine positive Zahl δ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$ so wählen, daß bei der geradlinigen Fortsetzung von $f(s)$ aus der rechten Halbebene in das abgeschlossene Dreieck Δ^* die Konvergenzradien durchweg $> k + 2\delta$ bleiben.

Wir zeichnen nun die äußeren Parallelen im Abstand $k + 2\delta$ zu dem Stück der Berandung von Δ^* , das links von der Geraden $\Re s = k + 1$ liegt, verbinden sie durch einen Kreisbogen vom Radius $k + 2\delta$ um s_0 und ergänzen diese Parallelkurve durch das zugehörige Stück auf der Geraden $\Re s = k + 1$ zu einer geschlossenen Kurve, deren abgeschlossenes Inneres mit Δ_s^* bezeichnet werden mag (vgl. Fig. 5).

Wir setzen jetzt $t = k + \delta$ und bilden mit den so definierten Größen von t, β_1, β_2 nach der Vorschrift von § 3 den Integrationsweg $C = C(t, \beta_1, \beta_2)$. Ferner betrachten wir das längs dieses Integrationsweges erstreckte Integral

$$(8.6) \quad G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(u) f(s-u) du.$$

Nach Hilfssatz 7 gilt $G(s) = F(s)$ für $\Re s > t$.

Es sei jetzt s_1 irgendein Punkt aus Δ^* . Dann wollen wir beweisen, daß $G(s)$ für alle s mit $|s - s_1| < \delta$ regulär ist. Wir beweisen zuerst, daß das Integral (8.6) für alle diese s einen Sinn hat. Dazu haben wir die in § 5 mit $C_i = C_i(t, \beta_1, \beta_2, s_1, \delta)$ bezeichnete Punktmenge zu betrachten, die von $s - u$

durchlaufen wird, wenn s die abgeschlossene Kreisscheibe $|s - s_1| \leq \delta$ durchläuft und u die Punkte von C und das links von dieser Kurve gelegene Gebiet.

Um die von $-u$ dabei durchlaufene Punktmenge zu erhalten, haben wir einfach den Weg C der Fig. 2 im positiven Sinne um den Ursprung, und zwar um den Winkel π zu drehen. Wird nun diese Figur einer Parallelverschiebung um $s_1 + \Theta \delta$ mit $|\Theta| \leq 1$ unterworfen, so liegt das Innere der so verschobenen Figur zum Teil in der abgeschlossenen Punktmenge A_s^* und zum Teil in der Halbebene $\Re s > k + 1$. Daraus folgt, daß $f(u')$ für u' in C_i regulär ist. Daher gilt, $R' = \frac{\alpha + \zeta_0}{2}$ gesetzt, die Relation (5.3) des Hilfssatzes 6 (§ 5) gleichmäßig für alle betrachteten s und u .

Wir zerlegen nun den Integranden von (8.6) in das Produkt

$$[e^{-R'u} f(s-u)] [e^{R'u} \Phi(u)],$$

wo nach Hilfssatz 4 der zweite Faktor $0 \left(\frac{1}{|u|^x} \right)$ ist, woraus wegen (5.3) folgt, daß das Integral in (8.6) gleichmäßig für alle s mit $|s - s_1| \leq \delta$ konvergiert.

Nun genügt aber das Integral (8.6) der Voraussetzung des Hilfssatzes 8 (§ 7) und wir sehen, daß $G(s)$ im Kreise $|s - s_1| < \delta$ regulär ist. Daher ist es insbesondere regulär in jedem Punkte des abgeschlossenen Dreiecks A^* und da $G(s) = F(s)$ in dem rechts von der Geraden $\Re s = k + \frac{1}{2}$ liegenden Stück dieses Dreiecks ist, stellt $G(s)$ die Fortsetzung von $F(s)$ aus der Halbebene $\Re s > k$ in das gesamte abgeschlossene Dreieck A^* und insbesondere in den Punkt s_0 dar. Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

§ 9. Ein Hilfssatz über Linienelemente längs eines Streckenzuges.

Es sei $W = S_1 S_2 \dots S_n$ ein aus endlich vielen Strecken S_ν ($\nu = 1, \dots, n$) bestehender, in dieser Reihenfolge durchlaufener *einfacher* Streckenzug, der von einem Anfangspunkt A nach einem Endpunkt $B \neq A$ führt. Dabei darf also W keine geschlossene Kurve enthalten. Ferner setzen wir damit natürlich voraus, daß auf keine Strecke S_ν eine direkt entgegengesetzt gerichtete Strecke $S_{\nu+1}$ folgt.

Wird W von A nach B durchlaufen, so läßt sich insbesondere auf S_1 eine analytische Richtung festlegen, durch die Angabe eines Winkels φ_1 aus der positiven x -Richtung in die Durchlaufungsrichtung von S_1 . Wir denken uns diese analytische Richtung längs W „fortgesetzt“, indem wir jeder der Seiten S_ν als ihre analytische Richtung eine Zahl φ_ν zuordnen, derart, daß man bei der Drehung um φ_ν aus der positiven x -Richtung in die Durchlaufungsrichtung längs S_ν kommt, wobei wir verlangen, daß allgemein

$$(9.1) \quad |\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu| < \pi \quad (\nu = 1, \dots, n-1)$$

gilt. Von zwei analytischen Richtungen, die (9.1) genügen, sagen wir, daß sie *aufeinander passen*.

Es läuft diese Festlegung offenbar darauf hinaus, daß man die Ecken von W „abrundet“. Sofern $S_{\nu+1}$ nicht etwa eine direkte geradlinige Fortsetzung von S_ν ist, kann das Stück von W in der Umgebung dieser Ecke durch einen hinreichend kleinen Kreisbogen ersetzt werden, der dort sowohl S als auch $S_{\nu+1}$ berührt. Dann erhält man durch die *stetige* Fortsetzung der Richtung φ_ν längs

dieses Kreisbogens offenbar diejenige Richtung φ_{r+1} , die der Forderung (9.1) genügt. — Eine sich so ergebende Festlegung analytischer Richtungen längs W soll als *regulär* bezeichnet werden.

Damit ist die reguläre Fortsetzung von φ_1 längs W eindeutig festgelegt. Ist etwa dann $\varphi' = \min \varphi_r$, $\varphi'' = \max \varphi_r$, so nennen wir das Intervall $\langle \varphi', \varphi'' \rangle$ das *Tangentenrichtungsbüschel* von W . Wird zu φ' ein ganzzahliges Vielfaches $2k\pi$ von 2π addiert, so ist natürlich $2k\pi$ zu allen Größen des Tangentenbüschels zu addieren.

Wir definieren nun die *Tangentenrichtungsfunktion* $\Theta(P)$ längs W . Liegt P innerhalb von S_r , so setzen wir $\Theta(P) = \varphi_r$, während, wenn P die gemeinsame Ecke von S_r und S_{r-1} ist, $\Theta(P+0) = \varphi_r$, $\Theta(P-0) = \varphi_{r-1}$ gesetzt wird. Für $P = A, B$ gilt natürlich $\Theta(A) = \varphi_1$, $\Theta(B) = \varphi_n$.

Wir betrachten nun andererseits eine von A nach einem Punkt P von W gezogene *Sehne* von W und lassen ihren Endpunkt P längs W von A an nach B laufen. Diese Sehne wird, solange P auf S_1 liegt, als analytische Richtung φ_1 zugeordnet. Von da an dreht sich diese Sehne stetig um A und wir erhalten schließlich auf diese Weise für jeden Punkt P von W für die Sehne AP einen eindeutig bestimmten Wert $\Theta(A, P)$ als analytische Richtung. In unserer Mitteilung (OSTROWSKI [3]) haben wir gezeigt, daß der Satz gilt:

Sehnenrichtungssatz: Für einen wie oben beschriebenen Weg ist die durch die angegebene stetige Fortsetzung von A aus entstehende analytische Richtung $\Theta(A, P)$ der Sehne AP im Tangentenrichtungsbüschel von W enthalten, das derselben analytischen Anfangsrichtung φ_1 von S_1 entspricht.

Ist Q ein innerer Punkt auf W , so können wir für jeden Punkt P zwischen Q und B die Funktion $\Theta(Q, P)$ definieren, indem wir dieser Funktion den Wert $\Theta(Q+0)$ zuordnen, solange P längs der Strecke läuft, deren Anfangspunkt Q im Teilstreckenzug QB ist. Von da an wird der Wert von $\Theta(Q, P)$ stetig fortgesetzt, wenn P weiter bis B läuft. Damit ist die *Sehnenrichtungsfunktion* $\Theta(Q, P)$ längs W definiert, wobei also P stets auf Q im angenommenen Durchlaufungssinne folgt. Sie ist offenbar als stetige Funktion von P durch die beiden folgenden Eigenschaften definiert, nämlich, 1. daß $\Theta(Q, P)$ die Richtung der Sehne von Q nach P liefert und 2. daß $\Theta(Q, Q+0) = \Theta(Q+0)$ ist.

Über diese Sehnenrichtungsfunktion haben wir nun in der zweiten der diesbezüglichen Mitteilungen (s. Satz 3, p. 179 in OSTROWSKI [4]) den Satz bewiesen, daß $\Theta(Q, P)$ auch eine stetige Funktion von Q ist, solange P auf Q folgt und daß insbesondere

$$(9.2) \quad \lim_{Q \rightarrow P} \Theta(Q, P) = \Theta(P-0, P) = \Theta(P-0)$$

ist.

Ist P auf W zwischen A und B gelegen, so ist die wie üblich definierte *Ordnung* des Teilstücks PB von W in bezug auf A offenbar gleich $\Theta(A, B) - \Theta(A, P)$. Lassen wir P längs W gegen A konvergieren, so erhalten wir in der Grenze die Ordnung

$$(9.3) \quad \Omega_A(W) = \Theta(A, B) - \Theta(A)$$

des Bogens W in bezug auf seinen Anfangspunkt A . Analog wird $\Omega_B(W)$, die Ordnung des Bogens W in bezug auf seinen Endpunkt B , definiert. Man erhält offenbar $\Omega_B(W)$, indem man einen Strahl von B nach A legt und sodann den Endpunkt A dieses Strahls durch alle Punkte P von W gegen B konvergieren läßt. Dann ist $\Omega_B(W)$ der gesamte „Richtungszuwachs“ dieses Strahls.

Insbesondere ist der Richtungszuwachs dieses Strahls zwischen A und P offenbar gleich

$$(\pi + \Theta(P, B)) - (\pi + \Theta(A, B)) = \Theta(P, B) - \Theta(A, B).$$

Dies konvergiert aber wegen (9.2) mit $P \rightarrow B$ gegen

$$(9.4) \quad \Omega_B(W) = \Theta(B) - \Theta(A, B).$$

Man nehme nun an, daß es eine Gerade H durch B gibt, die bis auf den Punkt B nirgends W trifft. Wenn dann der von B durch A ins Unendliche gehende Halbstrahl sich durch die Drehung um einen Winkel ψ in den von B aus längs der Endstrecke S_n gehenden Halbstrahl derart überführen läßt, daß dabei die Richtung von H nicht überschritten wird, gilt bekanntlich $\Omega_B(W) = \psi$. ψ wird hier natürlich je nach dem Umdrehungssinne positiv oder negativ angenommen, ist aber sicher absolut kleiner als π . So folgt

$$(9.5) \quad |\Omega_B(W)| < \pi.$$

Unsere späteren Betrachtungen werden nun wesentlich den Hilfssatz benutzen:

Hilfssatz 9. *Es sei der Streckenzug W wie am Anfang dieses Paragraphen definiert, wobei aber weiter angenommen werden soll, daß die von A nach B gerichtete Strecke im Punkte B nicht direkt entgegengesetzt zur Richtung $\Theta(B) = \varphi_n$ ist. Ferner möge eine Gerade H durch B existieren, die den Streckenzug W nur im Punkte B trifft. Dann kann man für einen beliebigen Punkt P von W die analytische Richtung $\Theta^*(A, P)$ der Sehne AP als eine stetige Funktion von P derart definieren, daß man zunächst der Sehne AB einen solchen Wert der analytischen Richtung beilegt, der zu $\Theta(B)$ paßt, und sodann den Endpunkt längs W stetig gegen A laufen läßt. Dabei bleiben sämtliche Werte von $\Theta^*(A, P)$ im Tangentenrichtungsbuschel von W enthalten.*

Beweis. Da die Richtung von S_n in die dem Punkte A abgewandte Seite von H weist, ist der Winkel zwischen der gerichteten Sehne von A nach B und der gerichteten Sehne S_n kein ungerades Vielfaches von π , so daß sich die analytische Richtung $\Theta^*(A, B)$ so wählen läßt, daß sie auf φ_n paßt.

Nach dem oben angeführten Sehnenrichtungssatz genügt es nunmehr zu beweisen, daß $\Theta^*(A, B) = \Theta(A, B)$, daß also mit anderen Worten $\Theta(A, B)$ zu $\Theta(B)$ paßt. Dies folgt aber nach (9.1) aus (9.5) und (9.4) unmittelbar.

§ 10. Die Wege $L(s_0)$, $A(s_0)$ und $D(s_0)$.

Wir nehmen von nun an, daß die Differenz der Zahlen α_2 und α_1 , die im § 2 bei der Charakterisierung von $\varphi(z)$ benutzt wurden, π übertrifft:

$$(10.1) \quad \alpha_2 - \alpha_1 > \pi.$$

Wir denken uns sodann gemäß den Vorschriften von § 3 den Weg $C = \overline{C}(t, \beta_1, \beta_2)$ konstruiert, wobei wir, wie dort ersichtlich, jetzt $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ voraussetzen und demgemäß auch die Kontur C einfacher mit $C(t, \beta)$ bezeichnen können. β genügt dann den Relationen

$$(10.2) \quad \text{Min} \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) > \beta > \text{Max} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right),$$

die aus (3.1) unmittelbar folgen.

Das offene Büschel der analytischen Richtungen zwischen $-\alpha_2 + \frac{\pi}{2}$ und $-\alpha_1 - \frac{\pi}{2}$ bezeichnen wir mit

$$(10.3) \quad W_0 = \left(-\alpha_2 + \frac{\pi}{2}, -\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Unter k verstehen wir eine beliebige positive, für sämtliche weiteren Betrachtungen fest angenommene Konstante.

Ist s_0 ein beliebiger Punkt der s -Ebene, so werden wir unter $L = L(s_0)$ im folgenden einen aus dem Unendlichen kommenden, im Punkt s_0 mündenden, sich selbst nicht überschneidenden und aus endlich vielen Strecken bestehenden Streckenzug verstehen (vgl. Fig. 6), der die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

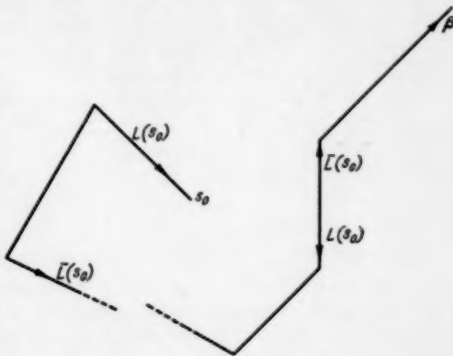


Fig. 6

W-Eigenschaft. Wird $L(s_0)$ im entgegengesetzten Sinne von s_0 aus durchlaufen und für diesen Durchlaufungssinn mit $\bar{L} = \bar{L}(s_0)$ bezeichnet, so soll die letzte, unendliche Teilstrecke von \bar{L} die analytische Richtung β haben. Werden sodann die analytischen Richtungen längs \bar{L} von dieser letzten Strecke aus regulär fortgesetzt (vgl. die Definition im § 9), so wird verlangt, daß alle so entstehenden analytischen Richtungen im Richtungsbüschel W_0 liegen.

k-Eigenschaft. Betrachtet man je zwei Strecken von L , die nicht aneinanderstoßen, so soll die Distanz von jedem Punkt der einen Strecke nach jedem Punkt der anderen stets größer sein als $2k$.

Was die W -Bedingung anbetrifft, so kann man sie auch so formulieren, daß die analytischen Richtungen längs L so festgelegt werden können, daß sie alle aus dem Richtungsbüschel W_0 weisen. Wollte man die analytischen Richtungen längs L selbst kennzeichnen, so könnte man dies so formulieren, daß, wenn die Richtung der ersten, unendlichen Strecke von L als $\beta + \pi$ oder $\beta - \pi$ festgelegt wird, dann die daraus durch reguläre Fortsetzung längs L entstehenden analytischen Richtungen im Büschel $W_0 + \pi$ bzw. $W_0 - \pi$ liegen.

Man überlegt sich leicht, daß, wenn für einen festen Weg L die k -Bedingung erfüllt ist, sie dann auch erfüllt bleibt, wenn k durch eine genügend benachbarte Zahl $t > k$ ersetzt wird.

Aus der k -Eigenschaft folgt insbesondere, daß die Länge jeder Seite von L , eventuell abgesehen von der letzten, in s_0 mündenden Seite, größer ist als $2k$.

Durchläuft nun s einen Weg L , so durchlaufen dann die Zahlen $u = s_0 - s$ einen Weg $\Lambda = \Lambda(s_0) = s_0 - L(s_0)$, der vom Unendlichen mit der analytischen Anfangsrichtung β herkommend in den Ursprung einmündet (vgl. Fig. 7). Die einzige unendliche Teilstrecke von Λ sei mit S_∞ bezeichnet. Wird S_∞ die analytische Anfangsrichtung β beigelegt und wird sodann die analytische Richtung längs Λ von β aus regulär fortgesetzt, so liegen sämtliche analytischen Richtungen längs Λ in W_0 .

Längs des sich nicht überschneidenden Weges Λ denke man sich die u -Ebene aufgeschnitten. Dann erhalten wir zwei Ufer von Λ , das obere und das untere, die zuerst längs der Strecke S_∞ , die ja mit der Richtung β in die rechte Halbebene weist, festgelegt und sodann sinngemäß längs Λ fortgesetzt werden, so daß also beim Durchlaufen von Λ im angegebenen Sinne, auf den Ursprung zu, das obere Ufer zur linken und das untere zur rechten Hand liegt. Wird sodann Λ vom Ursprung aus durchlaufen, also entgegengesetzt zum angegebenen Durchlaufungssinn, so legen wir längs des oberen Ufers dieses Schnittes die analytischen Richtungen so fest, daß sie aus den entsprechenden analytischen Richtungen von Λ durch Addition von π und längs des unteren Ufers dieses Schnittes derart, daß sie aus den entsprechenden analytischen Richtungen von Λ durch Subtraktion von π entstehen.

Man denke sich nun eine von 0 aus nach einem hinreichend weit entfernten Punkt von S_∞ gerichtete Strecke und lege ihr eine analytische Richtung bei, die entweder auf $\beta + \pi$ oder auf $\beta - \pi$ paßt, je nachdem ob ihr Endpunkt zum oberen oder unteren Ufer des Schnittes Λ gezählt wird. Läuft sodann der Endpunkt dieser gerichteten Strecke längs Λ stetig bis 0, so folgt aus dem Hilfssatz 9 (§ 9), daß sämtliche so entstehenden Richtungen im Richtungsbüschel $W_0 + \pi$ für das obere Ufer und in $W_0 - \pi$ für das untere Ufer liegen. In der Tat, die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes sind in unserem Falle erfüllt; denn errichtet man in einem hinreichend weit gelegenen Punkt B von S_∞ ein Lot auf S_∞ , so wird dieses Lot von Λ nur im Punkte B getroffen.

Wir können also sagen, daß wenn die beiden Punkte des Schnittes Λ durch Polarkoordinaten gekennzeichnet werden, dann bei der oben charakterisierten stetigen Fortsetzung der Amplituden die Amplituden aller Punkte des oberen Ufers in $W_0 + \pi$ und diejenigen aller Punkte des unteren Ufers in $W_0 - \pi$ liegen und insbesondere, wenn man längs dieser Ufer ins Unendliche geht, die Amplituden der Punkte des oberen Ufers nach $\beta + \pi$ und diejenigen des unteren Ufers nach $\beta - \pi$ konvergieren.

Damit ist zugleich auch in der ganzen längs Λ aufgeschnittenen Ebene G_A jedem Punkt eindeutig seine Amplitude derart zugeordnet, daß diese Amplitude eine stetige Funktion des Punktes von G_A ist und zugleich, wenn der allgemeine Punkt P des Gebietes G_A gegen einen Randpunkt auf dem oberen

oder unteren Ufer von Λ strebt, dann die Amplitude des Punktes P gegen den jenem Randpunkt nach der obigen Festlegung zugeordneten Amplitudenwert konvergiert. Wenn im folgenden von den Amplituden der Punkte des Gebietes G_Λ die Rede ist, ist darunter stets der soeben festgelegte Amplitudenwert zu verstehen.

Wir werden im folgenden S_∞ als die *erste* Seite von L und Λ , die direkt in 0 einmündende Seite als die *letzte* Seite und die unmittelbar vorhergehende als die *vorletzte* Seite von L und Λ bezeichnen. Alle anderen Seiten sollen *innere* Seiten von L und Λ genannt werden. Stoßen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Seiten S_i , S_{i+1} in einer Ecke P zusammen, so definieren sie dort zwei Winkelräume, von denen derjenige, der dem überstumpfen Winkel entspricht, als der *äußere Winkelraum* oder das *Äußere* des zugehörigen Winkels und der andere als der *innere Winkelraum* oder das *Innere* des zugehörigen Winkels bezeichnet werden soll.

Die Eigenart der k -Eigenschaft bringt es mit sich, daß ein Weg $L(s_0)$ durchaus nicht immer über s_0 hinaus so fortgesetzt werden kann, daß er diese Eigenschaft beibehält. Denn es könnte sein, daß die letzte Wegstrecke bei weiterer Fortsetzung, noch bevor sie die Länge $2k$ erreicht, an eine andere Seite des Weges auf die Distanz $\leq 2k$ herankommt. Dagegen ist es klar, daß, wenn s_1 ein Punkt auf $L(s_0)$ ist und wir dann das ganze Stück des Weges zwischen s_1 und s_0 weglassen, ein Weg $L(s_1)$ entsteht, der wiederum die k -Eigenschaft besitzt. Wir werden einen solchen Weg $L(s_1)$ als einen *Teilweg* von $L(s_0)$ bezeichnen. Ist der s_1 entsprechende Punkt auf $\Lambda(s_0)$ etwa u_1 , so entsteht dann $\Lambda(s_1)$, indem das Stück von $\Lambda(s_0)$ zwischen u_1 und 0 weggelassen und das übrige Stück so parallel verschoben wird, daß der Punkt u_1 in den Ursprung hineinrückt.

Wir betrachten nunmehr einen wie oben gebildeten Weg $\Lambda = \Lambda(s_0)$. Es sei t eine Zahl $> k$ derart, daß für Λ auch noch die t -Bedingung erfüllt ist. Man denke sich jetzt eine Kreisscheibe vom Radius t mit ihrem Mittelpunkt auf Λ aufgesetzt und diesen Mittelpunkt längs Λ von ∞ bis 0 bewegt. Dann fegt diese Kreisscheibe einen „Streifen“ Π aus, dessen innere Punkte ein Gebiet Λ bilden und dessen Berandung eine „Parallelkurve“ zu Λ ist. Diese „Parallelkurve“ bezeichnen wir nun als $D = D(s_0)$ (vgl. Fig. 7)¹¹⁾.

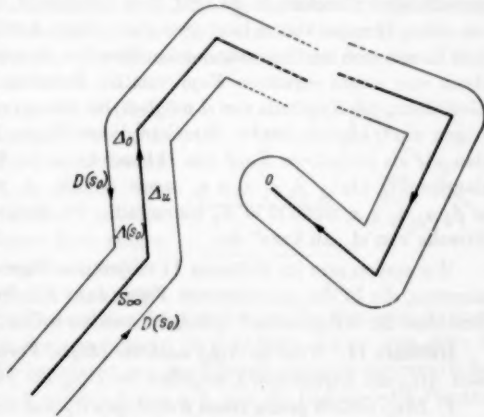


Fig. 7

¹¹⁾ Eigentlich ist die „Randkurve“ $D(s_0)$ unseres Streifens im allgemeinen nur ein Teil der Parallelkurve zu Λ , wie sie differentialgeometrisch definiert wird.

Aus der obigen Definition von D folgt leicht der

Hilfssatz 10. *Ist P ein Punkt von $A(s_0)$, so liegen im Innern der Kreislinie um P mit dem Radius t keine Punkte von $D(s_0)$. Ist Q ein Punkt von $D(s_0)$, so liegen innerhalb der Kreislinie um Q mit dem Radius t keine Punkte von $A(s_0)$, während diese Kreislinie $A(s_0)$ trifft.*

Beweis. Jeder innere Punkt einer Kreisscheibe mit dem Radius t um einen Punkt von A ist zugleich ein innerer Punkt von Π und kann daher nicht zu D gehören. Es sei nun Q ein Punkt von D und K eine Kreislinie mit dem Radius t um Q . Würde ein Punkt P von A innerhalb von K liegen, so wäre Q innerhalb einer entsprechenden Kreisscheibe um P enthalten, was, wie soeben gezeigt wurde, unmöglich ist.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß K und A sich treffen. Wäre dies aber falsch, so müßte es, da A im Endlichen abgeschlossen ist, eine Kreisscheibe um Q mit dem Radius $t + \delta$, $\delta > 0$, geben, in der kein Punkt von A liegt. Zeichnen wir daher eine Kreislinie κ um Q mit dem Radius δ , so haben die inneren Punkte von κ von jedem Punkte von A einen Abstand $> t$ und gehören daher sicherlich nicht zur Menge Π . Dies bedeutet aber, daß Q weder zu Π gehört, noch eine Häufungsstelle von Punkten von Π ist und daher nicht zu D gehören kann.

11. Die Kontur $D(s_0)$.

Die Kontur $D(s_0)$ sieht, wie noch im einzelnen begründet werden soll, wie in der Fig. 7 (des § 10) aus. Allerdings ist dabei der „Kopfteil“ von D , bestehend aus einem Kreisbogen um O und den beiden in diesen Kreisbogen einmündenden geradlinigen Strecken, in der Fig. 7 so dargestellt, wie er sich ausbildet, wenn die letzte Strecke von A lang genug ist. Dann berühren nämlich die beiden in den Kreisbogen um O einmündenden Strecken diesen Kreisbogen. Wir sprechen dann von einem *regulären Kopf* von D . Daneben ist aber noch eine andere Gestaltung des Kopfteils von A möglich, bei der nur eine der beiden in den Kreisbogen um O einmündenden Strecken diesen Bogen berührt. Ein solcher Kopf, den wir als *singulären Kopf* von D bezeichnen, ist in der Fig. 10 (siehe S. 33) dargestellt, als $\gamma \beta_1 \alpha_1 \alpha_0 \alpha \sigma$, wenn O mit A_1 zusammenfällt, oder auch $\gamma \beta_2 \alpha_2 \alpha_0 \alpha \sigma$, wenn O in A_2 hineinfällt. Er bildet sich aus, wenn die letzte Strecke von A „zu kurz“ ist.

Wir stellen nun im Hilfssatz 11 diejenigen Eigenschaften der Kontur D zusammen, die in der gezeichneten Figur zum Ausdruck kommen und aus dem Bestehen der t -Eigenschaft gefolgert werden sollen:

Hilfssatz 11. *Wird zu $A(s_0)$ nach der obigen Vorschrift $D(s_0)$ gebildet und besitzt $A(s_0)$ die Eigenschaft t , so gelten für $D(s_0)$ die folgenden Tatsachen:*

I. $D(s_0)$ enthält genau einen Kreisbogen C_D mit dem Radius t um O , durch den dann $D(s_0)$ in zwei getrennte Zweige zerlegt wird.

II. Zu jeder Seite von $A(s_0)$, bis eventuell auf die letzte, enthält $D(s_0)$ zwei zu ihr parallele geradlinige Strecken auf beiden Seiten im Abstand t , die zu verschiedenen Zweigen von $D(s_0)$ gehören. Nur im Falle der letzten Seite, wenn der Kopf von $D(s_0)$ singulär ist, gibt es zu dieser Seite nur eine ihr parallele geradlinige Strecke von $D(s_0)$.

III. Stoßen zwei aufeinanderfolgende Seiten S, S' von $\Lambda(s_0)$, von denen keine die letzte ist, in einer Ecke P zusammen, so werden die zu S und S' parallelen Strecken von $D(s_0)$ im Äußeren des Winkels in P durch einen Kreisbogen um P vom Radius t verbunden, der von der Normalen zu S im Punkte P zur Normalen zu S' im Punkte P verläuft. Im Inneren des Winkels in P treffen sich dagegen die zu S und S' parallelen Strecken in einem Punkte, der auf der Winkelhalbierenden des Winkels in P liegt.

IV. $D(s_0)$ ist doppelpunktfrei.

Va. Ist Q eine Ecke von $D(s_0)$, in der zwei Teilstrecken von $D(s_0)$ aneinanderstoßen, so liegen auf der Kreislinie um Q mit dem Radius t genau zwei Punkte P_1, P_2 von $\Lambda(s_0)$, in denen zwei aufeinanderfolgende Strecken von $\Lambda(s_0)$ jene Kreislinie berühren und zugleich liegt Q im Inneren des von diesen beiden Strecken von $\Lambda(s_0)$ gebildeten Winkels mit dem Scheitel in E .

Vb. Ist Q ein Punkt von $D(s_0)$, der auf einem Teilkreisbogen von $D(s_0)$ liegt, sofern

dieser Kreisbogen nicht zum Mittelpunkt O gehört, so liegt auf der Kreislinie um Q mit dem Radius t genau ein Punkt P von $\Lambda(s_0)$, und zwar ist P eine solche Ecke von $\Lambda(s_0)$, daß Q im Äußeren des zugehörigen Winkels liegt.

Beweis. Es sei CD eine innere Seite von Λ und CB und DE die anstoßenden Seiten. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob die inneren Winkelräume an C und an D auf der gleichen Seite von CD liegen (Fig. 8) oder auf verschiedenen Seiten (Fig. 9). Wir befassen uns zuerst mit dem ersten Fall.

Wir ziehen in C und D die Winkelhalbierenden bis zu ihrem Schnittpunkt U (siehe Fig. 8) und zeigen zunächst, daß U von CD einen Abstand $> t$ hat. Zu diesem Zweck fallen wir von U aus die Lote auf die Strecken CD, CB, DE oder auf ihre Verlängerungen. Die Fußpunkte dieser Lote mögen entsprechend mit α, β, ϵ bezeichnet werden. Die drei Strecken $U\alpha, U\beta, U\epsilon$ sind gleich lang. Wäre $U\alpha \leq t$, so wäre die Distanz $\beta\epsilon \leq 2t$, so daß wegen der Eigenschaft t einer der Fußpunkte β, ϵ nicht in der zugehörigen Strecke liegt. Es sei nun etwa B zwischen β und C gelegen. Wir benutzen nun das folgende elementargeometrische

Lemma. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c ist die Distanz jedes Punktes der Seite a von der Seite b höchstens gleich der Seite c ¹²⁾.

¹²⁾ Man beachte wohl, daß in dieser Formulierung nicht die Distanz von der Geraden b , sondern diejenige von der Strecke b gemeint ist. Der detaillierte Beweis des Lemmas verläuft z. B. wie folgt: Ist B die b gegenüberliegende Ecke, so erreicht man längs a die größte Distanz der Punkte von a von der Strecke b in B , wie man sich an Hand der Figuren sofort überlegt. Die Distanz von B nach b ist aber entweder gleich c oder gleich dem Lot von B auf die Strecke b . In diesem zweiten Falle ist aber dieses Lot höchstens gleich c .

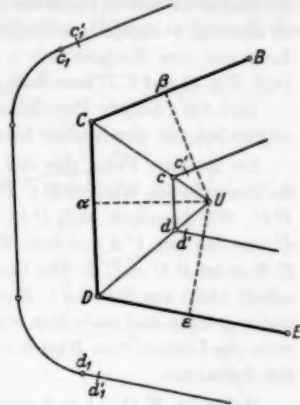


Fig. 8

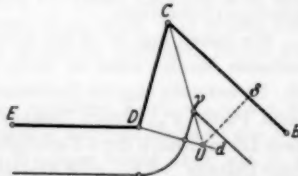


Fig. 9

Daraus folgt, daß der Punkt B von der Strecke αC höchstens die Distanz von α nach β hat, also $\leq 2t$ wäre, während, da B auch einer an CD nicht anstoßenden Seite angehört, die Distanz CB größer als $2t$ sein muß.

Daher ist $\alpha U > t$ und die „innere Parallelkurve“ zu $BCDE$ verläuft wie in der Fig. 8 angegeben. Zugleich liegen offenbar die Fußpunkte der beiden Lote von den Endpunkten c, d der darin enthaltene Parallelstrecke zu CD (vgl. Fig. 8) auf CD innerhalb der Strecke CD .

Daß die „äußere Parallelkurve“ zu $BCDE$ so verläuft wie in der Fig. 8 angegeben, ist unmittelbar klar.

Im zweiten Falle, der der Fig. 9 entspricht, verlängere man die Winkelhalbierende des Winkels DCB bis zum Schnittpunkt U mit dem Lote Dd auf DC . Wir beweisen, daß $DU > t$ ist. Denn wäre $DU \leq t$ und fällt man von U aus das Lot $U\delta$ mit dem Fußpunkt δ auf CB oder die Verlängerung von CB , so ist $DU = U\delta$. Die Distanz $D\delta$ wäre $\leq 2t$, so daß δ wegen der t -Eigenschaft nicht zur Strecke CB gehören könnte. Dann wäre aber B zwischen C und δ gelegen und nach dem obigen Lemma, angewandt auf das Dreieck $D\delta C$, wäre die Distanz von B nach CD kleiner oder gleich $D\delta$, also $\leq 2t$, entgegen der Annahme.

Daher ist $UD > t$ und eine Parallele zu CD im Abstand t nach der Seite von U beginnt in einem inneren Punkt der Strecke DU und läuft bis zu einem Punkt γ auf der Winkelhalbierenden CU , wo sie die Parallele zur Strecke CB trifft. Daß aber der Anschluß der Parallelen zu CD an die Parallelstrecke zu ED über einen Kreisbogen mit dem Radius t um D erfolgt, wie in der Fig. 9 angegeben, ist unmittelbar klar, so daß die Figur damit den Verlauf des betreffenden Stückes der „unteren Parallelen“ zu $BCDE$ richtig wiedergibt. Zugleich liegt offenbar der Fußpunkt des Lotes von γ auf CD innerhalb dieser Strecke. Die Verhältnisse bei der „oberen Parallelkurve“ sind natürlich vollständig symmetrisch.

Wir lassen nun in A den Streckenzug $BCDE$ weg und schließen die entstehende Menge, wenn es nötig ist, durch Hinzufügung der Punkte B und E ab. So entsteht eine im Endlichen abgeschlossene Punktmenge A' . A' enthält einen Punkt P_0 , dessen Distanz von der Strecke CD ein Minimum ist. Da diese Distanz nach der t -Eigenschaft $> 2t$ ist, gibt es eine positive Zahl δ , so daß diese Distanz $> 2t + \delta$ ist und daher jeder Punkt von A' von jedem Punkt von CD eine Distanz $> 2t + \delta$ hat.

Gehen wir nunmehr längs der in Fig. 8 gezeichneten Parallelkurve zu $BCDE$ auf der inneren Seite über c und d bis c' und d' und auf der äußeren Seite über c_1 und d_1 bis c'_1 und d'_1 hinaus und wählen wir die vier Punkte c', d', c'_1, d'_1 so, daß ihre Distanzen bzw. von c, d, c_1, d_1 kleiner als δ sind, so hat jeder Punkt von A' von den Bögen $c'cd d'$ und $c'_1 c_1 d_1 d'_1$ eine Distanz $> t$, so daß also diese Bögen unverändert in D übergehen und alle Punkte von D erschöpfen, die in der t -Distanz von der Strecke CD und der unmittelbaren Nachbarschaft ihrer Endpunkte liegen. Im Falle der Fig. 9 verläuft diese Überlegung ganz analog, und ebenso schließt man, wenn CD die erste Seite von A ist, wobei allerdings die Figur etwas abzuändern wäre, da die Strecke DE wegfällt.

Damit ist die Behauptung III unseres Hilfssatzes bewiesen und ebenso die Behauptung II, insofern sie sich nicht auf die vorletzte oder letzte Seite bezieht.

Ferner folgt aus dem oben über die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten c, d bzw. γ von $D(s_0)$ auf die zugehörigen Strecken gesagten die Richtigkeit der Behauptung von V a, wenn man noch den Hilfssatz 10 und die t -Eigenschaft berücksichtigt.

Was die Behauptung von V b betrifft, so ergibt sie sich aus der Betrachtung der Fig. 8 und 9 unter Berücksichtigung des Hilfssatzes 10 und der t -Eigenschaft unmittelbar.

Wir betrachten nunmehr die Konfiguration CBO der vorletzten und letzten Seite von $A(s_0)$. Hier handelt es sich vor allem um die Konfiguration im Innern des Winkels CBA_3 , die wir uns, unbeschadet der Allgemeinheit, wie in der Fig. 10 orientiert denken. Wie aus der oben durchgeführten Betrachtung folgt, beginnt die zur Seite CB parallele Strecke, die im Innern von CBA_3 verläuft, in einem Punkte γ , der entweder auf der Winkelhalbierenden von DCB liegt (dieser Fall ist in der Fig. 10 gezeichnet) oder auf dem Lot zu CB im Punkte C . Diese Parallele wird nun fortgesetzt bis sie die Parallelkurve zur Strecke BA_3 trifft. Wir wollen hier die sukzessive Entwicklung des zugehörigen Kopfteils verfolgen, indem wir O von B aus auf A_3 zu stetig laufen lassen.

Fällt O mit B zusammen, so haben wir einen regulären Kopf $\gamma \beta_0 \alpha_0 \alpha \sigma$, da dann die betrachtete Parallele zu CB die Kreislinie mit dem Radius t um B in einem Punkte β_0 berührt. Rückt dann O aus B heraus, bleibt aber, wie A_1 in der Fig. 10, genügend nah bei B , so trifft die Kreislinie um A_1 mit dem Radius t die Parallele zu CB in einem Punkte β_1 , dessen Distanz von der Geraden durch BA_2 kleiner als t bleibt. So ergibt sich der singuläre Kopf $\gamma \beta_1 \alpha_1 \alpha_0 \alpha \sigma$, der insbesondere eine einzige zu BA_1 parallele Strecke $\alpha_1 \alpha_0$ enthält.

Ein singulärer Kopf bildet sich solange aus, bis O in einen Punkt A_2 auf BA_3 hineingelangt, mit der Eigenschaft, daß die Kreislinie um A_2 mit dem Radius t die Parallele zu CB in einem Punkte β_2 schneidet, der zugleich auf der Winkelhalbierenden des Winkels CBA_3 liegt. Hier hat man den „Grenzfall“ des singulären Kopfes in $\gamma \beta_2 \alpha_2 \alpha_0 \alpha \sigma$, der wiederum in $\alpha_2 \alpha_0$ eine einzige zu BA_2 parallele Strecke enthält.

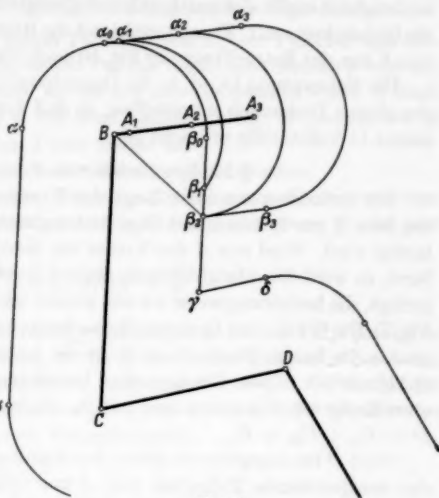


Fig. 10

Sobald O über A_2 hinausgeht, berührt die Kreislinie um O mit dem Radius t die Parallele zu BA_3 durch β_2 , so daß z. B. für $O = A_3$ sich nunmehr ein regulärer Kopf $\beta_2 \beta_3 \alpha_0 \alpha$ herausgebildet hat, der jetzt zwei zu BA_3 parallele Teilstrecken enthält, nämlich $\beta_2 \beta_3$ und $\alpha_3 \alpha_0$.

Damit ist auch die Behauptung II unseres Hilfssatzes vollständig bewiesen, und zugleich ergibt sich aus den als einzig möglich erwiesenen Gestalten des Kopfes die Richtigkeit von I. Ebenso ergibt sich die Richtigkeit der beiden Behauptungen von V aus der Betrachtung der Fig. 10 auch für die beiden letzten Seiten von Λ .

Die Behauptung IV, d. h. die Doppelpunktfreiheit von $D(s_0)$, folgt aber aus, der obigen Diskussion unmittelbar, so daß damit der Beweis des ganzen Hilfssatzes 11 vollständig erbracht ist.

§ 12. Regularität von $\Phi(u)$ längs $D(s_0)$.

Wir definieren nunmehr längs der Kontur $D(s_0)$ einen Durchlaufungssinn bei dem Λ zur linken Hand liegt und insbesondere O im positiven Sinne umlaufen wird. Wird aus Λ das Innere des Kreises um O mit dem Radius t entfernt, so wird das übrigbleibende Gebiet durch Λ in zwei Teilstücke Λ_u und Λ_o zerlegt, die beziehungsweise an das untere und obere Ufer von Λ anstoßen (vgl. Fig. 7). Die Stücke von D , die zur Berandung von Λ_u bzw. von Λ_o gehören, sind nun gerade die beiden Zweige von D , in die dieser Weg nach I des Hilfssatzes 11 (§ 11) zerfällt. Diese Zweige sollen beziehungsweise der *untere Zweig* und der *obere Zweig* von D genannt und mit D_u , D_o bezeichnet werden. Wir haben dann $D = D_u + D_o + D_c$.

Wird D im angegebenen Sinne durchlaufen, so liegt längs der beiden Zweige das entsprechende Teilgebiet von Λ zur linken Hand und ebenso Λ . Wird dagegen Λ in dem dazugehörigen Sinne (also auf 0 zu) durchlaufen, so liegt dabei Λ_u und damit D_u zur rechten Hand und Λ_o mit D_o zur linken.

Es sei nun der Punkt Q in der Behauptung V des Hilfssatzes 11 (§ 11) ein Punkt von D_u . Dann wird im Falle Va in den dort benutzten Bezeichnungen das Teilstück $P_1 E P_2$ von Λ entsprechend dem Durchlaufungssinne längs Λ (auf 0 zu) so durchlaufen, daß Λ_u rechts liegt und Q im negativen Sinne umkreist wird. Ebenso folgt im Falle der Konfiguration Vb, daß die beiden in P zusammenstoßenden Strecken von Λ so durchlaufen werden, daß dabei Λ_u und die ganze Kreislinie um Q mit dem Radius t zur rechten Hand liegt. — Q wird also auch hier im negativen Sinne „umlaufen“.

Der Weg D liegt offenbar in dem im § 10 definierten Gebiet G_A und die Argumente der Punkte von D sollen im folgenden als die nach der Festlegung im § 10 ihnen in G_A zugeordneten Argumente definiert werden. Wir wollen beweisen, daß dann D auf dem Riemannschen Flächenstück $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ liegt, wie es in § 2 definiert wurde und durch die drei Teilgebiete (2.8a), (2.8b) und (2.8c) beschrieben wird. Danach setzt sich $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ aus den folgenden drei Teilstücken zusammen:

$$\begin{aligned} \Gamma_i: & \quad |u| > k, \quad -\alpha_2 < \arg u < -\alpha_1, \\ \Gamma_o: & \quad \Re u e^{i\alpha_1} > k, \quad -\alpha_1 \leq \arg u < -\alpha_1 + \frac{\pi}{2}, \\ \Gamma_u: & \quad \Re u e^{i\alpha_1} > k, \quad -\alpha_2 - \frac{\pi}{2} < \arg u \leq -\alpha_2. \end{aligned}$$

Wir führen zuerst den Beweis für D_u aus. Für D_o verläuft er durchaus symmetrisch und für C_D wird er sodann nachgetragen. Längs des unteren Ufers von Λ liegen, wie schon früher hervorgehoben, die Argumente aller Punkte in $W_0 - \pi$, also in

$$\left(-\alpha_2 - \frac{\pi}{2}, -\alpha_1 - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Nun liegt in der t -Distanz von jedem Punkt Q von D_u ein Punkt P des unteren Ufers von Λ , derart daß die beiden Punkte durch eine Strecke σ von der Länge t verbunden werden können, die bis auf ihre Endpunkte weder Λ noch D trifft. Trifft σ den Kreis um O mit dem Radius t nicht, so nennen wir Q einen Punkt erster Art, sonst einen Punkt zweiter Art.

Wir machen nun Gebrauch von dem elementargeometrischen

Lemma. *Liegt eine Strecke σ der Länge t außerhalb eines Kreises mit dem Radius t , so erscheint sie vom Mittelpunkt des Kreises unter einem Winkel, der kleiner ist als*

$$\arctg \frac{4}{3} = 53^\circ 07' 48'' < \frac{\pi}{2}.$$

Zum Beweis fälle man das Lot l vom Kreismittelpunkt aus auf σ und bezeichne die Längen der beiden Teilstrecken, in die σ durch den Fußpunkt des Lotes zerlegt wird, mit $(t/2) + \alpha$ und $(t/2) - \alpha$, $\alpha \geq 0$, wobei, wenn der Fußpunkt außerhalb von σ liegt, $(t/2) - \alpha$ negativ wird. Dann wird σ vom Mittelpunkt aus unter einem Winkel gesehen, dessen Tangens gleich

$$\frac{\frac{(t/2) + \alpha}{l} + \frac{(t/2) - \alpha}{l}}{1 - \frac{(t/2) + \alpha}{l} \frac{(t/2) - \alpha}{l}} = \frac{2}{(2l/t) - (t/2l) + (2\alpha^2/tl)}$$

ist. Dies wird für feste t und $l > t$ am größten für $\alpha = 0$ und liefert dann, $t/2l = u$ gesetzt, $2/\left(\frac{1}{u} - u\right)$. Wegen $u < \frac{1}{2}$ ist aber der letzte Ausdruck $< \frac{4}{3}$, wie behauptet.

Ist Q ein Punkt erster Art, so folgt aus dem obigen Lemma, daß das Argument von Q auf jeden Fall $< -\alpha_1 - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\alpha_1 - \pi$ ist.

Ist aber Q ein Punkt zweiter Art, ohne auf C_D zu liegen, so ist $|OP| < 2t$, so daß wegen der t -Eigenschaft P auf der letzten oder vorletzten Seite von Λ liegen muß. Aus dem Hilfssatz 11 (§ 11) und aus den Gestalten des Kopfes in den Fig. 7 und 10 folgt aber, daß der Radiusvektor von O nach P , wenn P längs PQ nach Q rückt, sich im positiven Sinne um O dreht, und zwar um weniger als π . In der Tat trifft PQ den Punkt O nicht, da sonst $|QO| < t$ wäre. Daher gilt für einen solchen Punkt Q :

$$(12.1) \quad \arg P \leq \arg Q < \arg P + \pi < -\alpha_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Ist endlich $|OQ| = t$, so daß Q gerade der auf D_u liegende Punkt von C_D ist, so folgt aus der Betrachtung der Fig. 7 und 10 wiederum, daß das Argument des Punktes Q den Argumentwert längs der letzten Seite von Λ

übertrifft, aber um weniger als π . Wir sehen, daß für jeden Punkt Q zweiter Art die Relation (12.1) gilt, unter P ein geeigneter Punkt des unteren Ufers von A verstanden.

Wir sehen, daß der Bereich Γ_0 bei der Betrachtung von D_u nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Wir haben uns also nur noch mit der Möglichkeit auseinanderzusetzen, daß die Argumente der Punkt von D_u entweder im Intervall $\left(-\alpha_2 - \frac{\pi}{2}, -\alpha_2\right)$ liegen, ohne in Γ_u zu liegen, oder daß ihre Argumente $\leq -\alpha_2 - \frac{\pi}{2}$ sind.

Wir zeichnen nun den Grenzhalfstrahl $Z_1 Z'_1$ von Γ_u , wobei wir zugleich die Figur so gedreht denken, daß dieser Grenzstrahl horizontal nach links ins Unendliche geht, und zeichnen zugleich die beiden parallelen Halbstrahlen $Z_2 Z'_2$ und $Z_3 Z'_3$ durch die Punkte auf der Kreisperipherie mit den Amplituden $-\alpha_2 - \frac{\pi}{2}$ und $-\alpha_2 - \pi$ (vgl. Fig. 11). Z_1, Z_2, Z_3 sollen die Treffpunkte dieser Halbstrahlen mit dem Kreis $|u| = k$ sein. Wir bezeichnen nun den Halbstreifen zwischen den beiden Halbstrahlen $Z_1 Z'_1$ und $Z_3 Z'_3$ und dem Halbkreis $Z_1 Z_2 Z_3$, der im Endlichen als abgeschlossen betrachtet werden soll, mit S^* . Dann wird unsere Behauptung über D_u bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß kein Punkt von D_u in S^* liegt. In der Tat sind längs A die Argumente $> -\alpha_2 - \frac{\pi}{2}$, so daß diese Punkte von A „unterhalb“ des Halbstrahls $Z_3 Z'_3$ liegen. Ist nun Q ein Punkt erster Art auf D_u , so muß Q nach dem Obigen auf jeden Fall „unterhalb“ $Z_3 Z'_3$ liegen. Ist aber Q ein Punkt zweiter Art auf D_u , so ist $\arg Q$ größer als das Argument eines geeigneten Punktes des unteren Ufers von A . Daher liegt Q sogar „unterhalb“ $Z_1 Z'_1$.

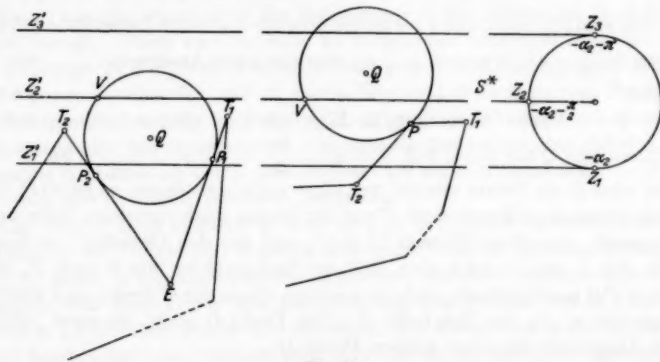


Fig. 11

Es sei nun Q ein Punkt von D_u , der in S^* liegt. Ist dieser Punkt innerhalb einer geradlinigen Teilstrecke von D_u enthalten, so ist sicher einer der beiden Endpunkte dieser Strecke auch noch in S^* enthalten. Wir können daher von vornherein annehmen, daß Q entweder ein Eckpunkt von D_u ist, durch den zwei

geradlinige Teilstrecken von D_u hindurchgehen (*erster Fall*) oder auf einem der Teilkreisbogen von D_u liegt (*zweiter Fall*).

Wir betrachten zuerst den *ersten Fall* und legen um Q eine Kreislinie mit dem Radius t , die nach dem im Hilfssatz 11 (§ 11) unter Va bewiesenen von zwei Teilstrecken ET_1 und ET_2 von A in P_1 bzw. P_2 berührt wird, wobei E eine Ecke von A ist und P_1 und P_2 auf den zugehörigen Strecken ET_1 , ET_2 liegen (vgl. Fig. 11). Es ist leicht zu sehen, daß diese Punkte sogar im Inneren der zugehörigen Strecken ET_1 , ET_2 liegen. Denn wäre etwa $P_1 = T_1$, so wäre die Distanz von T_1 nach einem Punkt der Strecke ET_2 nicht größer als $2t$, im Widerspruch mit der t -Eigenschaft. Dabei sollen beim Streckenzug $T_1 P_1 E P_2 T_2$ die Bezeichnungen so gewählt werden, daß er beim festgelegten Durchlaufungssinn von D_u von T_1 über E nach T_2 durchlaufen wird. Dann wird, wie oben (S. 34) festgestellt wurde, Q im negativen Sinne umlaufen, so daß die Verhältnisse im linken Teil der Fig. 11 richtig wiedergegeben sind.

Wir trennen nun den Weg A durch die Wegnahme der Teilstrecke $P_1 T_2$ in zwei Teilwege, von denen der eine, von ∞ herkommende und bis P_2 gehende, mit A_∞ und der andere, von T_2 nach O laufende, mit R bezeichnet werden soll. Den Weg A_∞ setzen wir vom Punkte P_2 aus längs eines im negativen Sinne durchlaufenen Kreisbogens der gezeichneten Kreislinie um Q bis zu demjenigen zuerst angetroffenen Schnittpunkt V dieses Kreises mit dem Halbstrahl $Z_2 Z'_2$, der weiter nach links liegt, fort. Man beachte, daß dieser Kreisbogen von unten nach oben läuft, da ja der Punkt P_2 als ein Punkt von A unterhalb $Z_2 Z'_2$ liegt. Von V aus gehe man nach links längs des Halbstrahls $Z_2 Z'_2$ ins Unendliche. Der so entstehende Weg K überschneidet sich nicht, da A den Halbstrahl $Z_2 Z'_2$ nicht trifft, und läuft nach beiden Seiten ins Unendliche, so daß er die Riemannsche Fläche von $\lg z$, die einfach zusammenhängend ist, in zwei getrennte Teilgebiete zerschneidet. Man erkennt aber aus unser Fig. 11 unmittelbar, daß Z_2 und damit auch O einerseits und T_2 andererseits auf *verschiedenen Seiten* des Weges K liegen. Da aber T_2 mit O längs des Restweges R zusammenhängt, der K nicht mehr trifft, ergibt sich ein Widerspruch, so daß der erste Fall unmöglich ist.

Im *zweiten Falle* wird der um Q mit dem Radius t gelegte Kreis, nach dem im Hilfssatz 11 (§ 11) unter Vb Gesagten, von A in einer Ecke P berührt, in der zwei Teilstrecken $T_1 P$ und $P T_2$ zusammenstoßen. Wählen wir hier die Bezeichnungen so, daß bei festgelegtem Durchlaufungssinne von A wir von T_1 über P nach T_2 gehen, so bleibt dabei die Kreisscheibe um Q zur rechten Hand, wie im Anschluß an den Beweis des Hilfssatzes erläutert wurde, so daß die Verhältnisse in unserer Fig. 11 richtig wiedergegeben sind.

Wir bezeichnen nun den von ∞ herkommenden und bis P laufenden Teil von A mit A_∞ und den von T_2 nach O laufenden Teil mit R . A_∞ setzen wir über P fort, indem wir längs der Kreislinie um Q im negativen Sinne bis zum linken Schnittpunkt V dieser Kreislinie mit $Z_2 Z'_2$ weitergehen und sodann von V aus längs des Halbstrahls $V Z'_2$ nach links ins Unendliche gehen. Der sich so ergebende doppelpunktfreie Weg K trennt wiederum die Riemannsche Fläche von $\lg z$; und von hier aus ergibt sich ein Widerspruch, genau wie im ersten

Falle, da T_2 und O auf verschiedenen Seiten von K liegen und andererseits längs des Weges R zusammenhängen, der K nicht trifft.

Fassen wir nunmehr C_D ins Auge und bezeichnen den Anfangs- und Endpunkt von C_D mit Q_u und Q_o , wobei Q_u zu D_u und Q_o zu D_o gehört, so gehören Q_u und Q_o zu $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$. Da aber C_D im positiven Sinne durchlaufen wird, gehört dann nach der im § 2 S. 9 hervorgehobenen Eigenschaft von $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ auch der ganze Bogen C_D zu $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$.

Damit ist bewiesen, daß $D(s_0)$ auf $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ liegt, und da $\Gamma(k, \alpha_1, \alpha_2)$ im Definitionsgebiet von $\Phi(u)$ liegt, erhalten wir den

Hilfssatz 12. Durch die im § 11 definierte Kontur $D(s_0)$ wird die Ebene in zwei Teilgebiete Δ, Δ' getrennt, von denen Δ den Ursprung O enthält. Die im § 2 definierte Funktion $\Phi(u)$ ist regulär auf $D(s_0)$ und in Δ' .

§ 13. $D^*, D(s_1), H_0$ und H_1 .

Im obigen wurde $D(s_0)$ unter Benutzung einer Zahl $t > k$ konstruiert, derart, daß längs $L(s_0)$ auch noch die t -Bedingung erfüllt ist. Ist t so gewählt, so kann man eine positive Zahl δ so wählen, daß $t^* = t + 2\delta$ gesetzt, längs $L(s_0)$ auch noch die t^* -Bedingung erfüllt ist. Mit Hilfe dieses t^* konstruieren wir nun analog zu $D(s_0)$ eine Kontur D^* , indem wir eine Kreisscheibe vom Radius t^* mit ihrem Mittelpunkt längs $\Lambda(s_0)$ gleiten lassen, und bezeichnen deren „inneres“, $\Lambda(s_0)$ enthaltendes Gebiet, mit Δ^* . Wird die Menge $\Delta^* - \Delta_0$ durch Hinzufügung ihrer im Endlichen liegenden Häufungsstellen im Endlichen abgeschlossen, so ergibt sich eine „hufeisenförmige“ Menge H_0 . H_0 enthält insbesondere zwei unendliche Halbparallelstreifen, die wir als das obere bzw.

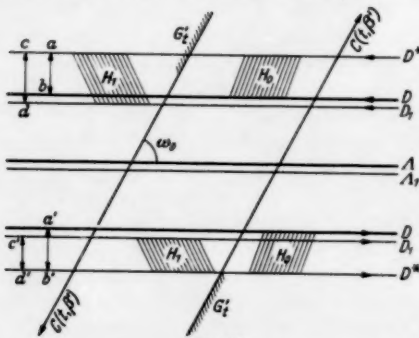


Fig. 12

untere Knie von H_0 bezeichnen wollen, je nachdem ihre Berandung ein Stück von D_o oder von D_u enthält. (Vgl. Fig. 12, die so orientiert ist, daß die Richtung β horizontal nach rechts weist).

Wir wählen eine positive Zahl $\eta < \min(\delta, t/3)$ und einen Punkt s_1 auf der letzten in s_0 einmündenden Strecke von $L(s_0)$, dessen Distanz von s_0 die Zahl η nicht überschreitet (s_1 kann auch die „vorletzte“ Ecke von $L(s_0)$ sein). Lassen wir dann die

Strecke von s_1 nach s_0 aus $L(s_0)$ weg, so entsteht der Weg $L(s_1)$, der die analogen Eigenschaften wie $L(s_0)$ besitzt. Dazu bilden wir sodann $\Lambda_1 = \Lambda(s_1)$ und $D(s_1)$ nach den Vorschriften von § 10, unter Zugrundelegung der gleichen Größe t , wie bei der Bildung von $D(s_0)$.

Man beachte, daß $\Lambda(s_1)$ aus $\Lambda(s_0)$ entsteht, indem man vom Endpunkt von $\Lambda(s_0)$ ab ein geeignetes geradliniges Stück von der Länge $\leq \eta$ wegschneidet und den übrigbleibenden Weg parallel mit sich selbst um eine Strecke $\leq \eta$ ver-

schiebt, so daß er mit seinem Endpunkt wiederum in den Ursprung hineingelangt. Daher hat jeder Punkt von $\Lambda(s_1)$ von einem geeigneten Punkt von $\Lambda(s_0)$ eine Distanz $\leq \eta$ und umgekehrt.

Bezeichnen wir nun das analog zu Λ zu definierende „innere“ Gebiet von $D(s_1)$ mit Δ_1 , so behaupten wir nun, daß Δ_1 den Weg $\Lambda(s_0)$ im Inneren enthält. In der Tat gehört zu jedem Punkt P_0 von $\Lambda(s_0)$ ein Punkt P_1 von $\Lambda(s_1)$, so daß die Distanz $|P_0 P_1| \leq \eta$ ist und daher P_0 innerhalb der um P_1 gelegten Kreisscheibe mit dem Radius η liegt. Daher liegt P_0 in Δ_1 . Andererseits ist leicht zu sehen, daß $D(s_1)$ vollständig in Δ^* , im „Innengebiet“ von D^* liegt. Denn ist Q ein Punkt von $D(s_1)$, so liegt er in der Distanz $\leq t$ von einem Punkt von $\Lambda(s_1)$ und daher in der Distanz $\leq t + \eta \leq t + \delta < t^*$ von einem Punkt von $\Lambda(s_0)$.

Bilden wir nun die Menge $\Delta^* - \Delta_1$ und ergänzen sie durch Hinzufügung ihrer im Endlichen liegenden Häufungsstellen, so erhalten wir eine „hufeisenförmige“ Menge H_1 , die ähnlich wie H_0 zwei unendliche Halbparallelstreifen enthält, die parallel zur ersten Strecke von $\Lambda(s_1)$ verlaufen und die wir als das obere bzw. untere Knie von H_1 bezeichnen. Hier sind im Allgemeinen die beiden Knie verschieden breit, während sie bei H_0 gleich breit sind (vgl. Fig. 12).

Bei der Definition unserer Wege wurde eine feste Richtung β zugrunde gelegt, die der Bedingung (10.2) genügt. Zur Richtung β gehört dann die durch (3.7) definierte Größe ω , die für $\beta = \beta_1 = \beta_2$ gegeben ist durch

$$(13.1) \quad \omega = \frac{1}{3} \operatorname{Min} \left[\frac{\pi}{2} - \beta, \beta + \frac{\pi}{2}, \beta + \alpha_2 - \frac{\pi}{2}, -\alpha_1 - \beta - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\alpha_1, \alpha_2 \right].$$

Wir setzen ferner

$$(13.2) \quad \omega_0 = \frac{\omega}{2}.$$

Die Funktion $\Phi(u)$ ist nun regulär auf und außerhalb $D(s_0)$ und ebenso auf und außerhalb $D(s_1)$, wobei ihre Werte in gemeinsamen Teilstücken dieser beiden Mengen übereinstimmen. Insbesondere ist also $\Phi(u)$ regulär auf H_0 und H_1 . Wir behaupten nun den

Hilfssatz 13. *Strebt u ins Unendliche über H_0 oder H_1 , so gilt dabei für jedes*

$$\zeta \geq \frac{R}{\sin \omega_0}$$

$$(13.3) \quad e^{\zeta u} \Phi(u) = O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad (u \rightarrow \infty, u < H_0 + H_1).$$

Beweis. Wir führen den Beweis explizite für H_1 ; für H_0 verläuft er durchaus analog. (13.3) folgt unmittelbar aus (3.4), wenn die Verlängerung der ersten Strecke von $\Lambda(s_1)$ in der Richtung nach der positiven Halbebene durch den Ursprung geht.

Es möge nun die Verlängerung der ersten, unendlichen Strecke von $\Lambda(s_1)$ unterhalb des Ursprungs verlaufen. Bilden wir dann den zu unserem $\beta = \beta_1 = \beta_2$ gehörenden Weg $C(t, \beta)$ (vgl. Fig. 3), so gilt (3.4) im ganzen „Außenbereich“ G_t dieses Weges, wie er in § 3 charakterisiert wurde. Dann liegt das untere Knie von H_1 , bis eventuell auf ein endliches Teilstück in G_t . Daher folgt dafür (13.3) ohne weiteres aus (3.4).

Um dasselbe für das obere Knie von H_1 zu beweisen, bilde man mit $\beta' = \beta + \omega_0$ anstatt β den Weg $C(t, \beta')$ und die dazugehörige, analog zu G_t zu

definierende Menge G'_i . Dann muß beim Übergang von $C(t, \beta)$ zu $C(t, \beta')$ die „Achse“ um den Winkel ω_0 im positiven Sinne gedreht werden, so daß der zugehörige unendliche Halbparallelstreifen das obere Knie von H_1 schräg von rechts oben nach links unten durchschneidet (vgl. Fig. 12). Dann liegt das obere Knie von H_1 biseventuell auf ein endliches Teilstück, in derzu β' gehörenden Menge G'_i . In G'_i gilt aber (3.4) wiederum, wobei allerdings, wie ein Blick auf die Formel (13.1) zeigt, ω durch $\omega - \omega_0 = \omega_0$ zu ersetzen ist.

Verläuft aber die Fortsetzung der ersten unendlichen Seite von $\Lambda(s_1)$ oberhalb des Ursprungs, so schließt man in vollständig symmetrischer Weise, indem insbesondere $\beta' = \beta - \omega_0$ gesetzt wird. Damit ist unser Hilfssatz 13 vollständig bewiesen.

§ 14. Analytische Fortsetzung von $F(s)$ für $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$.

Satz II. Es sei $f(s)$ durch (1.1) gegeben, wo $A(\lambda)$ auf jeder endlichen Teilstrecke von $\langle a, \infty \rangle$ von beschränkter Schwankung und die Konvergenzabszisse σ^* von $f(s)$ endlich ist. Es seien α_1 und α_2 reell und derart, daß

$$(14.1) \quad \alpha_1 < 0 < \alpha_2, \quad \alpha_2 - \alpha_1 > \pi$$

ist. $q(z)$ sei regulär für alle z mit $|z| \geq R$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ und es möge $\varphi(z)$ für jedes Zahlenpaar α'_1, α'_2 mit $\alpha_1 < \alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha_2$ einer Relation (2.2) genügen. Man bilde mit Hilfe des Integrals (6.1) die Funktion $F(s)$, die dann für $\Re s > k + \sigma^*$ regulär ist. Es sei $L(s_0)$ ein wie in § 10 definierter Weg, der sowohl die W -Eigenschaft als auch die k -Eigenschaft besitzt.

Ist $f(s)$ längs $L(s_0)$ aus der Halbebene $\Re s > k + \sigma^*$ derart fortsetzbar, daß dabei die Konvergenzradien aller Funktionselemente längs $L(s_0)$ größer als k sind, so ist $F(s)$ aus der Halbebene $\Re s > k + \sigma^*$ längs $L(s_0)$ bis in den Punkt s_0 fortsetzbar¹³⁾.

Beweis. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir $\sigma^* = 0$ voraussetzen, da der allgemeine Fall auf diesen durch die Substitution $s^* = s - \sigma^*$ zurückgeführt werden kann. Unter Benutzung der zu der Charakterisierung des Weges $L(s_0)$ in § 10 verwendeten, durch (10.2) charakterisierten Größe β bestimmen wir ω und ω_0 durch (13.1) und (13.2).

Beim Beweis des Satzes kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$(14.2) \quad a > \frac{R}{\sin \omega_0}$$

ist. Denn nach dem Hilfssatz 3 (§ 1) bedeutet dies höchstens, daß man von $f(s)$ und $F(s)$ eine ganze transzendente Funktion abzieht.

Ebenso können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß für $\varphi(u)$ die Relationen

$$\varphi(R) = \varphi'(R) = \varphi''(R) = 0$$

gelten. Man sieht dies genau wie beim Beweis des Satzes I unmittelbar ein.

Es gibt ein positives δ derart, daß längs des Weges $L(s_0)$ auch die $(k + 3\delta)$ -Bedingung erfüllt ist und daß zugleich längs $L(s_0)$ die Funktionselemente von

¹³⁾ Vgl. die Fußnote 10 zu Satz I.

$f(s)$ Konvergenzradialen $> k + 3\delta$ haben. Wir setzen nun im Einklang mit § 13

$$t = k + \delta, \quad t^* = k + 3\delta$$

und bilden mit diesen Werten von t und t^* die zu $L(s_0)$ gehörenden Konturen $D(s_0)$, zu t gehörend, und D^* , zu t^* gehörend. Nunmehr betrachten wir die Ausdrücke

$$(14.3) \quad G_{s_0}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D(s_0)} \Phi(u) f(s-u) du,$$

$$(14.3^*) \quad G^*(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D^*} \Phi(u) f(s-u) du,$$

wobei s die Kreisscheibe

$$(14.4) \quad |s - s_0| \leq 2\delta$$

durchläuft.

Wir wollen nun beweisen, daß die Integrale in (14.3) und (14.3*) gleichmäßig in (14.4) konvergieren.

Zu diesem Zwecke wenden wir auf $f(s-u)$ die Relation (1.8) an, wobei wir ein positives s' mit $0 < s' < \delta$ wählen. Wir erhalten dann, z. B. für $\varepsilon = \omega$:

$$|f(s-u)| \leq \frac{c^*}{\sin \varepsilon} e^{-a \Re(s-u-s')},$$

wobei c^* eine nur von $A(\lambda)$ abhängige Konstante ist, sobald $s-u$ der Bedingung genügt: $|\arg(s-u-s')| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Wir beschränken nun u auf jeden Fall auf die beiden Knie der Punktmenge H_0 , die, wie im § 13 erläutert wurde, zwischen D^* und $D(s_0)$ liegt. Es gibt dann sicher eine solche positive Größe S_0 , daß, sobald $\Re u \leq -S_0$ in H_0 ist, die obigen Bedingungen für alle s in (14.4) erfüllt sind. Dann folgt aber weiter

$$|f(s-u)| \leq \frac{c^*}{\sin \varepsilon} e^{-a \Re(s_0 - 2\delta - u - s')},$$

$$(14.5) \quad |f(s-u)| = O(e^{au}) \quad (u \rightarrow \infty, u < H_0).$$

Aus (14.5) und (13.3) folgt aber wegen (14.2)

$$(14.6) \quad |f(s-u)| \Phi(u) = O(e^{au} \Phi(u)) = O\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

gleichmäßig in (14.4), womit die gleichmäßige Konvergenz von (14.3) und (14.3*) in (14.4) bewiesen worden ist.

Aus (14.6) folgt ferner, daß die beiden Funktionen $G_{s_0}(s)$ und $G^*(s)$ in (14.4) identisch sind. Denn man kann die Integrationskontur $D(s_0)$ in ihrem „endlichen Stück“ in den entsprechenden Teil von D^* so deformieren, daß dabei nur H_0 überstrichen wird. Und daß man auch über die beiden unendlichen Knie von H_0 hinweg deformieren kann, folgt in bekannter Weise, wenn man bedenkt, daß längs der „Überbrückungsstege“ $a b$ und $a' b'$ (siehe Fig. 12) von der Länge 2δ gleichmäßig (14.6) gilt.

Ferner folgt nach dem Hilfssatz 8 (§ 7) aus der gleichmäßigen Konvergenz von (14.3) in (14.4), daß $G_{s_0}(s)$ im Kreise $|s - s_0| < 2\delta$ holomorph ist.

Wir definieren nun auf $L(s_0)$ einen Punkt s_1 in der folgenden Weise: Ist die Länge der letzten Strecke von $L(s_0)$ nicht größer als $\frac{\delta}{2}$, so soll s_1 gerade die entsprechende Ecke sein, in der die letzte Strecke an die vorletzte anstößt; ist aber die Länge der letzten Strecke von $L(s_0)$ größer als $\frac{\delta}{2}$, so nehmen wir als s_1 den Punkt auf dieser Strecke, der die Distanz $\frac{\delta}{2}$ von s_0 hat.

An den Punkt s_1 kann man nun die am Ende von § 13 durchgeführte Konstruktion anknüpfen — dabei wird also $\eta = \frac{\delta}{2}$ gesetzt. Die dabei sich ergebenden Wege $L(s_1)$, $A(s_1)$ und $D(s_1)$ haben durchaus analoge Eigenschaften, wie die entsprechenden, für s_0 gebildeten Wege, wenn dabei an der Größe t festgehalten wird. Wir können dann insbesondere durch das Integral

$$(14.7) \quad G_{s_1}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D(s_1)} \Phi(u) f(s-u) du$$

eine Funktion von s definieren, die im Kreise

$$(14.8) \quad |s - s_1| < 2\delta$$

regulär ist.

Nun ist aber nach der Voraussetzung des Satzes II über $f(s)$ und nach Hilfsatz 13 (§ 13) der Integrand von (14.7) holomorph auf der Punktmenge H_1 , die von $D(s_1)$ und D^* berandet wird, und dort $0\left(\frac{1}{u^2}\right)$ für $u \rightarrow \infty$. Daher kann der Integrationsweg $D(s_1)$ in (14.7) in D^* deformiert werden. Denn die Integrale über die Überbrückungsstege c , c' , d' (vgl. Fig. 12 in § 13) konvergieren gegen 0. Wir sehen, daß $G_{s_1}(s)$ auch durch das Integral (14.3*) dargestellt werden kann, daß also $G_{s_1}(s)$ in (14.8) mit $G^*(s)$ zusammenfällt. Dies bedeutet aber, daß $G_{s_1}(s)$ durch geradlinige analytische Fortsetzung aus $G_{s_0}(s)$ hervorgeht. In der Tat haben die Innengebiete von (14.4) und (14.8) eine „Linse“ gemeinsam, die von der Verbindungsstrecke ihrer Radien durchsetzt wird.

Wir definieren nun von s_1 aus sukzessive weitere Punkte s_2, s_3, \dots, s_m in gleicher Weise, wie s_1 von s_0 aus definiert wurde, und zwar solange, bis der Punkt s_m ins Innere der Halbebene $\Re s > k$ hineinfällt und zugleich auf die erste Strecke von $L(s_0)$. Dann entspricht jedem dieser Punkte s_μ der in ihn mündende Teilweg $L(s_\mu)$ des Weges $L(s_0)$, die zugehörige Kontur $D(s_\mu)$ und die zugehörige Funktion $G_{s_\mu}(s)$, die durch das Integral

$$G_{s_\mu}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D(s_\mu)} \Phi(u) f(s-u) du$$

gegeben ist und im Kreise $|s - s_\mu| < \delta$ regulär ist.

Ersetzen wir in unserem obigen Resultat s_0 durch $s_{\mu-1}$ und s_1 durch s_μ , so sehen wir, daß die Funktionen

$$G_{s_0}, G_{s_1}, \dots, G_{s_m}$$

jeweils auseinander durch geradlinige analytische Fortsetzung längs der zugehörigen Teilstrecke von $L(s_0)$ hervorgehen und daß daher insbesondere $G_m(s)$ längs des Weges $L(s_0)$ bis in den Punkt s_0 analytisch fortsetzbar ist. $G_m(s)$ fällt aber nach Hilfssatz 7 (§ 6) in der Halbebene $\Re s > k$ mit $F(s)$ zusammen. Damit ist der Satz II vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis.

- BERNSTEIN, W.: (1) *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*. Paris 1933. — CRAMÉR, H.: (1) Un théorème sur les séries de Dirichlet et son application. *Ark. för Mat., Astron. och Fys.* **13**, Nr. 22 (1919). — FABER, G.: (1) Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen. *Math. Ann.* **57**, 369—388 (1903). — HOPF, H.: (1) Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. *Comp. Math.* **2**, 50—62 (1935). — VON KAMPEN: (1) On the argument of simple closed curves and simple arcs. *Comp. Math.* **4**, 271—275 (1937). — LINDELÖF, E.: (1) *Le calcul des résidus*. Paris 1905. — LEAU, L.: (1) Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. *J. de Mathém.* (5) **5**, 365—425 (1899). — OSTROWSKI, A.: (1) Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorscher und Dirichletscher Reihen. *Sitzgsber. d. Berliner Akad., Math.-Phys. Klasse*, **1923**, 39—44; — (2) Über einen Satz von Leau und die analytische Fortsetzung einiger Klassen Taylorscher und Dirichletscher Reihen. *Math. Ann.* **108**, 718—756 (1933); — (3) Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I. *Comp. Math.* **2**, 26—49 (1935); — (4) Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente II—III. *Comp. Math.* **2**, 177—200 (1935). — SOULA, J.: (1) Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet. *J. Math. pur. appl.* Paris, (9) **4**, 339—353 (1925). — WIGERT, S.: (1) Remarque sur une classe de séries de puissances. *Tôhoku Math. J.* **30** (1929).

(Eingegangen am 28. Mai 1954).

Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen.

Von

HORST TIETZ in Braunschweig.

1. Die Existenz eindeutiger analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen bedeutet, daß jede Klasse konformäquivalenter Riemannscher Flächen „realisiert“ werden kann durch Überlagerungsflächen der Zahlenebene. Damit stellt sich die Frage nach besonders einfachen Realisierungen oder Normalformen.

Das wichtigste Ergebnis zu dieser Frage ist der Riemannsche Abbildungssatz, der sie für einfach-zusammenhängende Riemannsche Flächen beantwortet. Einen Schritt weiter gehen die Schlitztheoreme, die von den topologischen Voraussetzungen des Riemannschen Abbildungssatzes nur die Schlichtartigkeit der Riemannschen Fläche beibehalten. Hierher gehört auch der Satz, daß jede berandete schlichtartige Riemannsche Fläche einem mehrfach überdeckten Kreis mit geeigneten Verzweigungsschnitten, die den Rand nicht treffen, konformäquivalent ist.

Die Frage nach kanonischen Riemannschen Flächen im Falle höheren Geschlechtes ist erst in letzter Zeit von Herrn AHLFORS [1] angeschnitten und von Herrn NEHARI [2] systematisch behandelt worden:

Herr AHLFORS zeigt, daß jede berandete Riemannsche Fläche realisiert werden kann als mehrfach überdeckter Einheitskreis, während Herr NEHARI die Schlitztheoreme auf diesen Fall überträgt.

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit sind entstanden aus einer Diskussion des AHLFORSschen Satzes:

Man betrachte etwa das gelochte elliptische Gebilde. Entspräche dem Rand bei der AHLFORSschen Abbildung die einfache Kreislinie, so müßte die AHLFORSsche Normalform, da sie keine weiteren Randpunkte und keine Unendlichkeitsstelle enthalten kann, mit dem schlichten Einheitskreis zusammenfallen; das kann nicht sein, weil das Urbild nicht schlichtartig ist. Die Normalform von AHLFORS unterscheidet sich also von den entsprechenden des schlichtartigen Falles dadurch, daß die Randlinien im allgemeinen¹⁾ sich durch mehrere Blätter hindurchziehen müssen.

Es erscheint wünschenswert, eine Normalform für berandete Riemannsche Flächen zu besitzen, die — im Gegensatz zur AHLFORSschen — sicherstellt, daß das Bild jeder einzelnen Randkurve schlicht über der Linie des Einheitskreises liegt. Nach obigem muß man dabei auf die Beschränktheit der Abbildungsfunktion verzichten, d. h. man muß versuchen, die Bildfläche außer aus Kreisscheiben noch durch Hinzunahme einiger Vollebenen aufzubauen.

¹⁾ Daß das nicht immer so sein muß, zeigt das Beispiel des über einem hinreichend großen Kreise gelegenen Teiles einer Riemannschen Fläche, deren sämtliche Verzweigungspunkte im Endlichen liegen.

Daß dies tatsächlich in der gewünschten Weise möglich ist, wird im folgenden gezeigt.

2. Spiegelt man eine berandete Riemannsche Fläche R , deren Rand über dem Einheitskreis liegt, an diesem Kreise und verheftet das so entstandene Flächenpaar an entsprechenden Randstellen, so erhält man eine geschlossene Riemannsche Fläche, die Schottky-Verdoppelung R^2 von R .

Erweist sich eine solche Riemannsche Fläche R als Realisierung einer abstrakten Riemannschen Fläche \mathfrak{R} , so läßt sich also die abbildende Funktion als rationale Funktion auf die Schottkysche Doppelfläche \mathfrak{R}^2 , die man durch Verheftung von \mathfrak{R} mit ihrer Rückseite $\tilde{\mathfrak{R}}$ erhält, fortsetzen — sie ist eine Schottky-Funktion (im Sinne von [1], 2.1). Es bedeutet daher keine Einschränkung, wenn wir alle Funktionen, die die Abbildung von \mathfrak{R} auf unsere Normalform leisten, unter den rationalen Funktionen von \mathfrak{R}^2 zu finden suchen.

3. \mathfrak{R} sei unsere betrachtete berandete Riemannsche Fläche vom Geschlecht p . Ihr Rand Γ bestehe aus r -Kurven Γ_ϱ ($\varrho = 1, \dots, r$). Die Stellen von \mathfrak{R} werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet, die \mathfrak{z} entsprechende Stelle auf der Rückseite $\tilde{\mathfrak{R}}$ von \mathfrak{R} mit $\tilde{\mathfrak{z}}$.

Die Schottky-Verdoppelung $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} + \tilde{\mathfrak{R}}$ von \mathfrak{R} ist eine geschlossene Riemannsche Fläche, für die die Abbildung $\mathfrak{z} \rightarrow \tilde{\mathfrak{z}}$ eine konforme Selbstabbildung mit Umliegung der Winkel bedeutet. Daher ist mit jeder auf \mathfrak{R}^2 rationalen bzw. analytischen Funktion $f(\mathfrak{z})$ auch $g(\mathfrak{z}) = \overline{f(\tilde{\mathfrak{z}})}$ rational bzw. analytisch.

Die gesuchte Abbildungsfunktion $F(\mathfrak{z})$ hat nach 2. auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ Pole bzw. Nullstellen in denjenigen Punkten, die vermöge der Abbildung $\mathfrak{z} \rightarrow \tilde{\mathfrak{z}}$ den Nullstellen bzw. Polen von $F(\mathfrak{z})$ auf \mathfrak{R} entsprechen; der zu $F(\mathfrak{z})$ gehörige Divisor auf \mathfrak{R}^2 hat also die Form

$$(1) \quad F(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{D}}{\tilde{\mathfrak{D}}},$$

wenn \mathfrak{D} den zu \mathfrak{R} gehörigen Divisor bedeutet.

Sei umgekehrt $F(\mathfrak{z})$ als rationale Funktion auf \mathfrak{R} durch einen Divisor nach (1) definiert, so folgt

$$\overline{F(\mathfrak{z})} = \frac{\tilde{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}},$$

also ist $F(\mathfrak{z}) \cdot \overline{F(\mathfrak{z})}$ als polfreie rationale Funktion von \mathfrak{R}^2 konstant; diese Konstante ist positiv, wie sich für $\mathfrak{z} = \tilde{\mathfrak{z}}$ auf Γ ergibt (sie kann also als Eins angenommen werden). Das heißt aber, daß für eine auf \mathfrak{R} rationale²⁾ Funktion

$$(2) \quad |F(\mathfrak{z})| = c \quad \text{für } \mathfrak{z} \text{ auf } \Gamma$$

mit (1) äquivalent ist.

Der Existenzbeweis für unser $F(\mathfrak{z})$ wird also erbracht sein, wenn wir zeigen, daß in der Gesamtheit der auf \mathfrak{R}^2 multiplikativen Funktionen³⁾ der Form (1),

²⁾ Unter einer auf einer Riemannschen Fläche rationalen Funktion verstehen wir eine eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion.

³⁾ Sie nehmen bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges Faktoren auf, die nur von der Homologiekategorie des Weges abhängen.

deren Argument sich bei Durchlaufen jeder der Kurven Γ_e um 2π ändert, eindeutige vorkommen.

Zu diesem Zweck bauen wir den Logarithmus von $F(\mathfrak{z})$ aus Normalintegralen 3. Gattung auf.

4. α_π, β_π sei ein kanonisches Schnittsystem von \mathfrak{R} und γ'_e ein System von Querschnitten, die Γ_e mit Γ_r verbinden. Dann sind $-\tilde{\alpha}_\pi, \tilde{\beta}_\pi$ und $\tilde{\gamma}'_e$ entsprechende Kurvensysteme von $\tilde{\mathfrak{R}}$, und man erhält ein vollständiges kanonisches Schnittsystem von \mathfrak{R}^2 — die daher vom Geschlecht $G = 2p + r - 1$ ist — in

$$\alpha_\pi, \beta_\pi, -\tilde{\alpha}_\pi, \tilde{\beta}_\pi; \Gamma_e, \gamma_e = \gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e; \quad 1 \leq \pi \leq p; \quad 1 \leq e \leq r.$$

Die Normalintegrale auf \mathfrak{R}^2 seien bezüglich dieses Schnittsystems gewählt, und zwar seien

$p(\mathfrak{z}, x)$ das Normalintegral 3. Gattung in \mathfrak{z} mit verschwindenden Perioden längs $\alpha_\pi, -\tilde{\alpha}_\pi, \Gamma_e$ und den logarithmischen Singularitäten mit Residuen 1 bzw. -1 bei den Stellen x und \tilde{x} ;

$V_\pi(\mathfrak{z})$ und $V_e(\mathfrak{z})$ die Normalintegrale 1. Gattung, deren Perioden längs aller ersten Schnitte des Schnittsystems verschwinden mit Ausnahme bei Durchlauf von α_π bzw. Γ_e , die die Periode $2\pi i$ ergibt.

Da $\Gamma = \Sigma \Gamma_e$ auf \mathfrak{R}^2 berandet, hat längs Γ_r

$$\begin{aligned} V_\pi(\mathfrak{z}) & \text{ die Periode } 0, \\ V_e(\mathfrak{z}) & \text{ die Periode } -2\pi i, \\ p(\mathfrak{z}, x) & \text{ die Periode } 2\pi i, \end{aligned}$$

letzteres nach dem Residuensatz.

Weiter nimmt $\overline{V_\pi(\tilde{\mathfrak{z}})}$, wenn \mathfrak{z} längs $-\tilde{\alpha}_\pi$ läuft, um die Periode $-\overline{2\pi i} = 2\pi i$ zu; es ist also das zu $-\tilde{\alpha}_\pi$ gehörige Normalintegral erster Gattung, das wir mit $\tilde{V}_\pi(\mathfrak{z})$ bezeichnen wollen:

$$(3) \quad \tilde{V}_\pi(\mathfrak{z}) = \overline{V_\pi(\tilde{\mathfrak{z}})}.$$

$\overline{V_e(\tilde{\mathfrak{z}})}$ besitzt als Funktion von \mathfrak{z} längs Γ_e die Periode $\overline{2\pi i} = -2\pi i$; es ist also

$$(4) \quad \overline{V_e(\tilde{\mathfrak{z}})} = -V_e(\mathfrak{z}).$$

Wir benötigen noch Funktionen $p_e(\mathfrak{z}, x)$, die ebenso wie $p(\mathfrak{z}, x)$ definiert sind, wenn man nur in dem Schnittsystem von \mathfrak{R}^2 die Randkomponente Γ_e durch Γ_r ersetzt. Offenbar ist

$$(5) \quad p_e(\mathfrak{z}, x) = p(\mathfrak{z}, x) + V_e(\mathfrak{z}) \quad \text{mit} \quad V_r(\mathfrak{z}) = 0,$$

und $p_e(\mathfrak{z}, x)$ hat längs Γ_e die Periode $2\pi i$.

5. Unsere Funktion $F(\mathfrak{z})$ soll \mathfrak{R} so abbilden, daß jede der r Komponenten von Γ in die schlichte Kreislinie übergeht; die Bildfläche R enthält also r Kreisscheiben und eine gewisse Anzahl — etwa n — Vollebenen. Der zu $F(\mathfrak{z})$ gehörige Divisor \mathfrak{D} auf \mathfrak{R} hat also die Gestalt

$$\mathfrak{D} = x_1 x_2 \cdots x_r \cdot \frac{u_1 \cdot u_2 \cdots u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdots v_n}.$$

Für den Logarithmus $g(z)$ von $F(z)$ bedingt das nach (1) die Beziehung

$$(6) \quad g(z) = \sum p_e(z, x_e) + \sum [p(z, u_r) - p(z, v_r)] + c.$$

Dieses Integral 3. Gattung hat nach Konstruktion schon längs allen α_n , $-\tilde{\alpha}_n$ die Periode Null und längs jeder Γ_e die Periode $2\pi i$. Umgekehrt haben alle Funktionen mit diesen Eigenschaften die Gestalt (6).

6. Wir denken uns die Stellen $x_e (e = 1, \dots, r)$ auf \mathfrak{R} beliebig, aber fest vorgegeben; nach 4. genügt es zu zeigen, daß durch Wahl der u_r, v_r in (6) die Perioden von $g(z)$ längs allen $\beta_n, \tilde{\beta}_n, \gamma_e$ zum Verschwinden gebracht werden können.

Zu diesem Zweck werden alle Summanden von (6) mittels (5) auf das angegebene Schnittersystem, das Γ_r nicht enthält, bezogen:

$$(7) \quad g(z) = \sum p(z, x_e) + \sum [p(z, u_r) - p(z, v_r)] + \sum V_e(z) + c.$$

Die Perioden von $p(z, x)$ sind durch die Werte der Integrale 1. Gattung an den Polstellen gegeben⁴⁾: die Periode von $p(z, x)$

längs β_n ist $V_n(x) - V_n(\tilde{x})$,

längs $\tilde{\beta}_n$ ist $\tilde{V}_n(x) - \tilde{V}_n(\tilde{x})$,

längs γ_e ist $V_e(x) - V_e(\tilde{x})$.

Mithin ergeben sich aus (7) die Perioden $\delta_n, \tilde{\delta}_n, \delta_e$ von $g(z)$ längs $\beta_n, \tilde{\beta}_n$ bzw. γ_e zu

$$(8) \quad \delta_n = \sum_r [V_n(u_r) - V_n(\tilde{u}_r)] - \sum_r [V_n(v_r) - V_n(\tilde{v}_r)] \\ + \sum_e [V_n(x_e) - V_n(\tilde{x}_e)] + \sum_e c_{en},$$

$$(8a) \quad \tilde{\delta}_n = \sum_r [\tilde{V}_n(u_r) - \tilde{V}_n(\tilde{u}_r)] - \sum_r [\tilde{V}_n(v_r) - \tilde{V}_n(\tilde{v}_r)] \\ + \sum_e [\tilde{V}_n(x_e) - \tilde{V}_n(\tilde{x}_e)] + \sum_e \tilde{c}_{en},$$

$$(9) \quad \delta_e = \sum_r [V_e(u_r) - V_e(\tilde{u}_r)] - \sum_r [V_e(v_r) - V_e(\tilde{v}_r)] \\ + \sum_{e'} [V_e(x_{e'}) - V_e(\tilde{x}_{e'})] + \sum_{e'} c_{e'e};$$

dabei bedeuten $c_{en}, \tilde{c}_{en}, c_{e'e}$ die Perioden von $V_e(z)$ längs $\beta_n, \tilde{\beta}_n$ bzw. $\gamma_{e'}$.

Das Verschwinden dieser Perioden von $g(z)$ ist gleichbedeutend mit folgendem Gleichungssystem, das man unter Berücksichtigung von (3) und (4) erhält, wenn man in (8) und (8a) entsprechende Gleichungen addiert bzw. subtrahiert und die Funktionen

$$W_n(z) = V_n(z) + \tilde{V}_n(z),$$

$$\tilde{W}_n(z) = V_n(z) - \tilde{V}_n(z)$$

⁴⁾ Siehe z. B. [3], S. 367; dort sind die Perioden etwas anders als hier definiert.

einführt:

$$(8') \quad \operatorname{Im} \sum_{\nu} [W_{\pi}(u_{\nu}) - W_{\pi}(v_{\nu})] = -\operatorname{Im} \sum_{\epsilon} W_{\pi}(x_{\epsilon}) + \frac{1}{2} i \sum_{\epsilon} (c_{\epsilon\pi} + \tilde{c}_{\epsilon\pi})$$

$$\operatorname{Re} \sum_{\nu} [\tilde{W}_{\pi}(u_{\nu}) - \tilde{W}_{\pi}(v_{\nu})] = -\operatorname{Re} \sum_{\epsilon} \tilde{W}_{\pi}(x_{\epsilon}) - \frac{1}{2} \sum_{\epsilon} (c_{\epsilon\pi} - \tilde{c}_{\epsilon\pi})$$

$$(9') \quad \operatorname{Re} \sum_{\nu} [V_{\epsilon}(u_{\nu}) - V_{\epsilon}(v_{\nu})] = -\operatorname{Re} \sum_{\epsilon'} V_{\epsilon}(x_{\epsilon'}) - \sum_{\epsilon'} c_{\epsilon'\epsilon}.$$

Damit diese Gleichungen sinnvoll sind, müssen die letzten Summen reell sein. Dies ist aber eine Folge von (4); denn danach ist $\tilde{c}_{\epsilon\pi} = -\overline{c_{\epsilon\pi}}$ und wegen $\tilde{\gamma}_{\epsilon} = -\gamma_{\epsilon}$ auch $c_{\epsilon'\epsilon} = \overline{c_{\epsilon'\epsilon}}$.

Da die W_{π} , \tilde{W}_{π} , V_{ϵ} eine Basis der Abelschen Integrale 1. Gattung von \mathfrak{R}^2 darstellen und da wir die Stellen x_{ϵ} auf \mathfrak{R} vorgeben, die rechten Seiten von (8') und (9') also konstante reelle Größen sind, ist die Lösbarkeit unseres Problems erwiesen, wenn stets Stellen u_{ν} , v_{ν} auf \mathfrak{R} gefunden werden können, die den Gleichungen

$$(10) \quad \sum_{\nu} [V_{\gamma}(u_{\nu}) - V_{\gamma}(v_{\nu})] = a_{\gamma} + i b_{\gamma} = A_{\gamma} \quad (\gamma = 1, \dots, G)$$

genügen; hierin bilden die $V_{\gamma}(\lambda)$ eine Basis der Integrale 1. Gattung, während die a_{γ} gegebene, die b_{γ} dagegen geeignet zu wählende Größen sind.

Es wird gezeigt, daß dies sogar möglich ist, wenn die b_{γ} beliebig gewählt werden.

*Beweis*⁵⁾: Die Stellen λ_{γ} mögen unabhängig voneinander auf \mathfrak{R}^2 variieren, t_{γ} seien entsprechende Ortsuniformisierende. Die Determinante

$$(11) \quad \operatorname{Det} \left(\frac{dV_{\gamma'}(\lambda_{\gamma})}{dt_{\gamma}} \right) \quad (t_{\gamma} = 0)$$

verschwindet wegen der linearen Unabhängigkeit der $V_{\gamma}(\lambda)$ nicht identisch (sogar in keiner der Veränderlichen einzeln). Daher können G Stellen ν_{γ} auf \mathfrak{R} gefunden werden, an denen diese Determinante von Null verschieden ist. Mit diesen ν_{γ} anstelle der λ_{γ} ist (11) aber die Funktionaldeterminante des Funktionensystems in den u_{γ}

$$(12) \quad \sum_{\gamma'} [V_{\gamma}(u_{\gamma'}) - V_{\gamma}(v_{\gamma'})] = \alpha_{\gamma},$$

das daher ein gewisses Umgebungssystem der ν_{γ} eineindeutig auf eine Umgebung U des Nullpunktes im Raum der α_{γ} bezieht; diese Umgebung kann so klein gewählt werden, daß alle entsprechenden u_{γ} — ebenso wie die ν_{γ} — auf dem durch \mathfrak{R} bestimmten Teil von \mathfrak{R}^2 liegen.

Zu den als gegeben angenommenen A_{γ} in (10) sei nun die natürliche Zahl N so groß gewählt, daß der Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{N} A_{\gamma}$ in die Umgebung U fällt. Bestimmt man mit $\alpha_{\gamma} = \frac{1}{N} A_{\gamma}$ die zugehörigen u_{γ} aus (12), so erhält man eine Lösung von (10), wenn man $n = N \cdot G$ setzt und jede der Stellen u_{γ} und ν_{γ} genau N -mal unter die u_{ν} bzw. ν_{ν} aufnimmt.

7. Es gibt also solche Integrale 3. Gattung $g(\lambda)$ der Form (6), für welche die multiplikative Funktion

$$F(\lambda) = e^{g(\lambda)}$$

⁵⁾ Vgl. [4], S. 123 ff.

auf \mathfrak{R}^2 eindeutig ist und daher jede Randkurve von \mathfrak{R} auf die einmal durchlaufene Linie des Einheitskreises abbildet; denn daß eine solche Kreislinie nicht in sich zurücklaufen und damit einen Bogen mehrfach bedecken kann, ist klar, weil Riemannsche Flächen keine „Falten“ haben (Satz von der Gebietstreue). Damit haben wir erhalten den

Abbildungssatz: Jede berandete Riemannsche Fläche \mathfrak{R} kann realisiert werden durch eine Riemannsche Fläche R , die aus einer gewissen Anzahl von Vollebenen besteht und aus ebenso vielen kongruenten Kreisscheiben, wie die Anzahl der Randkontinuen von \mathfrak{R} beträgt; es können ebenso viele Nullstellen der Abbildungsfunktion vorgeschrieben werden. Die Randkreise verlaufen auf R schlicht.

8. Wird von der Funktion $g(\zeta)$ aus (6) nur gefordert, daß $F(\zeta) = e^{g(\zeta)}$ auf \mathfrak{R} — und nicht auf \mathfrak{R}^2 — eindeutig ist, so brauchen nur die Ausdrücke (8), aber nicht (9) zu verschwinden⁶⁾. $F(\zeta)$ hat dann wieder auf jeder Randkomponente von \mathfrak{R} konstanten Absolutbetrag; aber diese Konstanten sind nicht notwendig untereinander gleich, so daß die Kreise der Bildfläche verschiedene Radien aufweisen; das sieht man ein, wenn man bedenkt, daß $\frac{1}{2} \delta_\epsilon$ aus (9) die „Halbperiode“ bedeutet, um die der Realteil von $g(\zeta)$ sich ändert, wenn ζ längs γ'_ϵ von Γ'_ϵ nach Γ läuft.

9. Beständen für die Unbekannten u, v in (10) nicht die Beschränkungen, daß sie auf \mathfrak{R} liegen sollen, so ließe (11) auf das Jacobische Umkehrproblem hinaus, das mit $n = G = 2p + r - 1$ stets lösbar ist, wobei die v , beliebig vorgegeben werden können. Sieht man dagegen die v , auch als Unbekannte an, so scheint die Vermutung berechtigt, daß man — auch unter der erwähnten Nebenbedingung — mit $n = p$, also mit $2p$ Unbekannten auskommt, da die freie Wählbarkeit der b_i in (10) ausgenutzt werden kann, um $r - 1$ fehlende Hilfsunbekannte auf Γ zu bestimmen, für die nämlich die Beiträge der linken Seiten von (8'), (9') verschwinden würden. — Bei der Herleitung seiner Schlitztheoreme kommt Herr NEHARI⁷⁾ ebenfalls auf diese Frage; sein Beweis für die genannte Vermutung ist jedoch unhaltbar.

Nimmt man jedoch diese Neharische Behauptung als richtig an, so hieße das, daß R aus $p + r$, und damit R^2 aus $2p + r = G + 1$ Blättern bestünde; diese Anzahl ist in dem Sinne die kleinstmögliche, als sie z. B. im Falle $p = 0, r = 2$ — für den \mathfrak{R}^2 ein elliptisches Gebilde ist — nicht unterschritten werden kann.

Dieselben Überlegungen, die zu unserem Abbildungssatz führten, ermöglichen auch einen neuen Existenzbeweis für die AHLFORSsche Normalform, wiederum jedoch ohne eine Schranke für die Anzahl der benötigten Blätter zu ergeben.

Literatur.

[1] AHLFORS, L.: Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. Comment. math. Helv. 24, 100—134 (1950). — [2] NEHARI, Z.: Conformal mapping of open Riemann surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 258—277 (1950). — [3] OSGOOD, W. F.: Funktionentheorie II, 2. — [4] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche.

(Eingegangen am 29. Juni 1954.)

⁶⁾ Wenn (8) verschwindet, so auch (8a).

⁷⁾ [2], S. 271 ff. Die Arbeit enthält mehrere Unstimmigkeiten, die aber — bis auf die oben genannte — sämtlich richtiggestellt werden können und an den schönen Ergebnissen nichts ändern.

Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen.

Von

ALFRED FRÖLICHER in Zürich.

Einleitung.

1. In einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit M^1) ist durch die Multiplikation komplexer Vektorkomponenten mit $i = \sqrt{-1}$ ein Feld linearer Transformationen definiert, deren Quadrat gleich $-$ Identität (Multiplikation mit -1) ist. Mit anderen Worten, es gehört zu der in M gegebenen komplexen Struktur ein bestimmtes gemischtes Tensorfeld a_k^i mit der Eigenschaft $a_k^i a_j^k = -\delta_j^i$. Solche Tensorfelder in einer Mannigfaltigkeit M gerader Dimension — unabhängig von einer komplexen Struktur — werden als „fast-komplexe Strukturen in M “ bezeichnet; sie sind zuerst von HOPF [2] und von EHRESMANN [3] betrachtet worden, welche von vielen Mannigfaltigkeiten mit topologischen Methoden nachwiesen, daß sie keine derartigen Felder und somit auch keine komplexe Struktur zulassen.

2. Es läßt sich nun zeigen, daß eine komplexe Struktur in einer Mannigfaltigkeit M durch das zugehörige Feld a_k^i eindeutig bestimmt ist (Eindeutigkeitssatz, § 4), daß aber nicht jede fast-komplexe Struktur a_k^i in der oben beschriebenen Weise zu einer komplexen Struktur gehört: Die Felder a_k^i , die aus einer komplexen Struktur hervorgehen — sie werden *integrabel* genannt —, haben nämlich die weitere Eigenschaft, daß ihre „Torsion“ verschwindet; dabei ist die *Torsion* der fast-komplexen Struktur a_k^i ein gewisser Tensor t_{kl}^i (vgl. § 8), der aus a_k^i durch einen Differentiationsprozeß hervorgeht. Es ist leicht, Beispiele von fast-komplexen Strukturen anzugeben, deren Torsion $\neq 0$ ist. Dies ist auch für die bekannte fast-komplexe Struktur der Sphäre S^2 der Fall. Für eine reell-analytische fast-komplexe Struktur a_k^i folgt umgekehrt aus dem Verschwinden ihrer Torsion (Integrabilitätsbedingung), daß sie integrabel ist, also zu einer wohlbestimmten komplexen Struktur gehört. Ob die Voraussetzung der reellen Analytizität hier abgeschwächt werden kann, ist unseres Wissens eine offene Frage.

Die hier unter 2. genannten Ergebnisse sind aus einer gemeinsamen Untersuchung des Verfassers mit B. ECKMANN hervorgegangen²⁾. Sie wurden in Form einer C.R.-Note [5] veröffentlicht und sind in der vorliegenden Arbeit der Vollständigkeit halber eingehend dargestellt.

3. Die besonderen differentialgeometrischen Eigenschaften komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten sind auf Grund des Eindeutigkeitssatzes im wesentlichen im Tensorfeld a_k^i enthalten. In diesem Sinne verstehen wir

¹⁾ Man vgl. etwa [1]; ausführliche Definitionen finden sich auch im 1. Kapitel der vorliegenden Arbeit.

²⁾ Ähnliche Untersuchungen wurden von CH. EHRESMANN und P. LIBERMANN gemacht (vgl. [4]).

unter der Differentialgeometrie der komplexen und fast-komplexen Strukturen die Untersuchung von Tensorfeldern a_k^i mit $a_k^i a_j^k = -\delta_j^i$, mit oder ohne die zusätzliche Voraussetzung des Verschwindens der Torsion t_{kl}^i . Dies steht in gewisser Analogie zur Riemannschen Geometrie, welche in der Untersuchung von Tensorfeldern g_{ij} (mit den bekannten Eigenschaften) besteht. Unsere Betrachtungen befassen sich im Zusammenhang mit einem Feld a_k^i mit dem Begriff der *Hermiteischen* und *Kählerschen Metrik*, mit besonders ausgezeichneten *affinen Zusammenhängen*, mit *Poissonklammern* und verschiedenen Formulierungen der Integrabilitätsbedingung, ferner mit *homogenen fast-komplexen und komplexen Strukturen*.

4. Im 1. Kapitel der vorliegenden Arbeit werden die Grundbegriffe und Bezeichnungen eingehend erläutert. Das 2. Kapitel behandelt im wesentlichen die Integrabilitätsbedingung in der Form $t_{kl}^i = 0$. Hier wird gezeigt, daß die bekannte fast-komplexe Struktur der Sphäre S^2 nicht integrabel ist (§ 10). Das 3. Kapitel handelt von affinen Zusammenhängen. Wir zeigen, daß es zu jeder fast-komplexen Struktur a_k^i *affine Zusammenhänge* gibt, in denen a_k^i *parallel* ist (kovariante Ableitung = 0). Sie sind im allgemeinen nicht symmetrisch. Dann und nur dann gibt es darunter *symmetrische*, wenn die Torsion $t_{kl}^i = 0$ ist; dann und nur dann gibt es darunter *Riemannsche Zusammenhänge* (d. h. durch die Christoffelsymbole einer Riemannschen Metrik gegebene), wenn die Torsion $t_{kl}^i = 0$ ist und es eine bezüglich a_k^i *Kählersche Metrik* gibt. Für die genauere Formulierung vergleiche man § 13. Es wird insbesondere gezeigt, daß unter den Hermiteischen Metriken in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit die *Kählerschen* dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen die *fast-komplexe Struktur parallel* ist; mit anderen Worten, daß die Parallelverschiebung bezüglich der betreffenden Metrik die in den Tangentialräumen definierte komplexe Vektorstruktur invariant läßt.

Im 4. Kapitel wird das Poissonsche Klammerprodukt von Vektorfeldern (infinitesimalen Transformationen) mit fast-komplexen Strukturen in Zusammenhang gebracht. Dies kann besonders einfach unter Benutzung der im 3. Kapitel betrachteten affinen Zusammenhänge geschehen. Es ergibt sich daraus eine neue Form der Integrabilitätsbedingung, die sich als besonders geeignet erweist für die Untersuchung homogener Strukturen im 5. Kapitel. Eine komplexe Struktur in der Mannigfaltigkeit M heißt *homogen*, wenn es in M eine transitive Gruppe von komplex-analytischen Automorphismen gibt. Ist dies der Fall, so ist auch die zugehörige fast-komplexe Struktur in einem naheliegenden Sinne (vgl. § 18) *homogen*, und umgekehrt. Es wird nun ein Wirkungsraum M einer Lieschen Gruppe \mathfrak{G} betrachtet und die Frage untersucht, ob es in M eine fast-komplexe bzw. komplexe Struktur gibt, welche bezüglich der Operationen von \mathfrak{G} *homogen* ist. Die Bedingungen hierfür, und zwar auch die Integrabilitätsbedingung, lassen sich *rein algebraisch im Lieschen Ring* von \mathfrak{G} formulieren. Die erhaltenen algebraischen Kriterien lassen sich weiter analysieren, wobei sich Resultate ergeben, zu denen H. C. WANG [6] auf anderem Wege gelangt ist. Von diesen Anwendungen wird in der vorliegenden Arbeit nur eine behandelt, nämlich der Fall einer

kompakten Lieschen Gruppe, welche vermöge ihrer Linkstranslationen in sich selbst transitiv operiert. Das Kriterium für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur ist dann stets erfüllt³⁾. Jede kompakte Liesche Gruppe gerader Dimension (zusammenhängend) besitzt also eine komplexe Struktur, in welcher die Linkstranslationen komplex-analytisch sind (eine ebensolche komplexe Struktur gibt es für die Rechtstranslationen — die beiden Strukturen sind aber im allgemeinen verschieden).

5. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind bereits angekündigt worden. Neben der erwähnten C.R.-Note [5], die sich auf den Stoff des 2. Kapitels bezieht, ist von Herrn Prof. B. ECKMANN in zwei Vorträgen [7, 8] u. a. kurz über die verwendeten Methoden und erhaltenen Resultate berichtet worden. Ihm, meinem hochverehrten Lehrer, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen. Er hat mich auf die verschiedenen Fragestellungen geführt und mir viele wertvolle Ratschläge erteilt.

Inhaltsverzeichnis.

1. Kapitel: Komplexe und fast-komplexe Strukturen.

§ 1. Komplexe Koordinaten	53
§ 2. Komplexe Strukturen	53
§ 3. Komplexe Vektorkomponenten	55
§ 4. Die zu einer komplexen Struktur gehörige Abbildung J	56
§ 5. Die Abbildung J in einem reellen Koordinatensystem der komplexen Struktur	57
§ 6. Die Abbildung J in einem beliebigen reellen Koordinatensystem	58
§ 7. Fast-komplexe Strukturen	59

2. Kapitel: Die Integrabilität

§ 8. Definition des Torsionstensors	60
§ 9. Das Verschwinden der Torsion als notwendige Bedingung für Integrabilität	61
§ 10. Anwendung auf eine fast-komplexe Struktur der S^n	61
§ 11. Das Verschwinden der Torsion als hinreichende Bedingung für Integrabilität	65

3. Kapitel: Beziehungen zwischen affinen Zusammenhängen und fast-komplexen Strukturen

§ 12. Symmetrische und unsymmetrische Zusammenhänge	68
§ 13. Riemannsche Zusammenhänge; Kählersche Metriken	70
§ 14. Krümmung und Torsion	74

4. Kapitel: Infinitesimale Transformationen

§ 15. Vektorfelder und fast-komplexe Strukturen	75
§ 16. Interpretation der Integrabilitätsbedingung im Komplexen	77

5. Kapitel: Homogene Strukturen

§ 17. Homogene Räume	80
§ 18. Homogene fast-komplexe Strukturen	82
§ 19. Homogene komplexe Strukturen	86
§ 20. Algebraische Charakterisierung der homogenen komplexen Strukturen	91
§ 21. Liesche Gruppen	93

³⁾ Vgl. B. ECKMANN [7].

I. Kapitel.

Komplexe und fast-komplexe Strukturen.

§ 1. Komplexe Koordinaten.

Wir betrachten auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$ eine Koordinatenumgebung U_x , deren Punkte durch die n reellen Koordinaten x^1, \dots, x^n beschrieben werden. Das n -Tupel (x^1, \dots, x^n) fassen wir auf als Punkt eines Euklidischen Raumes E_x^n . Die Punkte des euklidischen Raumes kann man auch durch Angabe von m komplexen Zahlen charakterisieren, indem man je zwei reelle Koordinaten zu einer komplexen Zahl zusammenfaßt; dies sei im folgenden stets vermög

$$x^\mu + i x^{\mu+m} = z^\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \quad i = \sqrt{-1})$$

durchgeführt. Konvention: Griechische Indices sollen stets nur von 1 bis m , lateinische Indices dagegen von 1 bis $n = 2m$ laufen. Ferner schreiben wir zur Abkürzung an Stelle von $\mu + m$ kurz $\bar{\mu}$. Wir setzen also:

$$(1.1) \quad x^\mu + i \cdot x^{\bar{\mu}} = z^\mu.$$

Umgekehrt erhält man die $2m$ reellen Größen x^k aus den m komplexen z^μ als Real- und Imaginärteile, also:

$$(1.2) \quad x^\mu = \frac{z^\mu + \bar{z}^\mu}{2}, \quad x^{\bar{\mu}} = \frac{z^\mu - \bar{z}^\mu}{2i}.$$

Das reelle Koordinatensystem (x^1, \dots, x^n) und das komplexe Koordinatensystem (z^1, \dots, z^m) hängen durch die Gleichungen (1.1) und (1.2) zusammen, welche auch als Koordinatentransformationen betrachtet werden können. Die Tatsache, daß zwischen den (x^k) und den (z^μ) diese spezielle Transformation besteht, wollen wir dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir sagen, das z -Koordinatensystem sei „das zum reellen x -Koordinatensystem gehörige komplexe Koordinatensystem“, und umgekehrt das x -Koordinatensystem „das zum komplexen z -Koordinatensystem gehörige reelle Koordinatensystem“. Beide beschreiben die gleiche Koordinatenumgebung U_x der Mannigfaltigkeit.

§ 2. Komplexe Strukturen.

Es sei nun (y^1, \dots, y^n) ein anderes lokales Koordinatensystem, gültig in U_y , und der Durchschnitt $U_x \cap U_y$ sei nicht leer. Die Punkte dieses Durchschnittes werden dann beschrieben einerseits durch die Koordinaten (x^k) , andererseits durch die (y^i) , so daß wir zwischen den (x^k) und den (y^i) , die diesen Durchschnitt beschreiben, eine eindeutige Transformation haben:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y^k &= y^k(x^1, \dots, x^n) \\ x^i &= x^i(y^1, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Bekanntlich erhält man speziellere Strukturen auf Mannigfaltigkeiten, wenn man verlangt, daß alle zur Beschreibung der Mannigfaltigkeit auftretenden Koordinatentransformationen (2.1) einer gewissen Gruppe von Transformationen angehören. Irgendein weiteres, neu dazugenommenes

lokales Koordinatensystem heißt dann zulässig (bezüglich der betreffenden Struktur), wenn alle dadurch neu auftretenden Koordinatentransformationen ebenfalls der betreffenden Gruppe angehören. Man sagt dafür auch, dieses neue Koordinatensystem gehöre ebenfalls zur betrachteten Struktur.

Sind z. B. alle Transformationen (2.1) differenzierbar, mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante, so sagt man, die Mannigfaltigkeit habe eine differenzierbare Struktur; die Mannigfaltigkeit zusammen mit dieser Struktur heißt dann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Im folgenden sollen alle Mannigfaltigkeiten, auch ohne besondere Erwähnung, in diesem Sinne differenzierbar sein.

Entsprechend definieren wir nun komplexe Strukturen. Wir haben in § 1 in U_x das zum x -Koordinatensystem gehörige Koordinatensystem (z^μ) eingeführt. Ebenso betrachten wir nun in U_y das zum dort gültigen y -Koordinatensystem gehörige komplexe Koordinatensystem, indem wir entsprechend (1.1) setzen:

$$w^\nu = y^\nu + i \cdot \bar{y}^\nu.$$

Die Punkte von $U_x \cap U_y$ werden dann sowohl durch die z^μ , als auch durch die w^ν beschrieben, und es gelten zwischen diesen Koordinaten in $U_x \cap U_y$, analog zu (2.1), Transformationsformeln

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w^\nu &= w^\nu(z^1, \dots, z^m), \\ z^\mu &= z^\mu(w^1, \dots, w^m). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.2) sind durch (2.1) bestimmt und umgekehrt. Offenbar ist es gleichwertig, ob man reelle Koordinatensysteme verwendet oder überall die zugehörigen komplexen Koordinaten. Nützlich ist die Verwendung komplexer Koordinaten in dem nun folgenden Fall, da man sich auf die zu einer „komplexen Struktur“ gehörigen Koordinatensysteme beschränken kann.

Man sagt, es sei auf der Mannigfaltigkeit M^n eine *komplexe Struktur* gegeben, wenn sie derart mit (reellen) Koordinatensystemen überdeckt ist, daß die zwischen den zugehörigen komplexen Koordinaten auftretenden Transformationen alle komplex-analytisch sind, oder kurz: *wenn sie so mit komplexen Koordinatensystemen überdeckt ist, daß alle Koordinatentransformationen (2.2) komplex-analytisch sind.*

Dieser Begriff der komplexen Struktur läßt sich formulieren, ohne überhaupt von komplexen Koordinaten Gebrauch zu machen. Um dies zu tun, berücksichtigen wir die Bedingungen, welchen die reelle Transformation (2.1) genügen muß, damit die entsprechende komplexe Transformation (2.2) komplex-analytisch ist. Bekanntlich lauten diese so: Die x^k und die y^l müssen zur gleichen differenzierbaren Struktur gehören und es müssen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt sein:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}, \\ \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \end{cases}$$

Damit können wir die Definition der komplexen Struktur genau entsprechend der genannten allgemeinen Methode geben: die verwendete Gruppe

besteht aus denjenigen Transformationen (2.1), welche den Beziehungen (2.3) genügen. Es ist nun auch klar, was die Aussage, „ein reelles Koordinatensystem gehört zu einer gegebenen komplexen Struktur“, bedeutet.

§ 3. Komplexe Vektorkomponenten.

Ein kontravariantes Vektorfeld in der Mannigfaltigkeit M^n wird in einem lokalen Koordinatensystem (x^k) beschrieben durch seine Komponenten $a^1_{(x)}, \dots, a^n_{(x)}$, welche reelle Funktionen der Koordinaten x^k sind. Mit dem Index (x) sei, wenn nötig, angedeutet, daß es sich um Komponenten bezüglich des x -Koordinatensystems handelt. In einem y -Koordinatensystem wird das Feld dargestellt durch $a^1_{(y)}, \dots, a^n_{(y)}$. Dann gelten in $U_x \cap U_y$ die Transformationsformeln:

$$(3.1) \quad a^k_{(y)} = t^k_l a^l_{(x)}, \quad \text{wobei } t^k_l = \frac{\partial y^k}{\partial x^l}.$$

Ist (z^μ) das zu den x^k gehörige komplexe Koordinatensystem [vgl. (1.1)], so nennen wir die m komplexen Größen

$$(3.2) \quad A^\mu_{(z)} = a^\mu_{(x)} + i \cdot \bar{a}^\mu_{(x)}$$

die komplexen Komponenten des Vektorfeldes bezüglich des z -Koordinatensystems. Wir fassen sie auf als Funktionen der z^μ . Durch die komplexen Komponenten (bezüglich des z -Koordinatensystems) sind die reellen Vektorkomponenten (bezüglich des zugehörigen x -Koordinatensystems) eindeutig festgelegt und umgekehrt.

Wir vergleichen nun die $A^\mu_{(z)}$ im Durchschnitt $U_x \cap U_y$ zweier reeller Koordinatensysteme mit den komplexen Komponenten $A^\mu_{(w)}$ bezüglich des zu den y^k gehörigen komplexen w -Koordinatensystems,

$$A^\mu_{(w)} = a^\mu_{(y)} + i \cdot \bar{a}^\mu_{(y)}.$$

Es ist also:

$$A^\mu_{(w)} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^l} \cdot a^l_{(x)} + i \cdot \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial \bar{x}^l} \cdot \bar{a}^l_{(x)}.$$

Drücken wir die $a^l_{(x)}$ durch die $A^\mu_{(z)}$ aus gemäß

$$a^\mu_{(x)} = \frac{A^\mu_{(z)} + \bar{A}^\mu_{(z)}}{2}, \quad \bar{a}^\mu_{(x)} = \frac{A^\mu_{(z)} - \bar{A}^\mu_{(z)}}{2i},$$

so wird

$$\begin{aligned} A^\mu_{(w)} &= \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^v} + i \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial \bar{x}^v} \right) \frac{A^\nu_{(z)} + \bar{A}^\nu_{(z)}}{2} + \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial \bar{x}^v} + i \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial x^v} \right) \frac{A^\nu_{(z)} - \bar{A}^\nu_{(z)}}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^v} + \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial \bar{x}^v} + i \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial x^v} - i \frac{\partial y^\mu}{\partial \bar{x}^v} \right) A^\nu_{(z)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^v} - \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial \bar{x}^v} + i \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial x^v} + i \frac{\partial y^\mu}{\partial \bar{x}^v} \right) \bar{A}^\nu_{(z)}. \end{aligned}$$

Das sind Gleichungen der Form

$$(3.3) \quad A^\mu_{(w)} = \alpha^\mu_\nu A^\nu_{(z)} + \beta^\mu_\nu \bar{A}^\nu_{(z)}.$$

Man bemerkt: Dann und nur dann sind die $\beta_\nu^\mu = 0$, wenn

$$\text{und} \quad \begin{aligned} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\bar{\nu}}} &= 0 \\ \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^{\bar{\nu}}} &= 0. \end{aligned}$$

Das sind aber gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (2.3). Sind diese erfüllt, so vereinfacht sich auch der Ausdruck für die α_ν^μ ; dann ist nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^\mu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} + i \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial w^\mu}{\partial z^\nu} \end{aligned}$$

Diese partielle Ableitung hat nun einen Sinn, da ja in diesem Falle die w^μ komplex-analytische Funktionen der z^μ sind.

Das Ergebnis ist also: Wenn die Transformation (2.2) komplex-analytisch ist, dann gelten für die diesbezüglichen komplexen Vektorkomponenten in $U_x \cap U_y$ die einfachen Transformationsformeln:

$$(3.4) \quad A_{(z)}^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial z^\nu} A_{(z)}^\nu.$$

Während (3.2) die Komponenten $A_{(z)}^\mu$ ausdrückt durch die Komponenten $a_{(x)}^k$ bezüglich des zum z -Koordinatensystem gehörigen reellen Koordinatensystems (x^k) , wollen wir schließlich noch (in $U_x \cap U_y$) die $A_{(z)}^\mu$ ausdrücken durch die Komponenten $a_{(y)}^l$, wenn (y^l) ein ganz beliebiges, anderes reelles Koordinatensystem ist. Da entsprechend zu (3.1) gilt

$$a_{(x)}^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^l} a_{(y)}^l,$$

erhalten wir aus 3.2:

$$\begin{aligned} A_{(z)}^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^l} a_{(y)}^l + i \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial y^l} a_{(y)}^l, \\ (3.5) \quad A_{(z)}^\mu &= \frac{\partial z^\mu}{\partial y^l} a_{(y)}^l. \end{aligned}$$

Betrachten wir den Tangentialraum eines Punktes $P \in M^n$, so stellen wir also folgendes fest: Durch das Einführen eines komplexen Koordinatensystems in einer Umgebung von P wird der genannte reelle Vektorraum in eineindeutige Beziehung gesetzt mit einem komplexen Vektorraum, durch das Einführen eines anderen komplexen Koordinatensystems mit einem anderen komplexen Vektorraum. Letztere stehen also auch in eineindeutiger Beziehung, und zwar ist diese gemäß 3.4 ein Isomorphismus der beiden komplexen Vektorräume, wenn die beiden komplexen Koordinatensysteme komplex-analytisch zusammenhängen, während sie im allgemeinen Falle kein Isomorphismus ist.

§ 4. Die zu einer komplexen Struktur gehörige Abbildung J .

Wir betrachten zunächst auf einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (gerader Dimension) nur eine Koordinatenumgebung U_x und defi-

nieren dort, unter Verwendung des in U_α gültigen komplexen Koordinatensystems (z''), eine lineare Abbildung der kontravarianten Vektoren: Dem Vektor a mit den Komponenten $A_{(z)}^\mu$ ordnen wir zu den Bildvektor $b = J_{(z)}(a)$ mit den Komponenten $B_{(z)}^\nu$ gemäß

$$B_{(z)}^\nu = i \cdot A_{(z)}^\mu.$$

Wir bezeichnen also diese Abbildung mit $J_{(z)}$, wobei der Index (z) andeuten soll, daß die Abbildung definiert ist bei Verwendung des Koordinatensystems (z''). Die so definierte Abbildung der Vektoren wird von der Wahl des lokalen Koordinatensystems abhängig sein. Wir untersuchen nun, wann wir unter Verwendung verschiedener Koordinatensysteme die gleiche Abbildung erhalten.

$J_{(z)}(a)$ hat also die Komponenten $B_{(z)}^\mu = i \cdot A_{(z)}^\mu$ bezüglich des z -Koordinatensystems, somit gemäß (3.3) die Komponenten

$$(4.1) \quad B_{(w)}^\mu = i \alpha_\nu^\mu A_{(z)}^\nu - i \beta_\nu^\mu \bar{A}_{(z)}^\nu$$

bezüglich des w -Koordinatensystems. Andererseits hat a die Komponenten $A_{(w)}^\mu = \alpha_\nu^\mu A_{(z)}^\nu + \beta_\nu^\mu \bar{A}_{(z)}^\nu$ bezüglich des w -Koordinatensystems. Daher hat $J_{(w)}(a)$ folgende Komponenten bezüglich des w -Koordinatensystems:

$$(4.2) \quad i \cdot A_{(w)}^\mu = i \alpha_\nu^\mu A_{(z)}^\nu + i \beta_\nu^\mu \bar{A}_{(z)}^\nu.$$

Vergleich von (4.1) und (4.2) ergibt: $J_{(z)}$ und $J_{(w)}$ sind dann und nur dann gleich, wenn die Größen $\beta_\nu^\mu = 0$ sind. Das ist aber, gemäß § 3, gleichbedeutend damit, daß zwischen den z'' und den w'' die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bestehen. Wir haben also

Satz 1. Innerhalb der zu einer komplexen Struktur gehörigen Koordinatensysteme ist die Multiplikation der komplexen Vektorkomponenten mit i eine vom Koordinatensystem unabhängige lineare Abbildung.

Satz 2 (Eindeutigkeitssatz). Ist die Multiplikation der komplexen Vektorkomponenten mit i im z -Koordinatensystem und im w -Koordinatensystem die gleiche Abbildung, dann hängen diese beiden Koordinatensysteme (in ihrem Durchschnitt) durch eine komplex-analytische Transformation zusammen.

Satz 1 besagt also, daß zu einer komplexen Struktur eine wohlbestimmte Abbildung gehört, die wir nun kurz mit J (ohne Index) bezeichnen.

Satz 2 besagt, daß eine komplexe Struktur durch die zugehörige Abbildung J wohlbestimmt ist (nämlich durch die Gesamtheit derjenigen komplexen Koordinatensysteme, in denen sich diese Abbildung als Multiplikation der komplexen Vektorkomponenten mit i ausdrückt).

Eine komplexe Struktur wird also durch die Abbildung J vollständig charakterisiert. Wir werden an Stelle der komplexen Strukturen stets die dazugehörige Abbildung J untersuchen.

§ 5. Die Abbildung J in einem reellen Koordinatensystem der komplexen Struktur.

In U_α wird durch das Koordinatensystem (z'') [vgl. (1.1)] eine komplexe Struktur definiert. Wie drückt sich die Abbildung J aus im x -Koordinaten-

system? Es ist, $b = J(a)$ gesetzt

$$B_{(x)}^{\mu} = i \cdot A_{(x)}^{\mu}.$$

Also, gemäß (3.2)

$$\begin{aligned} b_{(x)}^{\mu} + i \cdot \bar{b}_{(x)}^{\mu} &= i \cdot (a_{(x)}^{\mu} + i \cdot \bar{a}_{(x)}^{\mu}) \\ &= -\bar{a}_{(x)}^{\mu} + i \cdot a_{(x)}^{\mu}. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$(5.1) \quad \begin{cases} b_{(x)}^{\mu} = -\bar{a}_{(x)}^{\mu}, \\ \bar{b}_{(x)}^{\mu} = a_{(x)}^{\mu}. \end{cases}$$

Dies ist von der Form

$$b_{(x)}^i = a_{(x)}^i \cdot a_{(x)}^k,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{(x)}^{\mu} &= 0 \quad (k \neq \bar{\mu}), \quad a_{(x)}^{\bar{\mu}} = 0 \quad (k \neq \mu), \\ a_{(x)}^{\mu} &= -1, \quad a_{(x)}^{\bar{\mu}} = 1. \end{aligned}$$

Als Matrix geschrieben:

$$(5.2) \quad S = A = \left(a_{(x)}^i \right) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

J wird also durch einen gemischten Tensor beschrieben, der diese spezielle Gestalt hat, die wir mit S bezeichnen. Offenbar gilt $S \cdot S = -E$, was nichts anderes besagt, als daß $J^2 = -\text{Identität}$ ist. (Mit E bezeichnen wir die Einheitsmatrix; ob n -reihig oder m -reihig, ist ohne weitere Angabe stets klar ersichtlich.)

§ 6. Die Abbildung J in einem beliebigen reellen Koordinatensystem.

Wir betrachten die durch eine komplexe Struktur bestimmte Abbildung J und drücken diese in einem beliebigen reellen Koordinatensystem aus. (x^k) sei ein reelles Koordinatensystem der gegebenen komplexen Struktur, (y^k) ein ganz beliebiges. Die Komponenten der Abbildung J transformieren sich bekanntlich in $U_x \cap U_y$ als Größen eines gemischten Tensors gemäß

$$(6.1) \quad a_{(y)}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} a_{(x)}^j.$$

Dies können wir auch als Matrizenprodukt schreiben, indem wir

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) = (v_k^i) = T \quad \text{und} \quad \frac{\partial x^k}{\partial y^j} = (u_j^k) = U = T^{-1}$$

setzen, und benützen, daß nach § 5 $a_{(x)}^k$ die Gestalt S hat:

$$A = T S T^{-1}.$$

Statt A schreiben wir kurz A . Natürlich gilt auch

(9)

$$A^2 = A \cdot A = -E;$$

denn

$$A A = T^{-1} S T T^{-1} S T = T^{-1} S S T = T^{-1} (-E) T = -E.$$

In einem beliebigen Koordinatensystem drückt sich die Abbildung J also aus durch einen gemischten Tensor a_k^i mit der Eigenschaft $A^2 = -E$, oder tensoriell geschrieben:

$$a_k^i a_j^k = -\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ -1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Dies kann man natürlich auch ohne Rechnung einsehen, da ja $J^2 = -$ Identität ist.

Für die Untersuchung der Abbildung J in einem Punkt ist dies auch bereits die allgemeinste Aussage, die gemacht werden kann, denn es läßt sich leicht zeigen, daß jede Matrix A mit $A^2 = -E$ ähnlich ist zur speziellen Matrix S : es existiert T , mit Determinante $\neq 0$ derart, daß $A = T^{-1} S T$ ist.

Da in einem Punkte die partiellen Ableitungen $T = (t_k^i) = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}$ keiner weiteren Bedingung unterworfen sind, gibt es stets eine Koordinatentransformation, die im betrachteten Punkt A auf die Gestalt S transformiert. Für die Untersuchung der Abbildung J in einer ganzen (wenn auch kleinen) Umgebung läßt sich das hingegen nicht mehr behaupten, da die t_k^i als partielle Ableitungen nicht willkürlich gewählt werden können. Analog kann man einen metrischen Fundamentaltensor in einem Punkt stets auf euklidische Form bringen, in einer ganzen Umgebung hingegen im allgemeinen nicht.

Es sei noch folgendes bemerkt: Gehören das x - und das y -Koordinatensystem beide zur gleichen komplexen Struktur, so hat, gemäß § 4 und § 5, die Abbildung J in beiden die spezielle Gestalt S . Das kann man auch ganz im Reellen zeigen: es ist $T^{-1} S T = S$, falls die partiellen Ableitungen $T = (t_k^i)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Umgekehrt: wenn die Abbildung in zwei Koordinatensystemen die spezielle Gestalt S hat, d. h. wenn $T^{-1} S T = S$ gilt (in $U_x \cap U_y$), so gehören diese beiden Koordinatensysteme zur gleichen komplexen Struktur. $T^{-1} S T = S$, bzw. $S T = T S$, sind nämlich genau die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir brauchen dies nicht näher auszuführen, da das gleiche schon in § 4 (Satz 1 und 2) durchgeführt worden ist, in komplexer Schreibweise.

§ 7. Fast-komplexe Strukturen.

Definition: Unter einer fast-komplexen Struktur in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit verstehen wir ein Tensorfeld a_k^i (gemischter Tensor, differenzierbar) mit der Eigenschaft

$$a_k^i \cdot a_j^k = -\delta_j^i.$$

Statt von einem Tensor können wir auch von einer Abbildung der Tangentialvektoren sprechen; diese sei J genannt.

Satz 1, § 4, besagt dann folgendes: Zu einer komplexen Struktur gehört eine wohlbestimmte fast-komplexe Struktur. Solche fast-komplexen Strukturen, die aus einer komplexen hervorgehen, wollen wir *integrabel* nennen.

Satz 2, § 4, besagt dann folgendes: Eine fast-komplexe Struktur gehört zu höchstens einer komplexen Struktur, eine integrable fast-komplexe Struktur somit zu genau einer komplexen Struktur.

Es stellt sich hier die Frage, wie man einer gegebenen fast-komplexen Struktur ansehen kann, ob sie integrabel sei. Bei der Untersuchung dieser Frage spielt ein gewisser Tensor, den man aus einer fast-komplexen Struktur durch einen Differentiationsprozeß erhält, die entscheidende Rolle (analog etwa dem Krümmungstensor, der zu einer Metrik gehört). Wir nennen ihn den Torsionstensor der fast-komplexen Struktur.

II. Kapitel.

Die Integrabilität.

§ 8. Definition des Torsionstensors.

Gegeben sei die fast-komplexe Struktur a_k^i . Wir bilden

$$(8.1) \quad a_{kj}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} \right).$$

Diese Größen a_{kj}^i bilden keinen Tensor. Wir brauchen sie nur als Hilfsgrößen und definieren nun als *Torsionstensor*:

$$(8.2) \quad t_{kl}^i = \frac{1}{2} (a_{pk}^i a_l^p - a_{pl}^i a_k^p).$$

Um zu beweisen, daß diese Größen einen Tensor bilden, könnte man nachrechnen, wie sie sich bei einer Koordinatentransformation transformieren, und würde die bekannte Transformationsregel für einen 1-fach kontra- und 2-fach kovarianten Tensor finden, wobei allerdings wesentlich zu benutzen ist, daß a_k^i nicht irgendein gemischter Tensor ist, sondern der Beziehung $a_k^i a_j^k = -\delta_j^i$ genügt⁴⁾.

Wir wollen den Beweis der Tensornatur anders führen, unter Benutzung von kovarianten Ableitungen (bezeichnet mit D_i) bezüglich irgendeines beliebigen symmetrischen affinen Zusammenhanges Γ_{kj}^i , die von Tensoren stets wieder zu Tensoren führen. Wir bilden analog zu (8.1) und (8.2):

$$(8.3) \quad A_{kj}^i = \frac{1}{2} (D_k a_j^i - D_j a_k^i)$$

$$(8.4) \quad \tau_{kl}^i = \frac{1}{2} (A_{pk}^j a_l^p - A_{pl}^j a_k^p).$$

Wir zeigen nun, daß für den Tensor τ_{kl}^i gilt: $\tau_{kl}^i = t_{kl}^i$, womit dann der Beweis erbracht ist. Es ist:

$$A_{kj}^i = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{hk}^i a_j^h - \Gamma_{jk}^h a_h^i \right) - \left(\frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} + \Gamma_{hj}^i a_k^h - \Gamma_{kj}^h a_h^i \right) \right\}.$$

⁴⁾ Unabhängig von uns wurde von A. NIJENHUIS [" X_{n-1} -forming sets of eigenvectors", Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam A, Vol. LIV, 200–212, 1951] für beliebige gemischte Tensorfelder a_k^i ein Tensor h_{kl}^i als Differentialkomitante gefunden; im Falle $a_k^i a_j^k = -\delta_j^i$ stimmt er mit t_{kl}^i überein.

Indem wir das erste und vierte Glied zusammenfassen und bemerken, daß sich das dritte und sechste Glied wegen der Symmetrie der Γ_{kj}^h wegheben, haben wir:

$$A_{kj}^i = a_{kj}^i + \frac{1}{2} (\Gamma_{hk}^i a_j^h - \Gamma_{hj}^i a_k^h).$$

Somit

$$\begin{aligned} \tau_{kl}^i &= \frac{1}{2} \{ a_{pk}^j a_l^p + \frac{1}{2} (\Gamma_{hp}^j a_k^h - \Gamma_{hk}^j a_p^h) a_l^p - a_{pl}^j a_k^p - \frac{1}{2} (\Gamma_{hp}^j a_l^h - \Gamma_{hl}^j a_p^h) a_k^p \} \\ &= \frac{1}{2} (a_{pk}^j a_l^p - a_{pl}^j a_k^p) + \frac{1}{4} \{ \Gamma_{hp}^j a_k^h a_l^p - \Gamma_{hk}^j a_p^h a_l^p - \Gamma_{hp}^j a_l^h a_k^p + \Gamma_{hl}^j a_p^h a_k^p \} \\ &= t_{kl}^i + \frac{1}{4} \{ \Gamma_{hp}^j a_k^h a_l^p + \Gamma_{lk}^j a_l^p - \Gamma_{ph}^j a_l^p a_k^h - \Gamma_{kl}^j \}. \end{aligned}$$

In dieser Klammer heben sich das erste und dritte, sowie das zweite und vierte Glied weg. Es wurde sowohl $a_k^j a_j^i = -\delta_j^i$, als auch $\Gamma_{kl}^j = \Gamma_{lk}^j$ benutzt. Es bleibt also

$$(8.5) \quad \tau_{kl}^i = t_{kl}^i.$$

Wir stellen somit fest: Statt den Torsionstensor gemäß (8.1) und (8.2) mit Hilfe von partiellen Ableitungen zu berechnen, können wir an Stelle der partiellen Ableitungen ebensogut kovariante Ableitungen bezüglich eines symmetrischen affinen Zusammenhanges verwenden [(8.3) und (8.4)]. Die Wahl dieses Zusammenhanges spielt für die Bildung des Torsionstensors gar keine Rolle; er muß nur symmetrisch sein. Wir werden später davon Gebrauch machen.

§ 9. Das Verschwinden der Torsion als notwendige Bedingung für Integrabilität.

Nehmen wir an, die fast-komplexe Struktur J sei integrabel, werde also durch eine komplexe Struktur induziert. Verwenden wir ein reelles Koordinatensystem, das zu dieser komplexen Struktur gehört, so hat J in diesem gemäß § 5 die kanonische Gestalt S . Insbesondere sind dann also in diesem Koordinatensystem alle Komponenten a_k^j konstant, ihre partiellen Ableitungen verschwinden alle, und somit wird $t_{kl}^i = 0$. Da aber die t_{kl}^i Tensorkomponenten sind, ist dieses Resultat unabhängig vom benutzten Koordinatensystem. Wir haben also den

Satz. Damit eine fast-komplexe Struktur integrabel ist, ist notwendig, daß die zugehörige Torsion identisch verschwindet.

§ 10. Anwendung auf eine fast-komplexe Struktur der S^8 .

Ausgehend von der Multiplikation der Cayleyschen Zahlen erhält man bekanntlich auf der Sphäre S^8 eine fast-komplexe Struktur. Wir werden zeigen, daß in einem Punkte der Torsionstensor nicht 0 ist; daraus folgt, daß diese fast-komplexe Struktur nicht zu einer komplexen Struktur der S^8 gehört.

Die Cayleyschen Zahlen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$(10.1) \quad \alpha = A + A^0 e_0 + A^1 e_1 + \cdots + A^4 e_4 = A + \alpha,$$

wobei A, A^0, \dots, A^4 reelle Zahlen sind, die e_i die komplexen Einheiten. Ist $A = 0$, so heißt die Oktave α rein imaginär. Die Oktaven bilden bezüglich der Addition einen 8-dimensionalen Vektorraum über dem reellen Zahlkörper, die rein imaginären einen 7-dimensionalen linearen Unterraum R^7 . Die Multi-

plikation der Oktaven ist distributiv und ist festgelegt durch folgende Produkte der imaginären Einheiten e_i :

$e_i^2 = -1$ ($i = 0, 1, \dots, 6$), $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ ($i \neq j$; $i, j = 0, 1, \dots, 6$),
 $e_0 \cdot e_1 = e_2$, $e_0 \cdot e_3 = e_4$, $e_0 \cdot e_5 = e_6$, $e_1 \cdot e_4 = e_6$, $e_1 \cdot e_5 = -e_6$, $e_2 \cdot e_3 = e_6$, $e_2 \cdot e_4 = e_6$,
 sowie die 14 weiteren Gleichungen, die man aus den letzten 7 durch zyklisches Vertauschen der Indices erhält. Die Multiplikationstafel sieht also folgendermaßen aus:

(10.2)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_0		e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$
e_1	$-e_2$		e_0	$-e_6$	e_6	e_2	$-e_4$
e_2	e_1	$-e_0$		e_6	e_5	$-e_4$	$-e_3$
e_3	$-e_4$	e_5	$-e_6$		e_0	$-e_1$	e_2
e_4	e_3	$-e_5$	$-e_6$	$-e_0$		e_2	e_1
e_5	$-e_6$	$-e_2$	e_4	e_1	$-e_3$		e_0
e_6	e_5	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$	$-e_0$	

In der Hauptdiagonalen steht überall -1 ; aus einem nachher ersichtlichen Grund haben wir diese Stellen freigelassen. Setzen wir analog (10.1)

$$\xi = X + \sum_0^6 X^i e_i = X + x,$$

so ist

$$\xi \cdot \alpha = XA - \sum_0^6 X^i A^i + Xa + Aa + \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} X^i A^k e_i \cdot e_k,$$

also für rein imaginäre Oktaven $\xi = x$, $\alpha = a$

$$(10.3) \quad x \cdot a = - \sum_0^6 X^i A^i + \sum_{\substack{i,k=0 \\ i \neq k}}^6 X^i A^k e_i \cdot e_k.$$

$\sum_0^6 X^i A^i$ ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren $x, a \in R^7$. $\sum_{i \neq k} X^i A^k e_i \cdot e_k$ ist wieder eine rein imaginäre Oktave, d. h. also ein Vektor aus R^7 , der das Vektorprodukt von x und a genannt und mit $x \times a$ bezeichnet wird. Dieses Vektorprodukt im R^7 hat die üblichen Eigenschaften eines Vektorproduktes; wir brauchen nur seine Bilinearität und die Orthogonalität des Produktvektors auf den beiden Faktoren. Die Vektorprodukte unserer 7 Grundvektoren e_i werden durch die Multiplikationstafel 10.2 gegeben, nur steht in der Hauptdiagonalen nun überall statt -1 der Nullvektor des R^7 . Es ist also

$$x \times a = \sum_{i,k} X^i A^k e_i \times e_k,$$

wobei wir in der Doppelsumme $i = k$ nicht mehr ausschließen müssen. Setzt man $e_i \times e_k = \sum_0^6 M_{ik}^j e_j$, wobei die M_{ik}^j gleich 0, +1 oder -1 sind, so hat man

$$x \times a = \sum_{j,i,k=0}^6 X^i A^k M_{ik}^j e_j = \sum_{j=0}^6 \left(\sum_{k=0}^6 \left(\sum_{i=0}^6 X^i M_{ik}^j \right) A^k \right) e_j.$$

Das ist von der Form

$$(10.4) \quad x \times a = \sum_j \left(\sum_k A_k^j A^k \right) e_j.$$

Man findet anhand der Multiplikationstabelle (10.2):

$$A_0^0 = X^i M_{i0}^0 = 0; \quad A_1^0 = X^i M_{i1}^0 = -X^2; \quad A_2^0 = X^i M_{i2}^0 = X^1, \text{ usw.,}$$

also lautet die Matrix A_k^j :

$$(10.5) \quad \begin{pmatrix} A_0^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_6^0 \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ A_6^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_6^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -X^2 & X^1 - X^4 & X^3 - X^5 & X^6 \\ X^3 & 0 & -X^0 & X^5 - X^4 - X^3 & X^4 & X^1 \\ -X^1 & X^0 & 0 & -X^6 - X^5 & X^4 & X^3 \\ X^4 - X^3 & X^6 & 0 & -X^0 & X^1 - X^2 \\ -X^3 & X^6 & X^5 & X^0 & 0 & -X^2 - X^1 \\ X^6 & X^3 - X^4 - X^1 & X^5 & 0 & -X^0 \\ -X^5 - X^4 - X^3 & X^3 & X^1 & X^0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt $x \times a$ im R^7 nur für die folgende Situation: x sei ein Einheitsvektor, a zu x senkrecht. Der erste Vektor x bedeute dann einen Punkt P auf der Einheitssphäre S^6 im R^7 ; a können wir als Tangentialvektor an die S^6 im Punkte P auffassen, und ebenso das Vektorprodukt $x \times a$, da es ja insbesondere auf dem ersten Faktor senkrecht steht. $J a = x \times a$ definiert dann eine lineare Abbildung J der Tangentialvektoren a der S^6 in jedem Punkt. Für diese Abbildung gilt nun $J^2 = -\text{Identität}$ (es handelt sich also um eine fast-komplexe Struktur der S^6). Um dies zu beweisen, müssen wir also zeigen, daß $x \times (x \times a) = -a$ ist. Dies folgt leicht aus dem für das Cayleysche Produkt gültigen Alternativgesetz

$$\xi \cdot (\xi \cdot \alpha) = (\xi \cdot \xi) \cdot \alpha:$$

In unserem Falle ($\xi = x$, $\alpha = a$) ist, weil x zu a senkrecht steht, $x \cdot a = x \times a$, und weil $x \times a$ auf x senkrecht steht, $x \cdot (x \times a) = x \times (x \times a)$. Da ferner x den Betrag 1 hat, ist $x \cdot x = -1$ [vgl. (10.3)], und somit wird aus dem Alternativgesetz gerade $x \times (x \times a) = -a$.

Wir drücken nun diese Abbildung J in lokalen Koordinaten der S^6 aus. In einer Umgebung des Punktes $P_0 = (X^0, X^1, \dots, X^6) = (1, 0, \dots, 0) \in S^6$ wählen wir als lokale Koordinaten x^1, \dots, x^6 auf der S^6 die Größen

$$(10.6) \quad x^i = X^i \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Nach (10.4) haben wir, wenn wir $J a = b$ setzen und die Komponenten von b^i im (X^0, \dots, X^6) -Koordinatensystem mit B^j bezeichnen:

$$(10.7) \quad B^j = \sum_0^6 A_k^j A^k \quad (j = 0, 1, \dots, 6),$$

wobei (A_k^j) die Matrix (10.5) ist. Im lokalen Koordinatensystem (x^k) der S^6 habe a (bzw. b) die Komponenten a^i (bzw. b^i), $i = 1, 2, \dots, 6$, und J sei beschrieben durch

$$(10.8) \quad b^j = \sum_1^6 a_k^j a^k \quad (j = 1, 2, \dots, 6);$$

wir haben die a_k^j zu berechnen. Wegen $x^i = X^i$ gilt für die Vektorkomponenten

$$(10.9) \quad a^i = A^i \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Da a tangential an die S^6 sein soll, ist durch die A^i ($i = 1, \dots, 6$) auch A^0 bestimmt: aus $\sum_0^6 A^k X^k = 0$ folgt

$$(10.10) \quad A^0 = -\frac{\sum_1^6 A^i X^i}{X^0}.$$

Gemäß (10.7) und (10.9) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} b^j &= \sum_1^6 A_k^j A^k + A_0^j A^0 = \sum_1^6 A_k^j a^k - A_0^j \sum_1^6 \frac{a^i X^i}{X^0} \\ &= \sum_1^6 \left(A_k^j - A_0^j \frac{X^k}{X^0} \right) a^k \quad (j = 1, \dots, 6), \end{aligned}$$

und für die a_k^j in (10.8)

$$(10.11) \quad a_k^j = A_k^j - A_0^j \frac{X^k}{X^0},$$

wobei $X^j = x^j$ ($j = 1, \dots, 6$) und $X^0 = \sqrt{1 - \sum_1^6 (x^i)^2}$.

Berechnung des Torsionstensors: Es ist (für $k \neq l$)

$$\frac{\partial a_k^i}{\partial x^l} = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^l} - \frac{\partial A_0^i}{\partial x^l} \cdot \frac{X^k}{X^0} - A_0^i \frac{\frac{\partial X^k}{\partial x^l} X^0 - X^k \frac{\partial X^0}{\partial x^l}}{(X^0)^2}.$$

Im Punkte $(X^0, \dots, X^6) = (1, 0, \dots, 0)$, in dem wir die Torsion untersuchen wollen, ist aber $\frac{\partial X^0}{\partial x^l} = 0$, also $\frac{\partial a_k^i}{\partial x^l} = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^l} = \frac{\partial A_k^i}{\partial X^l}$ ($j, k, l = 1, 2, \dots, 6$), und

$$(10.12) \quad a_{lk}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_k^j}{\partial X^l} - \frac{\partial A_l^j}{\partial X^k} \right).$$

Im betrachteten Punkt P_0 ist gemäß (10.11) $a_q^p = A_q^p$, und aus (10.5) entnehmen wir

$$a_1^p = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 2 \\ 0 & \text{für } p \neq 2 \end{cases} \quad a_5^p = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 6 \\ 0 & \text{für } p \neq 6; \end{cases}$$

insbesondere ist also

$$(10.13) \quad t_{15}^4 = \frac{1}{2} (a_{p1}^4 a_5^p - a_{p5}^4 a_1^p) = \frac{1}{2} (a_{01}^4 - a_{25}^4).$$

Gemäß (10.12) ist $a_{01}^4 = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$, und $a_{25}^4 = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$, also

$$t_{15}^4 = 1.$$

Damit ist gezeigt, daß die betrachtete fast-komplexe Struktur der S^8 nicht zu einer komplexen gehört. Dabei bleibt allerdings die Frage, ob es auf der S^8 nicht sonst eine komplexe Struktur gebe, unbeantwortet.

§ 11. Das Verschwinden der Torsion als hinreichende Bedingung für Integrabilität.

Wir haben in § 9 gesehen, daß für die Integrabilität einer fast-komplexen Struktur das Verschwinden ihrer Torsion notwendig ist. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist unter der Voraussetzung, daß die betrachtete fast-komplexe Struktur reell-analytisch ist.

Gegeben sei also eine reell-analytische fast-komplexe Struktur a_k^j , und es sei $t_{kl}^j = 0$. Es ist:

$$\begin{aligned} a_{kl}^j (a_p^k - i \delta_p^k) (a_q^l - i \delta_q^l) &= a_{kl}^j a_p^k a_q^l - a_{pq}^j - i (a_p^j a_q^l + a_{kq}^j a_p^k) \\ &= a_{kl}^j a_p^k a_q^l + a_{lq}^j a_p^k - i (a_{kq}^j a_p^k - a_{lp}^j a_q^k) \\ &= a_p^k (a_{lq}^j a_k^l - a_{lk}^j a_q^l) - 2 i \delta_{pq}^j \\ &= 2 a_p^k \delta_{qk}^j - 2 i \delta_p^k \delta_{qk}^j = 2 (a_p^k - i \delta_p^k) \delta_{qk}^j. \end{aligned}$$

Wegen $\delta_{qk}^j = 0$ ist also

$$(11.1) \quad a_{kl}^j (a_p^k - i \delta_p^k) (a_q^l - i \delta_q^l) = 0.$$

Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$(11.2) \quad f_k^j dx^k = (a_k^j + i \delta_k^j) dx^k = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Von diesem homogenen Gleichungssystem können wir leicht explizit ein vollständiges Lösungssystem angeben, nämlich

$$(11.3) \quad dx_{(p)}^k = a_p^k - i \delta_p^k \quad (p = 1, \dots, n).$$

Für jedes p ist dies eine Lösung:

$$\begin{aligned} (a_k^j + i \delta_k^j) (a_p^k - i \delta_p^k) &= a_k^j a_p^k + i \delta_k^j a_p^k - i \delta_p^k a_k^j + \delta_k^j \delta_p^k \\ &= -\delta_p^j + i a_p^j - i a_p^j + \delta_p^j = 0. \end{aligned}$$

Ferner hat die Matrix des Systems (11.2), $A + iE$, den Rang m ; die Lösungsmannigfaltigkeit muß also die Dimension $n - m = m$ haben. Die Matrix unserer n Lösungen (11.3) ist aber $A - iE$ und hat den Rang m ; (daß $A + iE$ und $A - iE$ den Rang m haben, folgt daraus, daß A die Eigenwerte $+i$ und $-i$ hat, jeden m -fach). Somit spannen die Lösungen (11.3) die ganze Lösungsmannigfaltigkeit von (11.2) auf. Gleichung (11.1) besagt:

$$a_{kl}^j dx_{(p)}^k dx_{(q)}^l = 0.$$

Da aber die $dx_{(p)}^k$ den ganzen Lösungsraum von (11.2) aufspannen, ist $a_{kl}^j dx^k \delta x^l = 0$ für beliebige Lösungen (dx^k) und (δx^l) von (11.2). In $a_{kl}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_l^j}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k^j}{\partial x^l} \right)$

dürfen wir die partiellen Ableitungen der a_k^i durch die der f_k^i ersetzen. Wir haben somit:

$$\left(\frac{\partial f_k^j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i^j}{\partial x^k} \right) dx^k \delta x^i = 0,$$

wenn (dx^k) und (δx^i) Lösungen von $f_k^j dx^k = 0$ sind. Dies sind aber genau die Bedingungen von FROBENIUS, aus denen folgt, daß das Pfaffsche System $f_k^j dx^k = 0$ (11.2) vollständig integrierbar ist. Demzufolge gibt es (in einer hinreichend kleinen Umgebung) m ($m = \text{Rang des Systems}$) unabhängige komplexe Funktionen

$$z^\mu(x^1, \dots, x^n) = u^\mu(x^1, \dots, x^n) + i v^\mu(x^1, \dots, x^n),$$

so, daß das System $dz^\mu = 0$, oder ausführlich

$$(11.4) \quad \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} dx^k = \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^k} + i \frac{\partial v^\mu}{\partial x^k} \right) dx^k = 0,$$

äquivalent ist mit dem System (11.2).

Da wir ja die Lösungen von (11.2) kennen, ist insbesondere $\frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} (a_p^k - i \delta_p^k) = 0$ oder umgeformt

$$(11.5) \quad \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} a_p^k = i \frac{\partial z^\mu}{\partial x^p}.$$

Die n reellen Funktionen u^μ und v^μ können wir als reelle Koordinaten einführen, die z^μ bilden dann das zugehörige komplexe Koordinatensystem im Sinne von § 1. Dies wird durch folgende Überlegung sofort klar: Das reelle Gleichungssystem

$$(11.6) \quad \frac{\partial u^\mu}{\partial x^k} \xi^k = 0, \quad \frac{\partial v^\mu}{\partial x^k} \xi^k = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

habe die reelle Lösung (ξ^1, \dots, ξ^n) . Dann ist $\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^k} + i \frac{\partial v^\mu}{\partial x^k} \right) \xi^k = 0$ und wegen der Äquivalenz der Systeme (11.4) und (11.2) also auch $(a_k^i + i \delta_k^i) \xi^k = 0$, woraus sofort folgt, daß $(\xi^1, \dots, \xi^n) = (0, \dots, 0)$ sein muß. Das System (11.6) hat also nur die Nulllösung, seine Determinante ist also $\neq 0$. Diese Determinante ist aber gerade die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^m)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}$.

Verwenden wir nun also die z^μ als lokale komplexe Koordinaten und drücken wir die Abbildung J aus unter Verwendung zugehöriger komplexer Vektorkomponenten. Es sei $b = J a$. Im (x^k) -Koordinatensystem heißt dies $b^j = a_k^j a^k$.

Die komplexen Komponenten von a und b lauten gemäß 3.5 $A^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} a^k$ bzw.

$B^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} b^k$. Also:

$$B^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^i} b^i = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^i} a_k^i a^k,$$

wegen (11.5)

$$= i \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} a^k = i A^\mu.$$

Wir sehen: Im (z^μ) -Koordinatensystem ist die gegebene Abbildung J gerade die Multiplikation der komplexen Vektorkomponenten mit i .

So können wir überall in hinreichend kleinen Umgebungen komplexe Koordinaten einführen, in denen die Abbildung J die Multiplikation mit i bedeutet. Dadurch haben wir aber eine komplexe Struktur im großen, denn nach Satz 2, § 4, sind die auftretenden Koordinatentransformationen alle komplex analytisch.

Zum Schluß sei noch eine *Bemerkung* gemacht bezüglich der Voraussetzung, a_k^i müsse reell analytisch sein. Wir haben beim Beweis den Satz von FROBENIUS über die vollständige Integrierbarkeit eines Pfaffschen Systems verwendet. Damit diese Methode einen Sinn hat, müssen wir, wie wir gleich sehen werden, die Funktionen a_k^i auch für komplexe Argumente betrachten können, und zwar so, daß auch im Komplexen noch die Integrabilitätsbedingungen $t_k^i = 0$, bzw. (11.1), erfüllt sind. Das ist natürlich sicher möglich, wenn die a_k^i durch Potenzreihen darstellbar sind, also reell analytisch sind. Dies der Grund unserer Voraussetzung.

Zwar hat die Frage, ob es Funktionen $z^\mu = u^\mu + i v^\mu$ gebe, so daß das System $dz^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} dx^k = 0$ (11.4) äquivalent sei mit dem System (11.2), ohne weiteres einen Sinn, wenn man die a_k^i auch nur für reelle Werte der Variablen x^1, \dots, x^n kennt. Bei der Frobeniusschen Methode werden jedoch Integrale des Systems (11.2) $(a_k^i + i \delta_k^i) dx^k = 0$ betrachtet, d. h. man sucht Kurven $x^k(t)$ so, daß

$$[a_k^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) + i \delta_k^i] \frac{dx^k}{dt} = 0$$

ist. Es ist klar, daß es keine Lösungen im Reellen gibt; man muß also komplexe Lösungen $x^k(t)$ betrachten und damit die a_k^i für komplexe Argumente kennen.

Daß wir also die Voraussetzung der reellen Analytizität machen müssen, liegt in der Methode begründet, mit der wir das Problem hier behandelt haben. Es ist dies auch die einzige Stelle, an der wir das Komplexe wesentlich benutzen. Alles andere hätte ohne weiteres durchgeführt werden können, ohne je vom Komplexen zu sprechen (man vergleiche den letzten Abschnitt von § 2).

Man kann versuchen, auch hier alle Betrachtungen reell durchzuführen, und kommt dann auf folgende Frage: Gibt es m Lösungen u^μ, v^μ des Differentialgleichungssystems

$$(11.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x^p} = a_p^k \frac{\partial v}{\partial x^k}, \\ \frac{\partial v}{\partial x^p} = -a_p^k \frac{\partial u}{\partial x^k}, \end{cases}$$

so, daß man diese Lösungen $u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^m$ als Koordinaten benutzen kann?

In diesem Differentialgleichungssystem (11.6) sind die beiden Zeilen wegen $a_k^i a_j^k = -\delta_j^i$ äquivalent, wie brauchen daher nur etwa die zweite zu betrachten:

$$\frac{\partial v}{\partial x^p} = -a_p^k \frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

Bestimmen wir die Funktion u so, daß die rechte Seite einen Gradienten darstellt, so können wir zu einem solchen u ein zugehöriges v durch Integration

erhalten. Die Bedingung dafür, daß wir rechts einen Gradienten haben, lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x^q} \left(-a_p^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^p} \left(-a_q^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right),$$

oder also

$$\frac{\partial a_p^k}{\partial x^q} \frac{\partial u}{\partial x^k} + a_p^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^q \partial x^k} = \frac{\partial a_q^k}{\partial x^p} \frac{\partial u}{\partial x^k} + a_q^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^p \partial x^k}.$$

Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^q \partial x^k} a_p^k - \frac{\partial^2 u}{\partial x^p \partial x^k} a_q^k &= \left(\frac{\partial a_q^k}{\partial x^p} - \frac{\partial a_p^k}{\partial x^q} \right) \frac{\partial u}{\partial x^k}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} (a_p^k \delta_q^j - a_q^k \delta_p^j) &= \frac{\partial u}{\partial x^k} a_{pq}^k. \end{aligned}$$

Hierin ist a_{pq}^k die gleiche abkürzende Bezeichnung wie in (8.1). Die Funktion u muß also dieser Differentialgleichung 2. Ordnung genügen⁵⁾. Man sieht leicht, daß die Bedingung $\vartheta_{kl}^i = 0$ notwendig ist, damit man genügend Lösungen u erhält, d. h. m Lösungen u^1, \dots, u^m derart, daß man diese u^a mit den zugehörigen v^a zusammen als Koordinaten einführen kann. Es stellt sich die Frage, ob die Bedingung auch hinreichend ist. Für reell-analytische a_k^i ist dies also, wie unsere anderen Betrachtungen zeigten, der Fall.

III. Kapitel

Beziehungen zwischen affinen Zusammenhängen und fast-komplexen Strukturen.

Auf Mannigfaltigkeiten mit fast-komplexer oder komplexer Struktur gibt es gewisse affine Zusammenhänge, die durch die betreffende Struktur geometrisch ausgezeichnet sind. Von solchen Zusammenhängen handelt dieses Kapitel.

§ 12. Symmetrische und unsymmetrische Zusammenhänge.

Wir wenden uns zunächst dem allgemeinen Fall der fast-komplexen Strukturen mit nicht notwendig verschwindender Torsion zu und beweisen den folgenden

Satz 1. Zu jeder fast-komplexen Struktur a_k^i auf M^n gibt es (im großen) einen affinen Zusammenhang Λ_{ij}^k , in welchem a_k^i parallel ist, d. h. bezüglich dessen die kovariante Ableitung $D_i a_k^i = 0$ ist.

Dieser affine Zusammenhang wird im allgemeinen nicht symmetrisch sein. Er wird durch die Forderung $D_i a_k^i = 0$ auch nicht eindeutig festgelegt. Wir beweisen den Satz, indem wir einen affinen Zusammenhang mit der geforderten Eigenschaft explizit konstruieren. Dabei verwenden wir als Hilfsmittel einen ganz beliebigen symmetrischen affinen Zusammenhang Γ_{ij}^k auf M^n ,

⁵⁾ Am einfachsten läßt sich diese Differentialgleichung schreiben als $dJdu = 0$ ($d =$ äußere Differentiation). dJd ist also eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators.

als solchen können wir z. B. einen Riemannschen wählen. Die diesbezügliche kovariante Ableitung bezeichnen wir mit \tilde{D}_k . Es sei nun

$$(12.1) \quad \tilde{D}_i a_k^i = A_{ik}^i + S_{ik}^j$$

die Zerlegung des Tensors $\tilde{D}_i a_k^i$ in seinen antisymmetrischen und symmetrischen Teil, so daß also (in Übereinstimmung mit der Bezeichnung in (8.3))

$$(12.2) \quad \begin{cases} A_{ik}^i = \frac{1}{2} (\tilde{D}_i a_k^i - \tilde{D}_k a_i^i), \\ S_{ik}^j = \frac{1}{2} (\tilde{D}_i a_k^j + \tilde{D}_k a_i^j). \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen bilden wir nun die Größen

$$(12.3) \quad A_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l - \frac{1}{2} (A_{jk}^l a_i^j + S_{ik}^j a_j^l).$$

Wir addieren also zu den Koeffizienten Γ_{ik}^l eines affinen Zusammenhanges einen Tensor (1-fach kontra-, 2-fach kovariant). Die so erhaltenen Größen A_{ij}^l transformieren sich dann wie die Γ_{ij}^l , können also als Koeffizienten eines affinen Zusammenhanges auf M^n genommen werden (entsprechend der bekannten Tatsache, daß die Differenz zweier affiner Zusammenhänge ein Tensor ist).

Der so erhaltene affine Zusammenhang hat nun die gewünschte Eigenschaft $D_i a_k^i = 0$, wobei also D_i die mit den A_{ik}^l gebildete kovariante Ableitung bezeichnet. Beweis:

$$\begin{aligned} D_k a_i^i &= \frac{\partial a_i^i}{\partial x^k} + A_{hk}^i a_i^h - A_{ik}^h a_h^i \\ &= \frac{\partial a_i^i}{\partial x^k} + \Gamma_{hk}^i a_i^h - \Gamma_{ik}^h a_h^i - \frac{1}{2} (A_{jk}^i a_i^j + S_{hk}^j a_j^i) a_i^h + \frac{1}{2} (A_{jk}^h a_i^j + S_{ik}^j a_j^h) a_i^h \\ &= \tilde{D}_k a_i^i - \frac{1}{2} (-A_{ik}^i + S_{hk}^j a_j^i a_i^h - A_{jk}^i a_i^j a_h^i + S_{ik}^j a_j^h) \\ &= A_{ki}^i + S_{ki}^i - \frac{1}{2} (A_{ki}^i + S_{ki}^i + \frac{1}{2} (\tilde{D}_h a_k^i + \tilde{D}_k a_h^i) a_j^i a_i^h - \frac{1}{2} (\tilde{D}_i a_k^h - \tilde{D}_h a_k^i) a_j^i a_i^h) \\ &= \frac{1}{2} (A_{ki}^i + S_{ki}^i) + \frac{1}{4} (\tilde{D}_h a_j^i) a_k^j a_i^h + \frac{1}{4} (\tilde{D}_k a_j^i) a_h^j a_i^h - \frac{1}{4} (\tilde{D}_i a_h^i) a_k^h a_j^i + \frac{1}{4} (\tilde{D}_h a_i^j) a_k^j a_h^i \\ &= \frac{1}{2} \tilde{D}_k a_i^i + \frac{1}{4} (\tilde{D}_h a_j^i) a_k^j a_i^h - \frac{1}{4} \tilde{D}_k a_i^i - \frac{1}{4} (\tilde{D}_h a_j^i) a_k^j a_i^h - \frac{1}{4} \tilde{D}_k a_i^i \\ &= 0, \text{ wie behauptet.} \end{aligned}$$

Wir haben dabei mehrfach benutzt, daß $(\tilde{D}_k a_h^i) a_i^h = -(\tilde{D}_h a_k^i) a_i^h$ ist. Dies folgt, weil einerseits $\tilde{D}_k (a_h^i a_i^h) = \tilde{D}_k (-\delta_i^i) = 0$ ist, und andererseits (Produktregel) $\tilde{D}_k (a_h^i a_i^h) = (\tilde{D}_k a_h^i) a_i^h + (\tilde{D}_k a_i^h) a_h^i$ ist.

Die durch (12.3) definierten Zusammenhänge sind im allgemeinen nicht symmetrisch. Berechnen wir nämlich $T_{ik}^l = A_{ik}^l - A_{ki}^l$, d. h. also die *Torsion des Zusammenhanges* A_{ik}^l , so erhalten wir

$$T_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l - \frac{1}{2} (A_{jk}^l a_i^j - A_{ji}^l a_k^j + S_{ik}^j a_j^l - S_{ki}^j a_j^l).$$

Wegen der Symmetrie von Γ und S heben sich die betreffenden Terme weg, und es bleibt

$$T_{ik}^l = \frac{1}{2} (A_{ji}^l a_k^j - A_{jk}^l a_i^j).$$

Vergleich mit (8.4) und (8.5) ergibt

$$(12.4) \quad T'_{ik} = t'_{ik}.$$

Dieses Ergebnis besagt folgendes:

a) Durch die Konstruktion (12.3) erhalten wir eine ganze Klasse von affinen Zusammenhängen (im allgemeinen unendlich viele), in denen a_k^i parallel ist. Alle haben den gleichen schiefsymmetrischen Teil: ihre Torsion („Torsion“ im üblichen Sinne) ist nämlich identisch mit dem allein durch a_k^i bestimmten Tensor t'_{ik} . Dies ist zugleich eine Rechtfertigung für die Bezeichnung des Tensors t'_{ik} als Torsion der fast-komplexen Struktur.

b) Ist die fast-komplexe Struktur torsionsfrei, so sind die Zusammenhänge (12.3) symmetrisch.

Es gilt auch umgekehrt:

c) Gibt es einen symmetrischen affinen Zusammenhang, in dem der Tensor a_k^i parallel ist, so ist diese fast-komplexe Struktur a_k^i torsionsfrei: $t'_{ik} = 0$.

Diese Bemerkung c) folgt, da im Übergang (12.3) von Γ zu Λ einfach $\Lambda = \Gamma$ wird, wenn der Hilfszusammenhang Γ selbst schon die gewünschte Eigenschaft hat. Doch ist c) auch ein unmittelbares Korollar zur Schlußbemerkung von § 8.

Auf Grund von b) und c) können wir nun die Integrabilitätsbedingung $t'_{ik} = 0$ in äquivalenter Weise neu formulieren:

Satz 2. Dann und nur dann ist die fast-komplexe Struktur a_k^i torsionsfrei, wenn es einen symmetrischen affinen Zusammenhang gibt, in dem a_k^i parallel ist^{a)}.

Betrachten wir insbesondere komplexe Strukturen, so ist gemäß § 9 die zugehörige fast-komplexe Struktur stets torsionsfrei, und wir haben damit:

Satz 3. Ist M^n eine Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur, so ist die Klasse, gebildet aus denjenigen symmetrischen affinen Zusammenhängen, in denen der Tensor a_k^i der zugehörigen fast-komplexen Struktur parallel ist, nicht leer.

Es drängt sich nun die Frage auf, ob es in der genannten Klasse einen Riemannschen Zusammenhang gibt. Wir werden sehen, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, und werden dabei eine Beziehung unserer Betrachtungen zu den sog. Kählerschen Metriken finden.

§ 13. Riemannsche Zusammenhänge; Kählersche Metriken.

Sei g_{jk} eine Riemannsche Metrik auf M^n , bezüglich der die fast-komplexe Struktur a_k^i orthogonal sei, d. h. die Abbildung J soll die Länge $(a, a) = g_{ij} a^i a^j$ eines jeden Vektors a invariant lassen; es soll also, für $b = Ja$, $(a, a) = (b, b)$ sein. Setzt man $b^k = a_k^i a^i$ ein, so ergibt sich

$$(g_{ij} - g_{ki} a_k^i a_j^i) a^i a^j = 0$$

für alle Vektoren a ; somit, da die Klammer in i, j symmetrisch ist,

$$(13.1) \quad g_{ij} - g_{ki} a_k^i a_j^i = 0,$$

^{a)} Ähnliche Resultate finden sich bei W. V. D. HODGE [9].

oder, wenn man mit a_p^j multipliziert

$$(13.2) \quad g_{ik} a_j^k + g_{jk} a_i^k = 0.$$

(13.1) bzw. (13.2) ist notwendig und hinreichend dafür, daß J orthogonal ist. Geometrisch bedeutet (13.2), daß J jeden Vektor in einen dazu senkrechten abbildet. Aber wegen $J^2 = -\text{Identität}$ ist diese Art von „Orthogonalität“ äquivalent mit der Orthogonalität im Sinne der Invarianz der Länge.

Wir wollen nun prüfen, was dies im integrierbaren Fall bedeutet. Es sei dann (z^μ) ein komplexes Koordinatensystem; die Abbildung $b = Ja$ wird darin beschrieben durch $B^\mu = iA^\mu$. Transformiert man gerade die zur Metrik gehörige Bilinearform

$$(a, c) = g_{ik} a^i c^k,$$

indem man die a^i und die c^k gemäß (3.2) ausdrückt, so erhält man

$$(a, c) = h_{\mu\nu} A^\mu C^\nu + h_{\mu\bar{\nu}} A^\mu \bar{C}^\nu + h_{\bar{\mu}\nu} \bar{A}^\mu C^\nu + h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{A}^\mu \bar{C}^\nu,$$

wobei $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, $h_{\mu\bar{\nu}} = h_{\bar{\nu}\mu}$, $h_{\bar{\mu}\nu} = h_{\nu\bar{\mu}}$ (Symmetrie)

und $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \overline{h_{\mu\nu}}$, $h_{\mu\bar{\nu}} = \overline{h_{\bar{\mu}\nu}}$ (wegen der Realität von (a, c)).

Soll nun die Länge bei der Abbildung J invariant sein, d. h. $(a, a) = (Ja, Ja)$ sein, so folgt sofort, daß $h_{\mu\nu} = h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ sein muß. Es bleibt

$$(a, c) = h_{\mu\bar{\nu}} A^\mu \bar{C}^\nu + h_{\bar{\mu}\nu} \bar{A}^\mu C^\nu,$$

und für das Quadrat der Länge kann man dies schreiben als

$$(13.3) \quad (a, a) = 2 h_{\mu\bar{\nu}} A^\mu \bar{A}^\nu;$$

die Metrik ist also Hermitesch.

Umgekehrt ist natürlich in einer Hermiteschen Metrik die Abbildung J (Multiplikation mit i) stets orthogonal.

Bei Einführung komplexer Koordinaten (im Fall der Integrabilität) wird also eine Riemannsche Metrik dann und nur dann Hermitesch, wenn in ihr die Abbildung J orthogonal ist, d. h. wenn (13.2) gilt.

Wir nennen daher allgemein auf einer M^n mit fast-komplexer Struktur eine Metrik, die der Relation (13.2) genügt (d. h. in der J orthogonal ist), Hermitesch bezüglich der fast-komplexen Struktur J (kurz: fast-Hermitesch).

So wie „Hermitesch“ nur sinnvoll ist in bezug auf eine komplexe Struktur, ist „fast-Hermitesch“ nur sinnvoll in bezug auf eine fast-komplexe Struktur. Setzen wir

$$a_{ij} = g_{ik} a_j^k,$$

so bilden die a_{ij} bei Hermiteschen Metriken also einen schiefen Tensor, und man kann daher folgende Differentialform bilden:

$$(13.4) \quad \omega = a_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Wir können dies auch schreiben als

$$\begin{aligned} \omega &= g_{ik} a_j^k dx^i \wedge dx^j = g_{ik} dx^i \wedge a_j^k dx^j \\ &= g_{ik} dx^i \wedge \delta x^k, \text{ wobei } (\delta x^k) = J(dx^i). \end{aligned}$$

Im Falle der Integrabilität schreiben wir auch dies noch in einem komplexen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}\omega &= h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu + h_{\mu\nu} \bar{\partial} z^\mu \wedge \partial z^\nu \quad \text{wobei } (\partial z^\nu) = J(dz^\nu) = (i dz^\nu) \\ &= h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu + h_{\mu\nu} \bar{\partial} z^\mu \wedge \partial z^\nu \\ &= -i h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu + i h_{\mu\nu} \bar{\partial} z^\mu \wedge \partial z^\nu \\ &= -i h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu - i h_{\mu\nu} \partial z^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu \\ &= -2i h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge \bar{\partial} z^\nu.\end{aligned}$$

ω ist also die äußere Differentialform, die man üblicherweise bei Hermiteschen Metriken (13.3) betrachtet, und deren Exaktheit (d. h. $d\omega = 0$) äquivalent ist mit der Kählerschen Bedingung. Also: Bei Einführung komplexer Koordinaten (im Falle der Integrabilität) wird eine Riemannsche Metrik dann und nur dann zu einer Kählermetrik, wenn sie in unserem Sinne Hermitesch ist und außerdem die zugehörige Differentialform ω (13.4) exakt ist, d. h.

$$(13.5) \quad d\omega = 0$$

ist. Wir nennen daher allgemein auf einer M^n mit fast-komplexer Struktur J eine Metrik, die den Relationen (13.2) und (13.5) genügt, Kählersch bezüglich der fast-komplexen Struktur J (kurz: fast-Kählersch).

Lemma. Zu jeder fast-komplexen Struktur J gibt es eine Metrik, in der J orthogonal ist, d. h. gibt es eine bezüglich J Hermitesche Metrik.

Wir beweisen dieses Lemma, indem wir eine solche Metrik explizit konstruieren, ausgehend von einer ganz beliebigen Riemannschen Metrik γ_{ik} . Wir bilden dann den neuen Tensor

$$(13.6) \quad g_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij} + a_i^k a_j^l \gamma_{kl}).$$

Natürlich ist mit γ_{ik} auch g_{ij} symmetrisch. Ferner ist

$$\begin{aligned}g_{ij} a^i a^j &= \frac{1}{2} (\gamma_{ij} a^i a^j + a_i^k a_j^l \gamma_{kl} a^i a^j) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_{kl} a^k a^l + \gamma_{kl} b^k b^l), \quad \text{wobei } (b^k) = J(a^k).\end{aligned}$$

Mit den beiden Termen in der Klammer wird auch $g_{ij} a^i a^j$ eine positive definite quadratische Form, und g_{ij} kann somit als metrischer Fundamentaltensor einer neuen Riemannschen Metrik genommen werden. Dies ist die gewünschte Metrik, denn g_{ij} erfüllt die Orthogonalitätsbedingung (13.2):

$$\begin{aligned}g_{ik} a_j^k + g_{jk} a_i^k &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} + a_i^p a_k^q \gamma_{pq}) a_j^k + \frac{1}{2} (\gamma_{jk} + a_j^p a_k^q \gamma_{pq}) a_i^k \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} a_j^k + \gamma_{jk} a_i^k - \gamma_{pi} a_j^p - \gamma_{pj} a_i^p) = 0,\end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. Es sei noch bemerkt, daß der Übergang (13.6) im Falle der Integrabilität bei Benutzung eines komplexen Koordinatensystems bedeutet: man nimmt von einer beliebigen Metrik einfach den Hermiteschen Teil.

Satz. Dann und nur dann existiert auf der Mannigfaltigkeit M^n mit der fast-komplexen Struktur J eine Riemannsche Metrik, in der die Abbildung J parallel ist, wenn J torsionsfrei ist und eine Kählermetrik zuläßt^{a)}.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

A) M^n besitze bezüglich der torsionsfreien fast-komplexen Struktur J eine Kählermetrik $g_{i\bar{k}}$; wir behaupten: J ist bezüglich der Metrik $g_{i\bar{k}}$ selbst parallel.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

a) $a_{ij} = g_{i\bar{k}} a_j^{\bar{k}}$ schiefsymmetrisch,

b) $\omega = a_{ij} dx^i \wedge dx^j$ exakt,

c) $t_{j\bar{k}}^i = 0$.

b) bedeutet, wenn an Stelle der partiellen Ableitungen die kovarianten bezüglich der Metrik $g_{i\bar{k}}$ verwendet werden:

$$(13.7) \quad D_i a_{j\bar{l}} + D_i a_{j\bar{l}} + D_j a_{i\bar{l}} = 0.$$

c) hat zur Folge [gemäß (8.3), (8.4) und (8.5)], daß

$$(D_p a_k^j - D_k a_p^j) a_l^p = (D_p a_l^j - D_l a_p^j) a_k^p$$

ist. Durch Multiplikation mit g_{jq} ziehen wir den Index j nach unten (wegen $D_p g_{jq} = 0$ ist dies mit der kovarianten Ableitung vertauschbar) und erhalten

$$(D_p a_{qk} - D_k a_{pq}) a_l^p = (D_p a_{ql} - D_l a_{pq}) a_k^p,$$

also wegen a)

$$(D_p a_{qk} + D_k a_{pq}) a_l^p = (D_p a_{ql} + D_l a_{pq}) a_k^p,$$

und unter Berücksichtigung von (13.7):

$$(13.8) \quad (D_q a_{kp}) a_l^p = (D_q a_{lp}) a_k^p.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (D_q a_{kp}) a_l^p &= D_q (g_{k\bar{j}} a_j^{\bar{l}}) a_l^p = g_{k\bar{j}} (D_q a_j^{\bar{l}}) a_l^p \\ &= -g_{k\bar{j}} (D_q a_l^{\bar{p}}) a_j^{\bar{p}} = g_{p\bar{j}} (D_q a_l^{\bar{p}}) a_k^{\bar{j}} \\ &= (D_q a_{jl}) a_k^{\bar{j}}, \end{aligned}$$

$$(13.9) \quad (D_q a_{kp}) a_l^p = - (D_q a_{lp}) a_k^p.$$

Vergleichen wir (13.8) und (13.9), so folgt $(D_q a_{kp}) a_l^p = 0$, und daraus ergibt sich sofort die Behauptung $D_q a_p^j = 0$.

B) Es existiere eine Metrik $\gamma_{j\bar{k}}$, in der J parallel ist.

Behauptung: Es existiert eine Kählermetrik bezüglich J und J ist torsionsfrei.

Beweis: Die Torsionsfreiheit ergibt sich nach Satz 2, § 12. Im allgemeinen wird nun aber nicht die Metrik $\gamma_{i\bar{k}}$ selbst Kählersch sein, da sie ja nicht einmal Hermitesch sein wird. Wir machen daher zuerst den Übergang (13.6) zur Hermiteschen Metrik $g_{i\bar{k}}$:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij} + a_i^{\bar{k}} a_j^{\bar{l}} \gamma_{k\bar{l}}).$$

Mit \tilde{D}_p bezeichnen wir die kovariante Ableitung bezüglich γ_{ij} , mit D_p bezüglich g_{ij} . Nach Voraussetzung ist $\tilde{D}_p a_k^j = 0$; ferner gilt $\tilde{D}_p \gamma_{ij} = 0$, somit

$$(13.10) \quad \tilde{D}_p g_{ij} = 0.$$

Andererseits ist $D_p g_{ij} = 0$, und zwar ist diese Beziehung charakteristisch für die kovariante Ableitung bezüglich g_{ij} (da man $D_p g_{ij} = 0$ nach den Christoffel-

symbolen auflösen kann). Aus (13.10) folgt daher, daß zur Metrik γ_{ij} die gleichen Christoffelsymbole gehören wie zu g_{ij} , somit $\tilde{D}_p \equiv D_p$ ist. Also ist a_k^i nicht nur bezüglich γ_{ij} , sondern auch bezüglich g_{ij} parallel: $D_p a_k^i = 0$. Die Metrik g_{ij} ist aber Hermitesch, und wegen $D_p a_{ik} = D_p(g_{ij} a_k^j) = 0$ ist die zugehörige Form $\omega = a_{ik} dx^i \wedge dx^k$ exakt, d. h. g_{ij} ist eine Kählermetrik.

Damit ist der Satz nun in beiden Richtungen bewiesen. Es sei noch folgende Bemerkung daran angeschlossen: Da es komplexe Mannigfaltigkeiten gibt, die aus einfachen topologischen Gründen keine Kählermetrik besitzen⁷⁾, hat man auf diesen eine Klasse von symmetrischen affinen Zusammenhängen, die alle nicht Riemannsch sind.

§ 14. Krümmung und Torsion.

Wenn a_k^i parallel ist bezüglich eines affinen Zusammenhanges, so genügt der zu letzterem gehörige Krümmungstensor einer Beziehung [(14.5)], die man eine „Symmetrie bezüglich a_k^i “ nennen kann. Zwei ähnliche Beziehungen gelten allgemein für die Torsion einer fast-komplexen Struktur und damit wegen (12.4) auch für die Torsion der durch (12.3) gegebenen affinen Zusammenhänge. Es ist [siehe (8.1) und (8.2)]:

$$\begin{aligned} a_i^h a_j^k t_{hk}^i &= \frac{1}{2} (a_{ph}^j a_k^p a_i^h - a_{pk}^j a_h^p a_i^h) \\ &= \frac{1}{2} (-a_{ih}^j a_i^h + a_{ik}^j a_i^h) = \frac{1}{2} (a_{hi}^j a_i^h - a_{ki}^j a_i^h) = t_{ji}^h. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(14.1) \quad a_i^h a_j^k t_{hk}^i = t_{ji}^h,$$

bzw., wenn man dies mit a_p^i multipliziert:

$$(14.2) \quad a_i^h t_{pk}^i + a_p^i t_{ik}^h = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} a_j^i a_k^h t_{hk}^i &= \frac{1}{2} a_j^i a_k^h (a_{ph}^j a_k^p - a_{pk}^j a_h^p) \\ &= \frac{1}{4} \left(a_j^i a_k^h \frac{\partial a_h^j}{\partial x^p} - a_j^i a_k^h \frac{\partial a_p^j}{\partial x^h} - a_j^i a_k^h \frac{\partial a_h^j}{\partial x^p} + a_j^i a_k^h \frac{\partial a_p^j}{\partial x^h} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-a_j^i a_k^h \frac{\partial a_h^j}{\partial x^p} + a_j^i a_k^h \frac{\partial a_h^j}{\partial x^h} + a_j^i \frac{\partial a_k^j}{\partial x^i} - a_j^i \frac{\partial a_i^j}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(a_k^p \frac{\partial a_i^j}{\partial x^p} - a_i^h \frac{\partial a_k^j}{\partial x^h} - a_k^j \frac{\partial a_i^j}{\partial x^i} + a_i^j \frac{\partial a_k^j}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} (a_{pj}^i a_k^p - a_{pk}^j a_i^p) = t_{ik}^j. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(14.3) \quad a_j^i a_k^h t_{hk}^i = t_{ik}^j,$$

oder, wenn man beide Seiten mit a_p^i multipliziert:

$$(14.4) \quad a_j^i t_{pk}^i + a_p^i t_{ik}^j = 0.$$

⁷⁾ Zum Beispiel die von H. HOFF [2] entdeckten komplexen Mannigfaltigkeiten der topologischen Struktur $S^1 \times S^{2k+1}$; man vgl. auch [1], S. 424, sowie [8]

Wie gesagt, gelten die entsprechenden Formeln für die Torsion T_{ik}^j der durch (12.3) gegebenen affinen Zusammenhänge.

Wir betrachten nun irgendeinen affinen Zusammenhang, in dem a_k^i parallel ist. Dann gelten für den zugehörigen Krümmungstensor $R_{k,ij}^l$ die folgenden Beziehungen. Es ist

$$D_i D_j v_k - D_j D_i v_k = R_{k,ij}^l v_l$$

für ein beliebiges kovariantes Vektorfeld v_k . Auf das Feld $w_p = a_p^k v_k$ angewandt:

$$(D_i D_j - D_j D_i) (a_p^k v_k) = R_{p,ij}^l a_l^k v_k = R_{p,ij}^k a_k^l v_l;$$

andererseits, wegen $D_i a_p^k = 0$, ist dies

$$= a_p^k (D_i D_j - D_j D_i) v_k = a_p^k R_{k,ij}^l v_l.$$

Also

$$a_k^l R_{p,ij}^k v_l = a_p^k R_{k,ij}^l v_l.$$

Da v_l beliebig ist, folgt

$$(14.5) \quad a_k^l R_{p,ij}^k = a_p^k R_{k,ij}^l.$$

Insbesondere ist der Fall wichtig, da der affine Zusammenhang von einer bezüglich der torsionsfreien fast-komplexen Struktur J Kählerschen Metrik g_{ij} stammt. Dann folgt aus (14.5) durch Multiplikation mit g_{lm} :

$$a_k^l g_{lm} R_{p,ij}^k = a_p^k g_{lm} R_{k,ij}^l.$$

Links benutzen wir nun (13.2), rechts setzen wir wie üblich $g_{lm} R_{k,ij}^l = R_{mk,ij}$ und erhalten

$$- a_m^l g_{lk} R_{p,ij}^k = a_p^k R_{mk,ij},$$

also

$$- a_m^l R_{lp,ij} = a_p^k R_{mk,ij},$$

oder, weil $R_{lp,ij}$ schiefsymmetrisch ist in l und p :

$$(14.6) \quad a_m^l R_{p,ij}^l = a_p^l R_{m,ij}^l.$$

Diese Eigenschaft des Krümmungstensors wird in der Theorie der harmonischen Differentialformen auf Kählermannigfaltigkeiten wesentlich benützt.

IV. Kapitel.

Infinitesimale Transformationen.

§ 15. Vektorfelder und fast-komplexe Strukturen.

Betrachtet man auf einer Mannigfaltigkeit M^n mit der fast-komplexen Struktur J Vektorfelder (auch infinitesimale Transformationen genannt), so ist klar, was man darunter zu verstehen hat, daß auf ein solches Vektorfeld J ausgeübt werde. Andererseits erinnern wir an die vielfach als *Poisson-Klammer* bezeichnete Verknüpfung, die je zwei Feldern ein drittes zuordnet. Es ist nun, besonders im Hinblick auf die Anwendung auf Liesche Gruppen, nützlich, Zusammenhänge zwischen der Abbildung J und diesem Klammerprodukt zu untersuchen.

Das Klammerprodukt ist so definiert: Den gegebenen Vektorfeldern $a = (a^i)$, $b = (b^j)$ wird ein drittes, als $c = [a, b]$ bezeichnetes, zugeordnet, gemäß der Definition:

$$(15.1) \quad c^j = [a, b]^j = a^k \frac{\partial b^j}{\partial x^k} - b^k \frac{\partial a^j}{\partial x^k}.$$

Dieses Produkt hat die bekannten Eigenschaften:

a) es ist bilinear,

b) es ist antikommutativ: $[a, b] = -[b, a]$,

c) es genügt der Jacobi-Identität: $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

a) und b) sind aus der Definition (15.1) ersichtlich, von c) werden wir für unsere Untersuchungen keinen Gebrauch machen.

Neben dieser Klammer $[a, b]$ betrachten wir noch eine ähnlich definierte $\{a, b\}$, gebildet unter Verwendung eines affinen Zusammenhanges und von diesem abhängig. Wir ersetzen einfach in (15.1) die partiellen Ableitungen durch kovariante und verstehen unter $\{a, b\} = d$ das Vektorfeld

$$(15.2) \quad d^j = \{a, b\}^j = a^k D_k b^j - b^k D_k a^j.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \{a, b\}^j &= a^k \frac{\partial b^j}{\partial x^k} + a^k b^h \Gamma_{hk}^j - (b^k \frac{\partial a^j}{\partial x^k} + b^k \Gamma_{hk}^j a^h) \\ &= [a, b]^j - (\Gamma_{hk}^j - \Gamma_{kh}^j) a^h b^k, \\ (15.3) \quad \{a, b\}^j &= [a, b]^j - T_{hk}^j a^h b^k. \end{aligned}$$

Um nun die Zusammenhänge der Abbildung J mit den Klammerprodukten zu untersuchen, wird man Gebrauch machen von den Ergebnissen des § 12 und als affinen Zusammenhang speziell einen der in (12.3) gebildeten verwenden, in dem also a_k^i parallel ist. Dann haben wir auf Grund von (12.4)

$$\{a, b\}^j = [a, b]^j - t_{hk}^j a^h b^k,$$

wo t_{hk}^j die Torsion der fast-komplexen Struktur J ist. Schreiben wir dies noch vektoriell, indem wir unter $T(a, b)$ den Vektor mit den Komponenten

$$(15.4) \quad (T(a, b))^j = t_{hk}^j a^h b^k$$

verstehen, so ist

$$(15.5) \quad \{a, b\} = [a, b] - T(a, b).$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned} \{Ja, Jb\}^i &= a_i^k a^i D_k (a_p^l b^p) - a_i^k b^i D_k (a_p^l a^p) \\ &= a_i^k a_p^l (a^i D_k b^p - b^i D_k a^p), \\ (J\{Ja, Jb\})^j &= a_i^j a_k^i a_p^l (a^i D_k b^p - b^i D_k a^p), \text{ somit} \\ (15.6) \quad (J\{Ja, Jb\})^j &= -a_i^k (a^i D_k b^j - b^i D_k a^j). \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \{Ja, b\}^j &= a_i^k a^i D_k b^j - b^k D_k (a_i^j a^i) = a_i^k a^i D_k b^j - a_i^j b^k D_k a^i, \\ \{a, Jb\}^j &= a^k D_k (a_i^j b^i) - a_i^k b^i D_k a^j = a_i^j a^k D_k b^i - a_i^k b^i D_k a^j, \\ \{Ja, b\}^j + \{a, Jb\}^j &= a_i^j (a^k D_k b^i - b^k D_k a^i) + a_i^k (a^i D_k b^j - b^i D_k a^j) \\ &= a_i^j \{a, b\}^i - (J\{Ja, Jb\})^j \quad (\text{wegen (15.2) und (15.6)}) \\ &= (J\{a, b\})^j - (J\{Ja, Jb\})^j. \end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben also:

$$\{Ja, b\} + \{a, Jb\} = J\{a, b\} - J\{Ja, Jb\}.$$

Ausübung von J auf beide Seiten ergibt

$$(15.7) \quad J\{Ja, b\} + J\{a, Jb\} + \{a, b\} - \{Ja, Jb\} = 0.$$

Bis hierher haben wir nur benutzt, daß wir einen affinen Zusammenhang verwenden, in dem J parallel ist.

Wir gehen nun in (15.7) zu den Poisson-Klammern vermöge (15.5), und erhalten von jedem der vier Terme einen Torsionszusatz, also

$$(15.8) \quad J\{Ja, b\} + J\{a, Jb\} + \{a, b\} - \{Ja, Jb\} = J(T(Ja, b)) + J(T(a, Jb)) \\ + T(a, b) - T(Ja, Jb).$$

Nun ist aber:

$$a) \quad J(T(Ja, b)) = T(a, b),$$

$$b) \quad J(T(a, Jb)) = T(a, b),$$

$$c) \quad -T(Ja, Jb) = T(a, b).$$

$$\text{Zu a): } (J(T(Ja, b)))^i = a_j^i t_{jk}^i a_k^h a^h b^k \\ \text{wegen (14.3)} \quad = t_{ik}^i a^i b^k = (T(a, b))^i.$$

$$\text{Zu b): } (J(T(a, Jb)))^i = a_j^i t_{jk}^i a^h a_k^h b^i \\ \text{wegen (14.3)} \quad = t_{hi}^i a^h b^i = (T(a, b))^i.$$

$$\text{Zu c): } -(T(Ja, Jb))^i = -t_{hk}^i a_k^h a^h a_j^j b^j \\ \text{wegen (14.1)} \quad = -t_{ij}^i a^i b^j = t_{ij}^i a^i b^j = (T(a, b))^i.$$

Auf Grund von a), b), c) wird (15.8) zu

$$(15.9) \quad \Omega(a, b) = J\{Ja, b\} + J\{a, Jb\} + \{a, b\} - \{Ja, Jb\} = 4T(a, b),$$

wobei $T(a, b)$ durch (15.4) erklärt ist.

Zu diesem Ergebnis sei folgendes bemerkt: In jedem der vier Glieder, aus denen sich $\Omega(a, b)$ zusammensetzt, kommen die partiellen Ableitungen der Vektorkomponenten vor. Bei der Zusammensetzung zu $\Omega(a, b)$ heben sie sich gegenseitig weg, es bleiben nur partielle Ableitungen der a_k^i , welche gerade zum Torsionstensor t_{ik}^i zusammengefaßt werden können.

Eine unmittelbare Folge von (15.9) ist nun der folgende Satz, der eine neue Formulierung der Integrabilitätsbedingung darstellt.

Satz. Dann und nur dann ist die fast-komplexe Struktur J torsionsfrei, wenn $\Omega(a, b) = 0$ ist für beliebige Vektorfelder a und b .

Daß aus der Torsionsfreiheit ($t_{ik}^i = 0$) folgt, daß $\Omega(a, b) = 0$ ist, ist nach (15.9) klar. Ist umgekehrt $\Omega(a, b) = 0$ für beliebige Vektorfelder a und b , so muß also $t_{ik}^i a^i b^k = 0$ sein für beliebige a^i und b^k , also $t_{ik}^i = 0$. Dabei genügt es offenbar, wenn man nur weiß, daß $\Omega(a, b) = 0$ ist für je zwei von n linear unabhängigen Vektorfeldern.

§ 16. Interpretation der Integrabilitätsbedingung im Komplexen.

Wir haben bisher alle Betrachtungen über fast-komplexe und komplexe Strukturen im Reellen durchgeführt, mit Ausnahme des Beweises in § 11. Wir geben nun hier noch eine einfache Interpretation der Integrabilitätsbedingung, indem wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung J betrachten. Dabei müssen wir natürlich ins Komplexe gehen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}(M^n)$ den Faserraum aller (kontravarianten) Tangentialvektoren von M^n , mit T_P den Tangentialraum des Punktes $P \in M^n$, beide gebildet bezüglich dem Körper der reellen Zahlen. $\mathfrak{T}(M^n)$ ist also ein Faserraum über der Basis M^n , wobei die Fasern homöomorph sind dem n -dimensionalen euklidischen Raum. Die komplexen Erweiterungen von $\mathfrak{T}(M^n)$, bzw. T_P , bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{T}}(M^n)$, bzw. \tilde{T}_P . \tilde{T}_P ist also ein (reell) $4m$ -dimensionaler Raum. In \tilde{T}_P führen wir nun eine spezielle Basis ein. Wir gehen aus von einer Basis von T_P folgender Art:

$$a_{(1)} \quad \text{beliebig};$$

$$a_{(\bar{1})} = J a_{(1)};$$

$$a_{(2)} \quad \text{beliebig, aber linear unabhängig zu } a_{(1)} \text{ und } a_{(\bar{1})};$$

$$a_{(\bar{2})} = J a_{(2)};$$

.

.

.

$$a_{(\mu)} = J a_{(\bar{\mu})}.$$

Man sieht leicht: wenn man jeweils $a_{(\mu)}$ so wählt, daß die ersten $2\mu - 1$ dieser Vektoren linear unabhängig sind, dann sind es auch die ersten 2μ ; man gelangt also auf diese Weise zu einer Basis. Wir verwenden sie zugleich als Basis von \tilde{T}_P und machen nun in \tilde{T}_P noch die Koordinatentransformation

$$b'_{(\mu)} = a_{(\mu)} - i a_{(\bar{\mu})}; \quad b''_{(\mu)} = a_{(\mu)} + i a_{(\bar{\mu})}.$$

Dann gilt

$$J b'_{(\mu)} = i b'_{(\mu)}; \quad J b''_{(\mu)} = -i b''_{(\mu)}.$$

\tilde{T}_P zerfällt nun in die durch die $b'_{(\mu)}$ (bzw. $b''_{(\mu)}$) aufgespannten Teilräume, die wir mit T'_P (bzw. T''_P) bezeichnen. Es sind die zu den Eigenwerten $+i$ (bzw. $-i$) gehörigen Eigenräume der Abbildung J ; sie sind also durch J eindeutig bestimmt. Sie spannen zusammen \tilde{T}_P auf und sind konjugiert komplex bezüglich unserer Basis $a_{(\mu)}, a_{(\bar{\mu})}$ von T_P . Aber auch in bezug auf irgendeine andere reelle Basis von T_P sind sie konjugiert komplex, so daß wir kurz sagen können, T'_P und T''_P seien konjugiert komplex bezüglich des reellen Unterraumes T_P . Alle diese Teilräume T'_P (bzw. T''_P) bilden Teilräume \mathfrak{T}' (bzw. \mathfrak{T}'') des totalen Tangentialraumes $\tilde{\mathfrak{T}}(M^n)$.

Es sei noch bemerkt, daß umgekehrt durch diese Zerlegung von $\tilde{\mathfrak{T}}(M^n)$ in \mathfrak{T}' und \mathfrak{T}'' die Abbildung J wohlbestimmt ist. In der Tat, ist $a \in \tilde{T}_P$, so können wir a zerlegen: $a = a' + a''$ (wobei $a' \in T'_P$, $a'' \in T''_P$), und es gilt: $Ja = ia' - ia''$. Aus der Tatsache, daß T'_P und T''_P konjugiert komplex sind bezüglich T_P , folgt rückwärts sofort, daß J den Teilraum T_P von \tilde{T}_P invariant läßt, d. h. reelle Vektoren in reelle Vektoren abbildet. Es gilt nun der

Satz. Dann und nur dann ist die fast-komplexe Struktur J torsionsfrei, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sind a und b irgend zwei Vektorfelder aus \mathfrak{T}' , so ist auch das Feld $c = [a, b]$ in \mathfrak{T}' .

Dasselbe folgt für Felder aus \mathfrak{T}'' ; hingegen kann nichts ausgesagt werden über das Klammerprodukt eines Feldes aus \mathfrak{T}' mit einem Feld aus \mathfrak{T}'' .

Der Beweis des Satzes zerfällt in zwei Teile:

A) J sei torsionsfrei. Dann gilt also $\Omega(a, b) = 0$ für beliebige Felder a und b . Insbesondere ergibt das für a in \mathfrak{T}' , b in \mathfrak{T}' :

$$\Omega(a, b) = J[J a, b] + J[a, J b] + [a, b] - [J a, J b] = 0,$$

$$J[i a, b] + J[a, i b] + [a, b] - [i a, i b] = 0.$$

Also

$$2iJ[a, b] + 2[a, b] = 0,$$

$$J[a, b] = i[a, b].$$

Dies bedeutet aber, daß das Feld $[a, b]$ auch in \mathfrak{T}' liegt. Genau gleich folgt: Wenn a in \mathfrak{T}'' und b in \mathfrak{T}'' liegen, dann auch $[a, b]$.

B) Es gelte für beliebige Felder: Wenn a und b in \mathfrak{T}' liegen, dann auch $[a, b]$, d. h.: Wenn $J a = i a$ und $J b = i b$, dann auch $J[a, b] = i[a, b]$. Gehen wir zur konjugiert komplexen Beziehung über, so folgt, daß auch gelten muß: Wenn a und b in \mathfrak{T}'' liegen, dann auch $[a, b]$, d. h.: Wenn $J a = -i a$ und $J b = -i b$, dann auch $J[a, b] = -i[a, b]$. Wir zeigen, daß daraus $\Omega(a, b) = 0$ folgt für a und b beliebig. In der Tat, zerlegen wir:

$$a = a' + a'', \quad a^{(i)} \text{ in } \mathfrak{T}^{(i)};$$

$$b = b' + b'', \quad b^{(i)} \text{ in } \mathfrak{T}^{(i)}.$$

Da Ω bilinear ist, gilt:

$$\Omega(a, b) = \Omega(a', b') + \Omega(a', b'') + \Omega(a'', b') + \Omega(a'', b'').$$

Wir zeigen, daß jeder der vier Summanden verschwindet:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Omega(a', b') &= J[J a', b'] + J[a', J b'] + [a', b'] - [J a', J b'] \\ &= J[i a', b'] + J[a', i b'] + [a', b'] - [i a', i b'] \\ &= 2iJ[a', b'] + 2[a', b'] \\ &= -2[a', b'] + 2[a', b'] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \Omega(a'', b'') = 0 \text{ folgt genau gleich.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \Omega(a', b'') &= J[J a', b''] + J[a', J b''] + [a', b''] - [J a', J b''] \\ &= J[i a', b''] + J[a', -i b''] + [a', b''] - [i a', -i b''] \\ &= iJ[a', b''] - iJ[a', b''] + [a', b''] - [a', b''] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \Omega(a'', b') = 0 \text{ folgt genau gleich.}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt:

Man kann durch diese Betrachtungsweise auch direkt die Integrabilitätsbedingung erhalten. In der Tat, das Pfaffsche System, das wir in (11.2) betrachteten, stellt gerade \mathfrak{T}'' dar, und die Frobeniussche Bedingung der Integrabilität eines Pfaffschen Systems ist ganz allgemein äquivalent mit der

Bedingung, daß man durch Poisson-Klammerbildung nicht aus den durch das Pfaffsche System bestimmten Unterräumen der Tangentialräume herauskommt.

V. Kapitel.

Homogene Strukturen.

§ 17. Homogene Räume.

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M^n , in der eine Liesche Gruppe \mathfrak{G} als transitive topologische Transformationsgruppe operiert (homogener Raum). Wir bezeichnen die Elemente von \mathfrak{G} mit σ, τ, \dots , die zugehörigen Automorphismen von M^n mit W_σ, W_τ, \dots , so daß also

$$(17.1) \quad W_{\sigma\tau} = W_\sigma W_\tau \text{ und } W_{\sigma^{-1}} = (W_\sigma)^{-1}.$$

Sei A ein fest gewählter Punkt $\in M^n$. Die Elemente von \mathfrak{G} , welche A festlassen, bilden eine Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} , die Isotropiegruppe. Wir identifizieren nun M^n in bekannter Weise mit dem Faktorraum $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, bestehend aus den Linksnebenklassen von \mathfrak{H} in \mathfrak{G} : $\sigma\mathfrak{H}, \tau\mathfrak{H}, \dots$. Dies besteht darin, daß man jedem Punkt $P \in M^n$ diejenige wohlbestimmte Nebenklasse $\tau\mathfrak{H}$ zuordnet, für welche $W_\tau(A) = P$ ist. Da diese Zuordnung der Nebenklassen von \mathfrak{H} und der Punkte von M^n eineindeutig ist, werden wir also im folgenden stets M^n mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ in dieser Weise identifizieren. Dadurch erhalten wir in M^n zugleich eine reell-analytische Struktur, bezüglich der alle Transformationen W_τ reell-analytisch mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante sind. Die Transformation W_τ , vermöge der Identifizierung als Transformation von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ aufgefaßt, ist die „Linkstranslation“

$$(17.2) \quad W_\tau(\sigma\mathfrak{H}) = \tau\sigma\mathfrak{H}.$$

Denn für $W_\tau(P) = Q$ ($P, Q \in M^n$), wo $W_\sigma(A) = P$, ist (17.1) $W_{\tau\sigma}(A) = Q$.

Bezeichnen wir mit p die Abbildung von \mathfrak{G} auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (bzw. von \mathfrak{G} auf M^n), welche jedem Element seine Nebenklasse zuordnet (die „Projektion“ von \mathfrak{G} auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$),

$$(17.3) \quad p(\sigma) = \sigma\mathfrak{H},$$

ferner mit l_τ die Linkstranslation mit τ in \mathfrak{G} :

$$(17.4) \quad l_\tau(\sigma) = \tau\sigma,$$

so läßt sich (17.2) so schreiben:

$$(17.5) \quad W_\tau p(\sigma) = p l_\tau(\sigma).$$

Durch (17.5) werden die Transformationen W_τ zurückgeführt auf die Linkstranslationen l_τ in \mathfrak{G} .

Für unsere späteren Untersuchungen werden wir vor allem die Transformationen W_τ mit $\tau \in \mathfrak{H}$ (die Isotropiegruppe) zu betrachten haben, und es ist nützlich, diese nicht auf die Linkstranslationen von \mathfrak{G} zurückzuführen, sondern auf die inneren Automorphismen von \mathfrak{G} mit dem betreffenden Element aus \mathfrak{H} , die mit α_χ bezeichnet seien:

$$\alpha_\chi(\sigma) = \chi\sigma\chi^{-1}, \quad \chi \in \mathfrak{H}.$$

Wir können c_x zusammensetzen aus der Rechtstranslation von \mathfrak{G} mit χ^{-1} , die mit $r_{x^{-1}}$ bezeichnet sei, und der Linkstranslation l_x von \mathfrak{G} mit χ , so daß also

$$\alpha_x = l_x r_{x^{-1}} = r_{x^{-1}} l_x.$$

Nun führt aber eine Rechtstranslation mit einem Element von \mathfrak{H} jede Linksnebenklasse in sich selbst über: $r_{x^{-1}} \sigma \mathfrak{H} = \sigma \mathfrak{H} \chi^{-1} = \sigma \mathfrak{H}$, d. h.

$$p r_{x^{-1}}(\sigma) = p(\sigma),$$

und somit

$$W_x p(\sigma) = p l_x(\sigma) = p r_{x^{-1}} l_x(\sigma) = p \alpha_x(\sigma);$$

oder kurz

$$(17.6) \quad W_x p = p \alpha_x, \quad \chi \in \mathfrak{H}.$$

Dies besagt also, daß die Wirkungen W_x , für $\chi \in \mathfrak{H}$, auch als die durch die Automorphismen α_x von \mathfrak{G} induzierten Transformationen betrachtet werden können: α_x erhält die Linksnebenklassen und führt die Klasse $\sigma \mathfrak{H}$ über in die Klasse $W_x(\sigma \mathfrak{H})$.

Diese Transformationen W_x mit $\chi \in \mathfrak{H}$ lassen den Punkt A fest. Wir wollen W_x noch etwas anders betrachten, indem wir uns auf eine hinreichend kleine Umgebung $U(A)$ des Fixpunktes A beschränken. Dann existiert nämlich^{*)} im Faserraum \mathfrak{G} über der Basis $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine über $U(A)$ definierte lokale Schnittfläche $F \subset \mathfrak{G}$; d. h. es gibt eine Abbildung f von $U(A)$ in \mathfrak{G} derart, daß $f(A) = \varepsilon$ (Neutralelement von \mathfrak{G}) ist und

$$(17.7) \quad p f(P) = P \quad (p \in U(A)).$$

Das Bild $f(U(A)) \subset \mathfrak{G}$ wird mit F bezeichnet; es ist zu $U(A)$ homöomorph (es ist $f = (p|F)^{-1}$), also

$$(17.8) \quad f p(\tau) = \tau \quad (\text{für } \tau \in F).$$

Aus (17.6) folgt dann $W_x p f(P) = p \alpha_x f(P)$ für $P \in U(A)$, wegen (17.7) also

$$(17.9) \quad W_x(P) = p \alpha_x f(P) \quad (P \in U(A)).$$

Schließlich führen wir noch folgende Bezeichnung ein: Eine differenzierbare Abbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M_1 in eine andere M_2 , bei der $f(P) = Q$ sei, induziert einen Homomorphismus des Tangentialraumes T_P von P in denjenigen T_Q von Q . Diesen Homomorphismus wollen wir stets mit f_P^* bezeichnen, wobei wir den Index P auch weglassen, wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, daß es sich um den Tangentialraum des Punktes P handelt. Es ist dann ganz allgemein

$$(fg)_P^* = f_{g(P)}^* \cdot g_P^*, \quad \text{kurz } (fg)^* = f^* g^*;$$

und, wenn f^{-1} und $(f^*)^{-1}$ existieren

$$(f_P^*)^{-1} = (f^{-1})_{f(P)}^*, \quad \text{kurz } (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

So folgt z. B., da (Identität)^{*} = Identität ist, aus (17.7)

$$(17.10) \quad p^* f^*(a) = a, \quad a \in T_A.$$

^{*)} Siehe [10], p. 110 oder [11], p. 33.

Da (17.8) nur gilt für $\tau \in F$, folgt, wenn wir mit V den Tangentialraum an die lokale Schnittfläche F im Punkte ε bezeichnen, mit \mathfrak{h} den Tangentialraum an \mathfrak{H} im Punkte ε , beide als Teilräume von T_ε betrachtet:

$$(17.11) \quad f^* p^*(X) = X, \quad \text{für } X \in V.$$

Ist hingegen $X \in T_\varepsilon$ beliebig, so zerlegen wir

$$X = X_V + X_{\mathfrak{h}} \quad (X_V \in V; X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}),$$

so daß

$$p^*(X) = p^*(X_V),$$

und also

$$f^* p^*(X) = f^* p^*(X_V) = X_V$$

ist. Allgemein also:

$$(17.12) \quad f^* p^*(X) = X - X_{\mathfrak{h}} \quad (X \in T_\varepsilon; X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}).$$

§ 18. Homogene fast-komplexe Strukturen.

Definition. Eine fast-komplexe Struktur J in einem Wirkungsraum M^n einer Gruppe \mathfrak{G} heißt *homogen* (bezüglich \mathfrak{G}), wenn für alle $P \in M^n$ und alle $\tau \in \mathfrak{G}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P & \xrightarrow{(W\tau)_P^*} & T_Q \\ J_P \downarrow & & \downarrow J_Q \\ T_P & \xrightarrow{(W\tau)_P^*} & T_Q \end{array} \quad (Q = W_\tau(P) \text{ gesetzt})$$

kommutativ ist, d. h. wenn gilt

$$(18.1) \quad J_Q (W_\tau)_P^* = (W_\tau)_P^* J_P$$

(Durch den Index P bei J deuten wir an, daß wir die Abbildung J in T_P betrachten.)

Bevor wir uns der Frage der Existenz homogener fast-komplexer Strukturen zuwenden, bemerken wir folgendes: Durch die Forderung der Homogenität ist die fast-komplexe Struktur vollständig bestimmt, wenn wir sie in einem Punkt, etwa dem Punkt $A \in M^n$, kennen. Ist nämlich J_A gegeben, P ein beliebiger Punkt $\in M^n$, so muß für jede Transformation W_σ , welche A nach P überführt, gemäß (18.1) gelten

$$J_P W_\sigma^* = W_\sigma^* J_A.$$

Dadurch ist aber J_P wohlbestimmt, denn da W_σ^* ein Isomorphismus ist, folgt

$$(18.2) \quad J_P = W_\sigma^* J_A (W_\sigma^*)^{-1} \quad \text{für } W_\sigma \text{ mit } W_\sigma(A) = P.$$

Zu willkürlich gegebenem J_A (natürlich stets mit $J_A^2 = -\text{Identität}$) gibt es daher höchstens eine homogene fast-komplexe Struktur, und wir können daher die *Existenzfrage* nun so stellen: Kann man J_A so wählen, daß daraus eine homogene fast-komplexe Struktur entsteht.

Da für jedes $\chi \in \mathfrak{H}$ nebst $W_\sigma(A) = P$ auch

$$W_{\sigma\chi}(A) = W_\sigma W_\chi(A) = W_\sigma(A) = P$$

gilt, muß gemäß (18.2) bei einer homogenen fast-komplexen Struktur gelten

$$W_{\sigma}^* J_A (W_{\sigma}^*)^{-1} = W_{\sigma\chi}^* J_A (W_{\sigma\chi}^*)^{-1} \quad (\chi \in \mathfrak{H}),$$

also

$$W_{\sigma}^* J_A (W_{\sigma}^*)^{-1} = W_{\sigma}^* W_{\chi}^* J_A (W_{\chi}^*)^{-1} (W_{\sigma}^*)^{-1}$$

und somit, da W_{σ}^* und $(W_{\sigma}^*)^{-1}$ Isomorphismen sind

$$J_A = W_{\chi}^* J_A (W_{\chi}^*)^{-1},$$

bzw.

$$(18.3) \quad J_A W_{\chi}^* = W_{\chi}^* J_A \quad (\chi \in \mathfrak{H}).$$

Dies ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß J_A auf eine homogene fast-komplexe Struktur führt. Wir beweisen nun, daß sie auch hinreichend ist. Sei also J eine lineare Abbildung von T_A (mit Quadrat gleich - Identität) derart, daß für alle $\chi \in \mathfrak{H}$ gilt (18.3) $J W_{\chi}^* = W_{\chi}^* J$. Wir definieren dann J_P [entsprechend (18.2)] durch

$$J_P = W_{\sigma}^* J (W_{\sigma}^*)^{-1},$$

wobei wir willkürlich ein σ wählen, für welches $W_{\sigma}(A) = P$ ist. Auf diese Wahl kommt es nicht an, denn ist auch $W_{\sigma'}(A) = P$, so ist $W_{\sigma^{-1}\sigma'}(A) = A$, also $\sigma^{-1}\sigma' = \chi \in \mathfrak{H}$, $\sigma' = \sigma\chi$, woraus sich wegen $J W_{\chi}^* = W_{\chi}^* J$ ergibt, daß $W_{\sigma'}^* J (W_{\sigma'}^*)^{-1} = W_{\sigma}^* J (W_{\sigma}^*)^{-1}$ ist. Aus $J^2 = -$ Identität folgt unmittelbar auch $J_P^2 = -$ Identität. Die so aus J definierte Abbildung J erfüllt nun die Forderung (18.1) der Homogenität allgemein.

In der Tat, seien $P, Q \in M^n$ und $W_{\tau}(P) = Q$, und sei $Q = W_{\sigma_1}(A)$.

Dann ist $P = W_{\sigma_1}(A)$, mit $\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma_2$, $\tau = \sigma_2\sigma_1^{-1}$.

J_P ist also definiert durch $J_P = W_{\sigma_1}^* J (W_{\sigma_1}^*)^{-1}$, und

J_Q entsprechend durch $J_Q = W_{\sigma_2}^* J (W_{\sigma_2}^*)^{-1}$.

Also

$$\begin{aligned} J_Q W_{\tau}^* &= W_{\sigma_2}^* J (W_{\sigma_2}^*)^{-1} W_{\sigma_2}^* (W_{\sigma_1})^* \\ &= W_{\sigma_2}^* W_{\sigma_1^{-1}}^* W_{\sigma_1}^* J W_{\sigma_1}^*, \\ &= W_{\tau}^* J_P, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Da die Transformationen $W_{\chi}(\chi \in \mathfrak{H})$ den Punkt A festlassen, ist W_{χ}^* in (18.3) eine lineare Transformation des Tangentialraumes T_A in sich. Alle diese Transformationen ($\chi \in \mathfrak{H}$) bilden daher eine Gruppe, welche Untergruppe der (reellen) vollen linearen Gruppe L^n ist, und homomorphes Bild von \mathfrak{H} . Wir nennen sie die lineare Isotropiegruppe. Damit können wir unser Ergebnis so formulieren:

Satz 1. Damit eine lineare Abbildung $J = J_A$ von T_A in sich mit $J^2 = -$ Identität gemäß (18.2) eine homogene fast-komplexe Struktur definiert, ist notwendig und hinreichend, daß $J W_{\chi}^ = W_{\chi}^* J$ für alle $\chi \in \mathfrak{H}$ gilt, d. h. daß J vertauschbar ist mit allen Elementen der linearen Isotropiegruppe.*

Wir wollen nun diese Bedingung noch so interpretieren, daß alles in der Gruppe \mathfrak{G} formuliert werden kann, unter Benutzung des Lieschen Ringes \mathfrak{g} von \mathfrak{G} , dessen Elemente mit den Elementen des Tangentialraumes T_A des neutralen

Elementes ε von \mathfrak{G} identifiziert seien. Zu diesem Zwecke wollen wir die Abbildung J_A in bestimmter Weise in den Tangentialraum von ε übertragen.

Die Tangentialebene an die lokale Schnittfläche F im Punkt ε bezeichnen wir mit V , den Tangentialraum an \mathfrak{H} im Punkt ε mit \mathfrak{h} (Liescher Ring von \mathfrak{H}), den Tangentialraum von \mathfrak{G} im Punkt ε mit \mathfrak{g} (Liescher Ring von \mathfrak{G}), so daß also bezüglich der Vektorraumstruktur gilt

$$\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h} \quad (\dot{+} \text{ bedeutet direkte Summe}).$$

Durch f_A^* wird T_A isomorph abgebildet auf V , wobei p_A^* , beschränkt auf V , die Umkehrung davon ist. Durch diesen Isomorphismus übertragen wir nun J_A nach V , indem wir setzen:

$$I_V(X) = f_A^* J_A p^*(X) \quad (X \in V),$$

so daß also [wegen (17.10)]

$$(18.4) \quad p^* I_V = p^* f_A^* J_A p^* = J_A p^*$$

ist. Ferner definieren wir $I_{\mathfrak{h}}(Y) = 0$ für $Y \in \mathfrak{h}$. Durch I_V und $I_{\mathfrak{h}}$ wird eine lineare Abbildung I von $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$ definiert, und da neben (18.4) natürlich $p^* I_{\mathfrak{h}} = J_A p^*$ ist auf \mathfrak{h} , gilt

$$(18.5) \quad p^* I = J_A p^*.$$

I ist also eine lineare Transformation im Lieschen Ring \mathfrak{g} . Wir setzen nun voraus, daß J_A zu einer homogenen fast-komplexen Struktur gehöre, so daß also (18.3) gilt. Dann ist gemäß (17.9)

$$J_A p^* \alpha_x^* f^*(a) = p^* \alpha_x^* f^* J_A(a) \quad (a \in T_A).$$

Für $a = p^*(X)$, $X \in V$, folgt

$$J_A p^* \alpha_x^* f^* p^*(X) = p^* \alpha_x^* f^* J_A p^*(X).$$

Wegen (18.5) und (17.11) ergibt dies

$$(18.6) \quad p^* I \alpha_x^*(X) = p^* \alpha_x^* I(X) \quad \text{für alle } X \in V, x \in \mathfrak{H}.$$

Wir sehen also: Wenn es eine homogene fast-komplexe Struktur in M^n gibt, so gibt es im Lieschen Ring \mathfrak{g} eine lineare Abbildung I mit folgenden Eigenschaften:

$$(18.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) I = 0 \text{ in } \mathfrak{h}, \\ 2) I \text{ hat einen invarianten Unterraum } V, \text{ auf dem } I^2 = - \text{ Identität} \\ \quad \text{ist und der zusammen mit } \mathfrak{h} \text{ ganz } \mathfrak{g} \text{ aufspannt,} \\ 3) I \text{ genügt der Beziehung (18.6).} \end{array} \right.$$

Davon gilt auch die Umkehrung: Wenn es in \mathfrak{g} eine lineare Abbildung I mit diesen drei Eigenschaften gibt, dann existiert in $M^n = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine homogene fast-komplexe Struktur.

Beweis: Wir wählen zuerst eine lokale Schnittfläche F , die tangential ist an V . Wir definieren dann J_A gemäß

$$(18.8) \quad J_A(a) = p^* I f^*(a) \quad (a \in T_A).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} J_A J_A(a) &= p^* I f^* p^* I f^*(a) \\ &= p^* I I f^*(a) && \text{(wegen (17.11))} \\ &= -p^* f^*(a) && \text{(weil } f^*(a) \in V \text{ nach 2))} \\ &= -a && \text{[gemäß (17.10)]} \end{aligned}$$

Es gilt also: $J_A^2 = -$ Identität. Ferner folgt:

$$\begin{aligned} J_A W_z^*(a) &= p^* I f^* W_z^*(a) && (a \in T_A) \\ &= p^* I f^* p^* \alpha_z^* f^*(a) && \text{[wegen (17.9)]} \\ &= p^* I \alpha_z^* f^*(a) && \text{[wegen (17.12) und (1)]} \\ &= p^* \alpha_z^* I f^*(a) && \text{[wegen (3)]} \\ &= p^* \alpha_z^* f^* p^* I f^*(a) && \text{[wegen (17.11)]} \\ &= W_z^* p^* I f^*(a) && \text{[wegen (17.9)]} \\ &= W_z^* J_A(a) && \text{[wegen (18.8)]} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß J_A der Beziehung (18.3) genügt, also nach Satz 1 auf eine homogene fast-komplexe Struktur führt. Somit gilt:

Satz 2. Dann und nur dann existiert in M^n eine homogene fast-komplexe Struktur, wenn es im Lieschen Ring \mathfrak{g} eine lineare Abbildung I mit den Eigenschaften (18.7) gibt.

Wir wollen daraus noch eine weitere Folgerung ziehen. Wir bezeichnen den Übergang vom Element $\tau \in \mathfrak{G}$ zu $(\alpha_\tau)^*$ (kurz α_τ^*) mit Φ :

$$\alpha_\tau^* = \Phi(\tau).$$

Da ε ein Fixpunkt von α_τ ist, ist α_τ^* eine Abbildung des Tangentialraumes von ε in sich, d. h. eine lineare Transformation von \mathfrak{g} . Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{G}) &= \hat{\mathfrak{G}} \subset L^n \quad (L^n = \text{volle lineare Gruppe}), \\ \Phi(\mathfrak{H}) &= \hat{\mathfrak{H}} \subset \hat{\mathfrak{G}}. \end{aligned}$$

$\hat{\mathfrak{G}}$ ist die adjungierte Gruppe von \mathfrak{G} .

Neben Φ betrachten wir noch Φ^* (kurz Φ^*); Φ^* ist also die durch Φ induzierte lineare Abbildung der Tangentialräume der neutralen Elemente, bzw. der zugehörigen Lieschen Ringe:

$$\begin{aligned} \Phi^*(\mathfrak{g}) &= \hat{\mathfrak{g}} = \text{Liescher Ring von } \hat{\mathfrak{G}}, \\ \Phi^*(\mathfrak{h}) &= \hat{\mathfrak{h}} = \text{Liescher Ring von } \hat{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Sei $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{g}}$, so daß also $\hat{X} = \Phi^*(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. \hat{X} ist ein Element des Lieschen Ringes der Matrizengruppe $\hat{\mathfrak{G}}$, also eine zu \mathfrak{G} gehörige infinitesimale Transformation, somit auch eine Matrix, die man, wie die Elemente von $\hat{\mathfrak{G}}$, in \mathfrak{g} wirken lassen kann. Nach einem Satz aus der Theorie der Lieschen Gruppen⁹⁾

⁹⁾ [10], Chap. IV, § XI, p. 122 ff.

kann die Wirkung von \hat{X} in \mathfrak{g} gerade durch das Liesche Produkt beschrieben werden:

$$(18.9) \quad \hat{X}(Z) = [X, Z] \quad [X \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{g}, \hat{X} = \Phi^*(X)].$$

Dies wollen wir nun anwenden. (18.6) besagt, daß

$$p^*IB(Y) = p^*BI(Y) \quad \text{für alle } Y \in V, \quad B \in \hat{\mathfrak{H}}.$$

Da dies für alle $B \in \hat{\mathfrak{H}}$ gilt, gilt es auch für die zu $\hat{\mathfrak{H}}$ gehörigen infinitesimalen Transformationen, d. h. für die Elemente von $\hat{\mathfrak{h}}$:

$$(18.10) \quad p^*I\hat{X}(Y) = p^*\hat{X}I(Y) \quad (Y \in V, \hat{X} \in \hat{\mathfrak{h}}).$$

Gemäß (18.9) kann man dies aber auch äquivalent schreiben als

$$(18.11) \quad p^*I[X, Y] = p^*[X, IY] \quad (Y \in V, X \in \hat{\mathfrak{h}}).$$

Dies folgt also aus (18.6). Umgekehrt folgt aber aus (18.11) auch (18.6), unter der einen Voraussetzung, daß die Gruppe $\hat{\mathfrak{H}}$ zusammenhängend ist. In der Tat, zunächst kann man alle $B \in \hat{\mathfrak{H}}$ einer hinreichend kleinen Umgebung des neutralen Elementes von $\hat{\mathfrak{H}}$ schreiben als \exp (infinitesimale Transformation von $\hat{\mathfrak{H}}$), d. h. diese B sind von der Form: $B = \exp \hat{X}$, $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{h}}$. Aus (18.11) folgt (18.10) und daraus

$$p^*I \exp \hat{X}(Y) = p^* \exp \hat{X}I(Y) \quad (Y \in V),$$

d. h.

$$(18.12) \quad p^*IB(Y) = p^*BI(Y) \quad (Y \in V)$$

für alle B aus der genannten Umgebung. Ist nun aber $\hat{\mathfrak{H}}$ zusammenhängend, so kann man jedes $B \in \hat{\mathfrak{H}}$ als Produkt von solchen aus dieser Umgebung schreiben, womit (18.12) sofort für alle $B \in \hat{\mathfrak{H}}$ folgt. Dies ist aber genau (18.6). Damit haben wir bewiesen:

Satz 3. Damit in M^n eine homogene fast-komplexe Struktur existiert, ist notwendig, und falls $\hat{\mathfrak{H}}$ zusammenhängend ist, auch hinreichend, daß es im Lieschen Ring $\hat{\mathfrak{g}}$ eine lineare Abbildung I gibt mit den Eigenschaften 1) und 2) von (18.7) und 3'): I genügt der Beziehung (18.11).

§ 19. Homogene komplexe Strukturen.

Definition. Eine komplexe Struktur in einem Wirkungsraum M^n einer Gruppe \mathfrak{G} heißt homogen bezüglich \mathfrak{G} , wenn in ihr die Wirkungen von \mathfrak{G} komplex-analytische Transformationen von M^n sind, sich also bei Benützung zugehöriger lokaler Koordinatensysteme durch komplex-analytische Funktionen ausdrücken.

Wir betrachten nur Wirkungsräume Liescher Gruppen. Für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten ist die Gruppe aller komplexer Automorphismen stets Liesch (siehe [12]); im nicht-kompakten Fall hingegen i. a. nicht. Doch erstrecken sich unsere Betrachtungen auch auf nicht-kompakte Räume, sofern nur die Gruppe aller komplexer Automorphismen eine transitive Untergruppe enthält, die Liesch ist. Ob dies für homogene komplexe Mannigfaltigkeiten stets der Fall ist, ist unseres Wissens unbekannt.

Satz 1. Dann und nur dann ist eine komplexe Struktur homogen, wenn die zugehörige fast-komplexe Struktur homogen ist.

Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Transformation W_σ von M^n und beschreiben sie in lokalen Koordinatensystemen. Es soll dabei die lokale Koordinatenumgebung U_σ in die lokale Koordinatenumgebung V_σ übergehen, so daß W_σ lokal beschrieben wird durch

$$(19.1) \quad y^k = f^k(x^1, \dots, x^n) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Sei nun die fast-komplexe Struktur J homogen. Die Forderung (18.1) der Homogenität besagt, daß man a_j^i durch die gewöhnliche Tensortransformation

$$(6.1) \text{ aus } a_j^i \text{ erhält. Wir fassen nun (19.1) auf als Koordinatentransformation,}$$

indem wir die Punkte von U_σ mit ihren Bildpunkten in V_σ identifizieren. Dann bedeutet das Bestehen der Transformation (6.1) einfach, daß der in U_σ vorliegende Tensor a_j^i der gleiche ist wie der in V_σ gegebene a_j^i , und nach Satz 2,

§ 4, ist dann die Koordinatentransformation zwischen den komplexen Koordinaten von U_σ und V_σ komplex-analytisch.

Genau gleich folgt aus Satz 1, § 4, daß, wenn die komplexe Struktur homogen ist, dann auch die zugehörige fast-komplexe Struktur homogen ist.

Dieser Satz gestattet es nun, an Stelle der homogenen komplexen Strukturen die integrierbaren homogenen fast-komplexen Strukturen zu untersuchen.

In § 18 haben wir in verschiedener Form Bedingungen angegeben für die Existenz einer homogenen fast-komplexen Struktur von M^n . Soll es nun eine homogene komplexe Struktur geben in M^n , so müssen also insbesondere diese Bedingungen erfüllt sein. Nun wollen wir untersuchen, was für weitere Bedingungen noch dazukommen, damit die homogene fast-komplexe Struktur integrierbar ist und dann also eine homogene komplexe Struktur induziert.

Wir verwenden in einer Umgebung $U(\varepsilon)$ in \mathbb{G} solche lokale Koordinaten $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+p}$, daß die lokale Schnittfläche F beschrieben wird durch

$$x^{n+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, p).$$

Die Koordinaten x^1, \dots, x^n verwenden wir zugleich als Koordinaten in $U(A) \subset M^n$, so daß die Abbildung $\tau = f(P)$, welche die Schnittfläche F definiert, sich in diesen Koordinaten ausdrückt als

$$\begin{aligned} x^j &= x^j & (j = 1, \dots, n), \\ x^{n+i} &= 0 & (i = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

Dabei ist also:

$$\begin{aligned} \tau &= (x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+p}), \\ P &= (x^1, x^2, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Umgekehrt ist die Projektion eines Punktes $\tau \in F$ mit den Koordinaten $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ gegeben durch

$$x^j = x^j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Es seien nun X_ε und Y_ε zwei Vektoren im Punkt ε , die in V liegen sollen,

d. h. also, die tangential an F sind. Wir setzen sie in \mathfrak{G} zu linksvarianten Vektorfeldern X , bzw. Y fort, indem wir setzen

$$(19.2) \quad X_\tau = I_\tau^*(X_\varepsilon), \quad Y_\tau = I_\tau^*(Y_\varepsilon).$$

Davon ausgehend definieren wir in $U(A) \subset M^n$ ein Feld, indem wir für den Vektor im Punkte $P \in U(A)$ setzen: $p_{I(P)}^* X_{I(P)}$. Das so aus dem Feld X von \mathfrak{G} erhaltene Feld bezeichnen wir mit $p^* X$. Es ist also

$$(19.3) \quad (p^* X)_P = p_{I(P)}^* X_{I(P)}.$$

Dies bedeutet, daß wir das Feld X einfach nur längs F betrachten und es dann projizieren. Analog $p^* Y$. Hat $X_{I(P)}$ die Komponenten $X^1, \dots, X^n, X^{n+1}, \dots, X^{n+p}$, so hat $(p^* X)_P$ die Komponenten X^1, \dots, X^n . Nun ist nach Definition des Poissonschen Klammerproduktes

$$[X, Y]^l = \sum_1^{n+p} X^i \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} - \sum_1^{n+p} Y^i \frac{\partial X^l}{\partial x^i} \quad (l = 1, \dots, n+p).$$

Es ist aber $X^{n+i} = Y^{n+i} = 0$ für $i = 1, \dots, p$, da ja X_ε und Y_ε tangential an F sind. Daher gilt im Punkte ε :

$$[X, Y]_\varepsilon^l = \sum_1^n X^i \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} - \sum_1^n Y^i \frac{\partial X^l}{\partial x^i} \quad (l = 1, \dots, n+p).$$

Daher hat $(p^*[X, Y])_A$ die Komponenten

$$(p^*[X, Y])_A^l = \sum_1^n X^i \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} - \sum_1^n Y^i \frac{\partial X^l}{\partial x^i} \quad (l = 1, \dots, n).$$

Rechts steht nun aber nichts anderes als das in $U(A) \subset M^n$ gebildete Poisson-sche Klammerprodukt der Vektorfelder $p^* X$ und $p^* Y$ für den Punkt A . Wir bezeichnen das in M^n gebildete Klammerprodukt zum Unterschied von dem in \mathfrak{G} mit $\{ \}$, haben also:

$$(p^*[X, Y])_A = \{p^* X, p^* Y\}_A,$$

oder nach (19.3):

$$(19.4) \quad p_\varepsilon^*[X, Y]_\varepsilon = \{p^* X, p^* Y\}_A \quad (X \in V, Y \in V).$$

Man bemerke, daß dies im allgemeinen nur im Punkte A gilt, da im Punkte $f(A) = \varepsilon$ die Felder X und Y tangential an F sind, in den andern Punkten $f(P)$ hingegen gewöhnlich nicht.

Wir setzen nun die zur homogenen fast-komplexen Struktur J von M^n gehörige Abbildung I von $\mathfrak{g} = T_\varepsilon$ auf ganz \mathfrak{G} fort, indem wir setzen

$$(19.5) \quad I_\tau(X_\tau) = I_\tau^* I_{I(\tau)}^*(X_\tau)$$

(mit X_τ bezeichnen wir den Vektor des Feldes X im Punkt τ). Die so in jedem Punkt τ von \mathfrak{G} definierte Abbildung I hat dann die Eigenschaft, linksinvariante Felder wieder in solche überzuführen. In der Tat, aus $X_\tau = I_\tau^*(X_\varepsilon)$ (Linksinvarianz von X) folgt $(IX)_\tau = I_\tau X_\tau = I_\tau^*(I_\varepsilon X_\varepsilon)$ (Linksinvarianz von IX). Da ferner wegen (17.5) gilt:

$$(19.6) \quad p^* I_\tau^* = W_\tau^* p^*,$$

folgt, mit $\tau = f(P)$,

$$\begin{aligned} p^* I_\tau(X_\tau) &= p^* l_\tau^* I l_{\tau-1}^*(X_\tau) \\ &= W_\tau^* p^* I l_{\tau-1}^*(X_\tau) \\ &= W_\tau^* J_A p^* l_{\tau-1}^*(X_\tau) \\ &= W_\tau^* J_A W_{\tau-1}^* p^*(X_\tau) \\ &= J_P p^*(X_\tau). \end{aligned}$$

Es ist also

$$(19.7) \quad p^* I_\tau = J_P p^*.$$

Wir bilden nun

$$\begin{aligned} & p^* (I [IX, Y] + I [X, IY] + [X, Y] - [IX, IY])_\varepsilon \\ &= J p^* [IX, Y]_\varepsilon + J p^* [X, IY]_\varepsilon + p^* [X, Y]_\varepsilon - p^* [IX, IY]_\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil mit X_ε und Y_ε auch $(IX)_\varepsilon$ und $(IY)_\varepsilon$ in V sind:

$$\begin{aligned} &= J \{p^* IX, p^* Y\}_A + J \{p^* X, p^* IY\}_A + \{p^* X, p^* Y\}_A - \{p^* IX, p^* IY\}_A \\ &= (J \{J p^* X, p^* Y\} + J \{p^* X, J p^* Y\} + \{p^* X, p^* Y\} - \{J p^* X, J p^* Y\})_A. \end{aligned}$$

Soll die Struktur J in M^n integrierbar sein, so muß dies nach dem Satz von § 15 verschwinden. Damit haben wir als notwendige Bedingung, damit wir eine homogene komplexe Struktur erhalten:

$$(19.8) \quad p^* (I [IX, Y] + I [X, IY] + [X, Y] - [IX, IY])_\varepsilon = 0 \text{ für } X_\varepsilon, Y_\varepsilon \in V, \text{ oder äquivalent damit}$$

$$(19.9) \quad I [IX, Y] + I [X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h} \quad (X \in V, Y \in V).$$

In dieser Beziehung sind *alle Vektorfelder linksvariant*. Für linksvariante Felder stimmt aber das *Klammerprodukt* überein mit dem *Lieschen Produkt* der Vektoren der Felder im Punkt ε . Wir betrachten daher (19.9) als eine *Beziehung im Lieschen Ring*, weshalb wir auch den Index ε weggelassen haben.

Nebst (19.9) haben wir für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur noch die Bedingungen von Satz 3, § 18, insbesondere also (18.11):

$$p^* (I [X, Y] - [X, IY]) = 0,$$

oder äquivalent damit

$$(19.10) \quad I [X, Y] - [X, IY] \in \mathfrak{h} \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in V).$$

Daraus folgt, wenn wir nochmals I ausüben

$$(19.11) \quad II [X, Y] - I [X, IY] = 0 \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in V).$$

Um $II [X, Y]$ zu untersuchen, zerlegen wir

$$[X, Y] = Z_V + Z_{\mathfrak{h}} \quad (Z_V \in V, Z_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}).$$

Damit wird $I [X, Y] = I Z_V$, also

$$II [X, Y] = II Z_V = -Z_V = -[X, Y] + Z_{\mathfrak{h}}.$$

Also folgt aus (19.11):

$$[X, Y] + I [X, IY] \in \mathfrak{h} \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in V);$$

andererseits ist wegen $IX = 0$ trivialerweise

$$-[IX, IY] + I[IX, Y] = 0 \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in V).$$

Durch Addition erhalten wir

$$(19.12) \quad I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h} \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in V).$$

Damit haben wir die Bedingung (18.11) in eine zu (19.9) ganz analoge Form gebracht. Neben (19.9) und (19.12) können wir trivialerweise noch setzen (da ja \mathfrak{h} ein Unterring ist):

$$(19.13) \quad I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h} \quad (X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}).$$

Die drei Beziehungen (19.9), (19.12) und (19.13) können wir nun zu einer Bedingung zusammenfassen:

$$(19.14) \quad I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h} \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Fassen wir nun das Ergebnis dieser Betrachtungen zusammen, so stellen wir fest:

Wenn in $M^n = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine homogene komplexe Struktur existiert, dann gibt es im Lieschen Ring \mathfrak{g} von \mathfrak{G} eine lineare Abbildung I , die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(19.15) \quad \begin{cases} 1) I = 0, \text{ in } \mathfrak{h}, \\ 2) I \text{ hat einen invarianten Unterraum, auf dem } I^2 = -\text{Identität} \\ \text{ist und der zusammen mit } \mathfrak{h} \text{ ganz } \mathfrak{g} \text{ aufspannt,} \\ 3) I \text{ genügt der Beziehung (19.14).} \end{cases}$$

Wir zeigen nun noch, daß die Existenz einer solchen Abbildung I in \mathfrak{g} auch hinreichend ist für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur auf M^n , wenn wir noch die zusätzliche Voraussetzung machen, daß $\hat{\mathfrak{H}}$ zusammenhängend ist.

Beweis: Daraus, daß I der Beziehung (19.14) genügt, folgt insbesondere (für $X \in \mathfrak{h}, Y \in V$) sofort, daß I auch der Beziehung (18.11) genügt. Bei zusammenhängendem $\hat{\mathfrak{H}}$ folgt daraus, wie wir in Satz 3, § 18, gezeigt haben, die Existenz einer homogenen fast-komplexen Struktur. Ferner folgt aus (19.14) für $X \in V, Y \in V$ gemäß der Herleitung von (19.9):

$$(J\{Jp^*X, p^*Y\} + J\{p^*X, Jp^*Y\} + \{p^*X, p^*Y\} - \{Jp^*X, Jp^*Y\})_A = 0.$$

Da aber mit $X \in V$ und $Y \in V$ die Vektorfelder p^*X und p^*Y im Punkte A ganz beliebig sind, folgt gemäß § 15, daß die fast-komplexe Struktur J im Punkte A keine Torsion hat: $t_{ik}^j = 0$ im Punkt A . Wegen der Homogenität muß dann aber in jedem Punkt $P \in M^n$ die Torsion verschwinden: J ist torsionsfrei. Da wir von einer Lieschen Gruppe ausgehend J durch Gruppenoperationen erzeugen (zuerst J_A gemäß (18.8), dann J_P gemäß (18.2)), ist J reell analytisch. In diesem Falle ist aber das Verschwinden der Torsion hinreichend für Integrabilität. Die „Integration“ der homogenen fast-komplexen Struktur J ergibt also nach Satz 1 dieses Paragraphen die gesuchte homogene komplexe Struktur. Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 2. Für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur in $M^n = \mathbb{G}/\mathbb{H}$ ist notwendig, und falls \mathbb{H} zusammenhängend ist, auch hinreichend, daß im Lieschen Ring \mathfrak{g} eine lineare Abbildung I mit den Eigenschaften (19.15) existiert; d. h. also derart, daß $I = 0$ ist in \mathfrak{h} , daß $I^2 = -\text{Identität}$ ist auf einem zu \mathfrak{h} komplementären Unterraum V von \mathfrak{g} , und daß $I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h}$ ist für alle $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}$.

§ 20. Algebraische Charakterisierung der homogenen komplexen Strukturen.

Die in Satz 2, § 19, auftretende Bedingung, nämlich die Existenz einer Abbildung I im Lieschen Ring mit den Eigenschaften (19.15), ist schon ein rein algebraisches Kriterium, und wir wollen dieses noch in anderer, äquivalenter Form zum Ausdruck bringen. Wir gehen dabei vom Lieschen Ring \mathfrak{g} über zu seiner komplexen Erweiterung, die wir mit $\tilde{\mathfrak{g}}$ bezeichnen; analog \mathfrak{h} und \tilde{V} , so daß bezüglich der Vektorraumstruktur $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{V} \dot{+} \tilde{\mathfrak{h}}$ gilt (entsprechend zu $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$).

Setzen wir nun zuerst die Existenz einer Abbildung I mit den Eigenschaften (19.15) voraus. Wir erweitern I zu einer linearen Abbildung von $\tilde{\mathfrak{g}}$. \tilde{V} ist invarianter Unterraum bezüglich I . Auf \tilde{V} ist aber $I^2 = -\text{Identität}$, und wir können daher, genau entsprechend wie in § 16, in V eine Basis einführen derart, daß diese Basisvektoren gerade mit i , bzw. $-i$ multipliziert werden. Wir bezeichnen diese Basis mit

$$X'_{(1)}, X'_{(2)}, \dots, X'_m; \quad X''_{(1)}, X''_{(2)}, \dots, X''_m,$$

wobei

$$I(X'_{(\mu)}) = iX'_{(\mu)} \quad \text{und} \quad I(X''_{(\mu)}) = -iX''_{(\mu)},$$

sowie

$$X''_{(\mu)} = \overline{X'_{(\mu)}}.$$

Durch $Z_{(1)}, \dots, Z_{(p)} \in \mathfrak{h}$ ergänzen wir zu einer Basis von $\tilde{\mathfrak{g}}$. Sei \tilde{V}' der durch $X'_{(1)}, \dots, X'_{(m)}$ aufgespannte Raum, \tilde{V}'' der durch $X''_{(1)}, \dots, X''_{(m)}$ aufgespannte Raum. \tilde{V}' ist der zum Eigenwert i gehörige Eigenraum, d. h. es gilt

$$(20.1) \quad X \in \tilde{V}' \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad IX = iX,$$

und ebenso

$$X \in \tilde{V}'' \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad IX = -iX.$$

Wir setzen noch $L' = \tilde{V}' \dot{+} \tilde{\mathfrak{h}}$, $L'' = \tilde{V}'' \dot{+} \tilde{\mathfrak{h}}$. Dann gilt:

$$(20.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) L' \cup L'' = \tilde{\mathfrak{g}}, \text{ d. h. } L' \text{ und } L'' \text{ spannen ganz } \tilde{\mathfrak{g}} \text{ auf,} \\ 2) L' \cap L'' = \tilde{\mathfrak{h}}, \text{ d. h. der Durchschnitt von } L' \text{ und } L'' \text{ ist } \tilde{\mathfrak{h}}, \\ 3) L'' = \overline{L'}, \text{ d. h. } L' \text{ und } L'' \text{ sind konjugiert komplex,} \\ 4) [L', L'] \subset L' \text{ und } [L'', L''] \subset L'', \text{ d. h. } L' \text{ und } L'' \text{ sind Liesche Unterringe.} \end{array} \right.$$

Beweis. Zu 1) und 2) ist nichts mehr zu sagen. 3) bedeutet, daß L' und L''

konjugiert komplex sind in bezug auf (irgend) eine Basis von g , kurz: konjugiert komplex bezüglich des reellen Unterraumes g von \tilde{g} .

Zu 4): Es genügt, wenn wir für L' den Beweis führen. Wir haben in L' die Basis $X'_{(1)}, \dots, X'_{(m)}, Z_{(1)}, \dots, Z_{(p)}$. Wir zeigen, daß das Liesche Produkt je zweier dieser Basisvektoren wieder in L' liegt. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) $[Z_{(k)}, Z_{(l)}]$ liegt in \tilde{h} , da ja \tilde{h} Unterring ist, und damit sicher in L' .

b) $[X'_{(j)}, Z_{(k)}]$: Wir benutzen (19.14) für $X = X'_{(j)}$, $Y = Z_{(k)}$. Wegen $IZ_{(k)} = 0$ bleiben nur der erste und der dritte Term; zugleich setzen wir $IX'_{(j)} = iX'_{(j)}$, womit wir erhalten

$$I[iX'_{(j)}, Z_{(k)}] + [X'_{(j)}, Z_{(k)}] = Z \in \tilde{h}.$$

Daraus ergibt sich, da ja $I(Z) = 0$ ist:

$$I([X'_{(j)}, Z_{(k)}] - Z) = i([X'_{(j)}, Z_{(k)}] - Z).$$

Nach (20.1) also $[X'_{(j)}, Z_{(k)}] - Z \in \tilde{V}'$, und damit $[X'_{(j)}, Z_{(k)}] \in L'$.

c) $[X'_{(j)}, X'_{(k)}]$: Wir benutzen wieder (19.14) mit $X = X'_{(j)}$, $Y = X'_{(k)}$ und erhalten

$$I[iX'_{(j)}, X'_{(k)}] + I[X'_{(j)}, iX'_{(k)}] + [X'_{(j)}, X'_{(k)}] - [iX'_{(j)}, iX'_{(k)}] \in \tilde{h}.$$

Also

$$2iI[X'_{(j)}, X'_{(k)}] + 2[X'_{(j)}, X'_{(k)}] = 2Z \quad \text{mit } Z \in \tilde{h}.$$

Daraus folgt genau wie bei b): $[X'_{(j)}, X'_{(k)}] \in L'$, w.z.b.w.

Es gilt hiervon auch die Umkehrung: Wenn \tilde{g} zwei Unterräume L' und L'' mit den Eigenschaften (20.2) hat, dann existiert in g eine lineare Abbildung I mit den Eigenschaften (19.15).

Beweis. Wir wählen in \tilde{g} einen Komplementärraum \tilde{V} zu \tilde{h} . Wir definieren nun eine Abbildung I in \tilde{g} :

$$I(X) = 0 \quad \text{für } X \in \tilde{h}.$$

$$I(X) = iX \quad \text{für } X \in \tilde{V} \cap L' = \tilde{V}',$$

$$I(X) = -iX \quad \text{für } X \in \tilde{V} \cap L'' = \tilde{V}''.$$

Ist nun $X \in L'$ beliebig, so zerlegen wir $X = X' + Z$, wobei $X' \in \tilde{V}'$, $Z \in \tilde{h}$. Dann ist $I(X) = iX' = i(X - Z) = iX - iZ$.

Also ist:

$$(20.3) \quad I(X) = iX \pmod{\tilde{h}} \quad \text{für } X \in L',$$

oder also

$$I(X) = iX + X_{\tilde{h}} \quad \text{mit } X_{\tilde{h}} \in \tilde{h} \quad \text{für } X \in L'.$$

Ebenso gilt

$$I(X) = -iX \pmod{\tilde{h}} \quad \text{für } X \in L'',$$

$$I(X) = -iX + X_{\tilde{h}} \quad \text{mit } X_{\tilde{h}} \in \tilde{h} \quad \text{für } X \in L''.$$

Wir berechnen nun den Ausdruck in (19.14):

$$\Omega(X, Y) = I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY].$$

a) Für $X \in L'$ und $Y \in L'$:

$$\begin{aligned}\Omega(X, Y) &= I[iX + X_b, Y] + I[X, iY + Y_b] + [X, Y] - [iX + X_b, iY + Y_b] \\ &= iI[X, Y] + I[X_b, Y] + iI[X, Y] + I[X, Y_b] + [X, Y] + [X, Y] \\ &\quad - i[X_b, Y] - i[X, Y_b] - [X_b, Y_b].\end{aligned}$$

Da $[X, Y] \in L'$, $[X_b, Y] \in L'$ und $[X, Y_b] \in L'$ folgt gemäß (20.3):

$$\Omega(X, Y) = 0 \pmod{\tilde{\mathfrak{h}}}.$$

b) Für $X \in L''$ und $Y \in L''$ genau analog: $\Omega(X, Y) = 0 \pmod{\tilde{\mathfrak{h}}}$.

c) Für $X \in L'$ und $Y \in L''$:

$$\begin{aligned}\Omega(X, Y) &= I(iX + X_b, Y) + I[X, -iY + Y_b] + [X, Y] - [iX + X_b, -iY + Y_b] \\ &= iI[X, Y] + I[X_b, Y] - iI[X, Y] + I[X, Y_b] + [X, Y] \\ &\quad - [X, Y] + i[X_b, Y] - i[X, Y_b] - [X_b, Y_b].\end{aligned}$$

Da $[X, Y_b] \in L'$ und $[X_b, Y] \in L''$, ist

$$I[X_b, Y] + i[X_b, Y] = 0 \pmod{\tilde{\mathfrak{h}}}$$

und

$$I[X, Y_b] - i[X, Y_b] = 0 \pmod{\tilde{\mathfrak{h}}},$$

und wir haben $\Omega(X, Y) = 0 \pmod{\tilde{\mathfrak{h}}}$. Es ist also in jedem Fall

$$(20.4) \quad \Omega(X, Y) \in \tilde{\mathfrak{h}} \quad (X \in \tilde{\mathfrak{g}}, Y \in \mathfrak{g}).$$

Da nach 3) von (20.2) L' und L'' konjugiert komplex sind, folgt, daß für $X \in \mathfrak{g}$ auch $IX \in \mathfrak{g}$ ist und also wirklich auch im reellen Lieschen Ring eine Abbildung vorliegt. Aus (20.4) folgt für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{g}$: $\Omega(X, Y) \in \mathfrak{h}$, d. h. (19.14).

Die Bedingungen 1) und 2) von (19.15) sind natürlich auch erfüllt, w.z.b.w. Zusammengefaßt ergibt sich also

Satz. Für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur in $M^n = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist notwendig, und falls $\hat{\mathfrak{H}}$ zusammenhängend ist, auch hinreichend, daß im komplexifizierten Lieschen Ring $\hat{\mathfrak{g}}$ zwei konjugiert komplexe Unterringe existieren, die zusammen $\hat{\mathfrak{g}}$ als Vektorraum aufspannen und deren Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{h}}$ ist.

§ 21. Liesche Gruppen.

Als Spezialfall homogener Räume kann man insbesondere Liesche Gruppen (gerader Dimension und zusammenhängend) untersuchen, indem wir die Gruppe selbst durch die Linkstranslation in sich operieren lassen (ebenso könnten wir die Rechtstranslationen verwenden). Wir können nun unsere Ergebnisse über die homogenen Strukturen formulieren, wobei wir einfach als Untergruppe \mathfrak{H} die Untergruppe bestehend aus dem neutralen Element ε von \mathfrak{G} allein zu betrachten haben. Die Bedingung von § 18 über die Vertauschbarkeit mit der linearen Isotropiegruppe wird natürlich trivial: jede Liesche Gruppe gerader Dimension besitzt eine homogene fast-komplexe Struktur. Man kann J im Punkt ε beliebig wählen. Satz 2 von § 19 ergibt:

Satz 1. Für die Existenz einer (bezüglich der Linkstranslationen) homogenen komplexen Struktur in $M^n = \mathfrak{G}$ ist notwendig und hinreichend, daß im Lieschen Ring \mathfrak{g} eine lineare Abbildung I existiert mit den Eigenschaften: $I^2 = -$ Identität, und

$$I [IX, Y] + I [X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] = 0.$$

Wir können diese Bedingung auch in der in § 20 begründeten Form ausdrücken:

Satz 2. Für die Existenz einer (bezüglich der Linkstranslationen) homogenen komplexen Struktur in $M^n = \mathfrak{G}$ ist notwendig und hinreichend, daß im komplexifizierten Lieschen Ring $\tilde{\mathfrak{g}}$ zwei konjugiert komplexe Unterringe existieren, derart, daß $\tilde{\mathfrak{g}}$ als Vektorraum deren direkte Summe ist.

Diese Resultate für Liesche Gruppen ergeben sich natürlich auch sehr leicht direkt aus den Betrachtungen von § 15, ohne Verwendung der allgemeinen Untersuchungen über homogene Räume.

Wir setzen nun noch zusätzlich voraus, daß die betrachtete Liesche Gruppe \mathfrak{G} kompakt sei. Dann hat die zugehörige Liesche Algebra \mathfrak{g} immer die nach Satz 2 für die Existenz einer homogenen komplexen Struktur notwendigen und hinreichenden Eigenschaften. Um dies zu zeigen, benutzen wir einige Sätze über kompakte Liesche Gruppen und ihre Wurzeln.

Sei \mathfrak{C} ein maximaler kommutativer Unterring von \mathfrak{g} , so daß also $[X, Y] = 0$ für $X, Y \in \mathfrak{C}$. Seine Dimension, die gerade ist, werde mit $2(m - k)$ bezeichnet ($n = 2m$ die Dimension von \mathfrak{g}). Es gibt dann eine Basis von \mathfrak{g} , mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie besteht aus m Basisvektoren $A_{(1)}, \dots, A_{(k)}, C_{(1)}, \dots, C_{(m-k)}$ und deren bezüglich \mathfrak{g} konjugiert komplexen $\bar{A}_{(1)}, \dots, \bar{A}_{(k)}, \bar{C}_{(1)}, \dots, \bar{C}_{(m-k)}$.

2. $C_{(1)}, \dots, C_{(m-k)}, \bar{C}_{(1)}, \dots, \bar{C}_{(m-k)}$ bilden eine Basis der komplexen Erweiterung $\tilde{\mathfrak{C}}$ von \mathfrak{C} .

3. Für $C \in \mathfrak{C}$ gilt

$$\begin{aligned} [C, A_{(j)}] &= i \lambda_j(C) A_{(j)}, \\ [C, \bar{A}_{(j)}] &= -i \lambda_j(C) \bar{A}_{(j)} \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, k),$$

wobei die $\lambda_j(C)$ auf \mathfrak{C} definierte reelle Linearformen $\neq 0$ sind.

4. $[A_{(j)}, A_{(l)}] = K_{jl} A_{(q)}$, wenn $\lambda_j + \lambda_l = \lambda_q$;
 $= K'_{jl} \bar{A}_{(q)}$, wenn $\lambda_j + \lambda_l = -\lambda_q$;
 $= 0$, wenn $\lambda_j + \lambda_l$ nicht einem $\pm \lambda_q$ gleich ist.

Dabei sind die K_{jl} und K'_{jl} Konstanten $\neq 0$.

Vertauschen wir $A_{(j)}$ und $\bar{A}_{(j)}$, so geht $\lambda_j(C)$ über in $-\lambda_j(C)$. Wir können daher die $A_{(j)}$ so wählen, daß in bezug auf eine fest gewählte (reelle) Basis von \mathfrak{C} für jedes $\lambda_j(C)$ der erste von Null verschiedene Koeffizient positiv ist. Dann ist dies auch für die Linearform $\lambda_j + \lambda_l$ der Fall, womit in 4. die zweite Möglichkeit nicht mehr in Betracht zu ziehen ist: $[A_{(j)}, A_{(l)}]$ ist entweder gleich Null oder gleich einem Vielfachen eines $A_{(q)}$. Bezeichnen wir daher nun den von $A_{(1)}, \dots, A_{(k)}, C_{(1)}, \dots, C_{(m-k)}$ aufgespannten Teilraum von $\tilde{\mathfrak{g}}$ mit L' , den von den konjugiert komplexen Vektoren aufgespannten

Teilraum mit L'' , so gilt:

- a) L' und L'' sind Unterringe,
- b) L' und L'' sind konjugiert komplex,
- c) \tilde{g} als Vektorraum ist die direkte Summe von L' und L'' .

Nach Satz 2 existiert also eine homogene komplexe Struktur, es gilt also¹⁰⁾:

Satz 3. Jede kompakte zusammenhängende Liesche Gruppe gerader Dimension besitzt eine bezüglich der Linktranslationen homogene komplexe Struktur.

Literaturhinweise.

- [1] ECKMANN, B.: "Complex-analytic manifolds". Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950, Vol. II, p. 420—427. — [2] HOPF, H.: „Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten“. Studies and essays presented to R. Courant, p. 167—185. New York 1948. — [3] EHRESMANN, CH.: «Sur la théorie des espaces fibrés». Colloque de Topologie Algébrique, C.N.R.S., p. 3—15. Paris 1947. — [4] EHRESMANN, CH., et P. LIBERMANN: «Sur les structures presque hermitiennes isotropes». C. R. Acad. Sci. (Paris) **232**, 1281—1283 (1951). — [5] ECKMANN, B., et A. FRÖLICHER: «Sur l'intégrabilité des structures presque complexes». C. R. Acad. Sci. (Paris) **232**, 2284—2286 (1951). — [6] WANG, H. C.: "Closed manifolds with homogeneous complex structure". Amer. J. Math. **76**, 1—32 (1954). — [7] ECKMANN, B.: «Structures complexes et transformations infinitésimales». Convegno di Geometria Differenziale, 1953. Roma: Edizioni Cremonese 1954, 1—9. — [8] ECKMANN, B.: «Sur les structures complexes et presque complexes». Colloque de Géométrie Différentielle, C. N. R. S., p. 151—159. Strasbourg 1953. — [9] HODGE, W. V. D.: "Structure problems for complex manifolds". Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Serie V, Vol. XI, p. 1—10. Roma 1952. — [10] CHEVALLEY, C.: "Theory of Lie Groups". Princeton University Press 1946. — [11] STEENROD, N.: "The Topology of Fibre Bundles". Princeton University Press 1951. [12] BOCHNER, S., and D. MONTGOMERY: "Locally compact groups of differentiable transformations". Ann. of Math. **47**, 639—653 (1946).

(Eingegangen am 15. Juli 1954.)

¹⁰⁾ Vgl. B. ECKMANN [7], p. 8.

Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen.

Von

WOLFGANG ROTHSTEIN in Marburg (Lahn).

Einleitung.

1. In der Arbeit [14] habe ich gezeigt, daß die Singularitäten $(n-1)$ -dimensionaler¹⁾ analytischer Mannigfaltigkeiten — kurz „Flächen“ — im Raume C^n von n komplexen Veränderlichen für $n \geq 3$ ähnlichen Einschränkungen unterliegen wie die der Funktionen mehrerer Variabler. Das wird durch die Erwägung verständlich, daß jede Fläche der Dimension $n-1$ einer Funktion von $n-1$ Veränderlichen entspricht. Die wichtigsten Ergebnisse waren:

I. Die Fläche g^{n-1} sei analytisch in der Kugelschale $1/2 < \sum_1^n |z_i|^2 < 1$. Dann

ist sie es auch in der Kugel $\sum_1^n |z_i|^2 < 1$. Genauer: Es gibt genau eine in der Kugel analytische Fläche g_^{n-1} , die in der Kugelschale mit g^{n-1} übereinstimmt.*

Aus I. geht ein Kriterium für algebraische Flächen hervor:

II. Ist g^{n-1} außerhalb einer Kugel analytisch, so ist g^{n-1} eine algebraische Fläche. Außerdem: Der Durchschnitt einer algebraischen Fläche mit dem Äußeren einer Kugel ist irreduzibel.

Schärfer als I. ist das Analogon eines Satzes von HARTOGS²⁾:

III. G sei die Vereinigung der Gebiete

$$\left(|z_1| < 1/2; \sum_2^n |z_i|^2 < 1 \right)$$

und

$$\left(|z_1| < 1; 1/2 < \sum_2^n |z_i|^2 < 1 \right).$$

Weiter sei

$$H(G) = \left(|z_1| < 1; \sum_2^n |z_i|^2 < 1 \right).$$

Ist nun g^{n-1} in G analytisch, so auch in $H(G)$. Genauer: Es gibt eine und nur eine in $H(G)$ analytische Fläche g_^{n-1} , die in G mit g^{n-1} übereinstimmt.*

Diese Sätze sind an $n \geq 3$ gebunden; für $n = 2$ sind sie falsch.

Ersetzt man in I.—III. „Fläche g^{n-1} “ durch „Funktion $g(z_1, \dots, z_n)$ “ und „analytisch“ durch „regulär“, so erhält man bekannte Sätze über Funktionen

¹⁾ Hier ist die „komplexe Dimension“ gemeint. Die topologische Dimension ist doppelt so groß. Zu den Begriffen vgl. im übrigen § 1.

²⁾ Vgl. [3], S. 39, Satz 8.

von n Veränderlichen. Diese formale Analogie ist überraschend. Denn die Flächen g^{n-1} entsprechen ja Funktionen von $n-1$ Veränderlichen. Man gelangt auch nicht durch Spezialisierung von I.—III. zu bekannten Sätzen. Bei der Funktion $z_1 = g(z_2, \dots, z_n)$ ist z_1 den übrigen Variablen gegenüber bevorzugt, bei der „Fläche $z_1 = g(z_2, \dots, z_n)$ “ nicht. Das ist der wesentliche Unterschied. Alle Sätze erweisen sich im übrigen als Konsequenzen des Kontinuitätssatzes³⁾.

2. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einheitliche Darstellung der Theorie der Fortsetzung k -dimensionaler Flächen im C^n zu geben. Dabei ist immer $k \geq 2$ vorausgesetzt; die topologische Dimension der Flächen soll also mindestens vier sein. Das entspricht einer Theorie der Systeme von $n-k$ Funktionen von $k \geq 2$ Veränderlichen, so wie die Flächen g^{n-1} Funktionen von $n-1$ Variablen zugeordnet sind. Daß auch für $k < n-1$ die Dinge ähnlich sind wie bei $k = n-1$, habe ich in [14] schon angedeutet. Jedoch führt die genaue Analyse zu neuen Ergebnissen und einer durchsichtigen Begründung auch der Sätze für $k = n-1$.

Zunächst sei erwähnt, daß die Aussagen I.—III. auch für Flächen g^k richtig sind, wenn nur $k \geq 2$ ist. Sie lassen sich aber erheblich verschärfen. Zum Beispiel gilt über II. hinaus:

IIa. Die Fläche g^k sei in der Umgebung der abgeschlossenen Ebene $E^q = (z_1 = \dots = z_p = 0; p = n-q)$ des projektiven C^n analytisch und $g^k \cap E^q \neq \emptyset$. Sie sei zudem irreduzibel und $q+k \geq n+1$. Dann ist g^k eine algebraische Fläche (vgl. die schärferen Sätze 8 und 9, § 7).

Hier ist die wesentliche Bedingung $q+k \geq n+1$. Sie sagt aus, daß $g^k \cap E^q$ mindestens eindimensional ist. Entsprechende Bedingungen sind in allen Sätzen notwendig.

3. Zur Gliederung der Arbeit ist zu sagen: Die angegebenen Sätze beziehen sich auf Flächen g^k , welche in den C^n eingebettet sind. Die g^k werden als in gewissen Gebieten des C^n analytisch vorausgesetzt. Diese Dinge werden im zweiten Teil (§ 3 — § 8) behandelt. Der erste Teil (§ 1 und § 2) befaßt sich dagegen mit allgemeinen Grundlagen (§ 1) und in § 2 mit den unmittelbaren Konsequenzen, welche sich aus der Existenz der Regularitätshüllen für analytische Flächen mit Parameterdarstellung ergeben. Ein Beispiel mag das erläutern. T sei die Kugelschale $\frac{1}{2} < \sum_1^k |\tau_j|^2 < 1$ des (τ_1, \dots, τ_k) -Raumes

und $H(T)$ die Kugel $\sum_1^k |\tau_j|^2 < 1$. Weiter seien die Funktionen $g_i(\tau)$ in T regulär und die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial \tau_j} \end{pmatrix}$ in T überall vom Range k . Dann bildet $z_i = g_i(\tau)$ das Gebiet T auf eine k -dimensionale analytische Fläche \mathcal{E}^k des z -Raumes mit der Darstellung $z_i = g_i(\tau); \tau \in T$ ab. \mathcal{E}^k mit dieser Darstellung nenne ich ein „analytisches Element“. Nun bleiben die $g_i(\tau)$ in $H(T)$ notwendig noch regulär (vgl. I. für Funktionen). Auch läßt sich zeigen, daß der Rang von $\begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_j} \end{pmatrix}$ innerhalb $H(T)$ höchstens in isolierten Punkten kleiner als k ist.

³⁾ Vgl. [3], S. 49 und [2].

Daraus folgt, daß $z_i = g_i(\tau)$ auch $H(T)$ auf eine analytische Fläche \mathfrak{E}_*^k des z -Raumes abbildet. \mathfrak{E}_*^k nenne ich eine Erweiterung von \mathfrak{E}^k . Die Erweiterung führt also wieder zu einem Flächenstück mit Parameterdarstellung, einem „Element“. In unserem Falle zieht die Fortsetzung der Abbildungsfunktionen eine Fortsetzung der Abbildung nach sich, die wieder eine Erweiterung des Elementes \mathfrak{E}^k zur Folge hat. Die Möglichkeit der Erweiterung gründet sich also auf Eigenschaften des Urbildes T im Parameterraum und der Abbildungsfunktionen. Auf die Einbettung in Gebiete des z -Raumes wird nicht Bezug genommen⁴⁾.

4. Nun zum Inhalt der einzelnen Abschnitte. Im § 1 werden die grundlegenden Begriffe erklärt und die Sätze abgeleitet, die für das folgende unentbehrlich sind. Soweit es möglich ist, habe ich mich auf die Literatur bezogen. Jedoch sind nicht alle Sätze, die ich brauche, soweit mir bekannt, bisher ausdrücklich formuliert und bewiesen worden. Statt des früher üblichen Ausdrucks „Fläche“ benutze ich den jetzt gebräuchlichen „analytische Menge“. Daneben kommt auch noch „ k -dimensionale Fläche“ vor in derselben Bedeutung wie „irreduzible k -dimensionale analytische Menge“. „Dimension“ heißt immer „komplexe“ Dimension. Die topologische Dimension ist doppelt so groß. In § 1 ist $k = 1$ noch zugelassen.

Der Inhalt des § 2 ist eine genauere Untersuchung der oben skizzierten Sachverhalte. Der von dem WEIERSTRASSschen abweichende Begriff des „Elementes“ ist ausreichend allgemein zu bestimmen. Darauf werden Bedingungen angegeben, unter denen die Abbildungsfunktionen fortsetzbar sind und zu einer Erweiterung des gegebenen Elementes führen. Daß dies keineswegs immer der Fall ist, wenn die Funktionen fortsetzbar sind, geht aus einem bekannten Beispiel hervor (vgl. [12], S. 177). Eine wichtige Rolle spielt hierbei die Aufgabe, zu einer vorgelegten Fläche des z -Raumes passende Parameter zu finden. Diese Dinge werden trotz ihrer grundsätzlichen Bedeutung hier nur soweit behandelt, als sie im folgenden gebraucht werden. Das Ergebnis sind die Sätze 2.4 und 2.5. Letzterer wird im § 4 wesentlich benutzt. — Unmittelbare Folgerungen aus den Ergebnissen des § 2 sollen in einer anderen Arbeit gezogen werden.

Der zweite Teil der Arbeit beginnt in § 3 mit der Kennzeichnung der Konvexitätseigenschaften von Hyperflächen im Anschluß an LEVI⁵⁾ und KRZOSKA. Die von KRZOSKA begonnene Untersuchung muß weitergeführt werden, damit sie für die Flächentheorie ausreicht. Die entscheidende Rolle bei einer Hyperfläche $\varphi = 0$ spielt der Index q (= Anzahl der positiven

⁴⁾ Die Einsicht, daß es grundsätzlich wichtig ist, diese Eigenschaften von denjenigen zu trennen, die auf der Einbettung in den z -Raum beruhen, verdanke ich Unterhaltungen mit Herrn K. REIDEMEISTER über meinen ursprünglichen Beweis des Satzes von der lokalen Fortsetzung (Satz 1 und 2, § 4). Ich bin daher Herrn K. REIDEMEISTER für sein freundliches Interesse und die Anregungen, die ich in diesen Unterhaltungen empfang, sehr zu Dank verpflichtet.

⁵⁾ Vgl. [3], 4. Kap., § 3.

Quadrate in der Normalform) der HERMITESchen Form $\sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\mu} u_\mu \bar{u}_\mu$ auf der

Ebene $\sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu} u_\mu = 0$, gebildet in einem Punkte ζ^0 von $\varphi = 0$: Es gibt eine q -dimensionale Fläche durch ζ^0 , welche sonst $\varphi \leq 0$ nicht trifft. Andererseits schneidet jede $(n - q)$ -dimensionale Fläche $\varphi > 0$, wenn sie durch ζ^0 geht. — Das sind die für die Existenz und Einzigkeit der „lokalen Fortsetzung“ (vgl. § 4) grundlegenden geometrischen Sachverhalte.

§ 4 bringt zwei Sätze über die lokale Fortsetzung. Der eine lautet:

ζ^0 sei ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$, U eine Umgebung von ζ^0 und $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$. q sei der oben erklärte Index in ζ^0 . Es sei g^k in U analytisch und $q + k \geq n + 1$. Dann gibt es eine Umgebung U_* von ζ^0 und eine in U_* analytische Menge g_*^k , welche in $U_* \cap \bar{U}$ mit g^k übereinstimmt. Je zwei solche Fortsetzungen sind in einer vollen Umgebung von ζ^0 gleich.

Die charakteristische Bedingung ist $q + k \geq n + 1$. Sie ist unentbehrlich. Für Funktionen kann man formal $k = n$ setzen und erhält die Forderung $q \geq 1$. Die Hyperfläche muß also — wie zu erwarten — von der Seite $\varphi > 0$ konvex in bezug auf eindimensionale Flächen sein, soll man der Fortsetzbarkeit der Funktion sicher sein.

§ 5 bringt Hilfssätze über den Zusammenschluß lokaler Fortsetzungen zu Fortsetzungen im Großen. Darauf wird die Fortsetzung analytischer Flächen behandelt, die in der Umgebung des Randes eines beschränkten Sterngebietes gegeben sind. Das ist die Grundlage für § 6.

Unabhängig vom § 6, und deshalb hier zuerst besprochen, sind die Sätze 8, 9 des § 7 (vgl. den unter 2. angeführten Satz IIa) und das für weitere Untersuchungen besonders wichtige Analogon von III in § 8.

Im § 6 wird zunächst der Begriff der „ q -Konvexität“ eines Gebietes eingeführt. Er ist ein Analogon zur „Regulärkonvexität“⁶⁾ und bezieht sich auf Systeme von $n - q$ Funktionen. Für $q = n - 1$ geht er in die Regulärkonvexität über. Wie regulärkonvexe Gebiete sich von innen durch analytische Polyeder approximieren lassen, so q -konvexe durch „analytische q -Polyeder“. Letztere sind von außen konvex in bezug auf q -dimensionale analytische Flächen. Sie können einspringende Kanten haben. Im allgemeinen sind sie keine Regularitätsgebiete⁷⁾. Jedoch haben sie, jedenfalls wenn sie beschränkt sind, wie diese einen zusammenhängenden Rand. Ein einfaches Beispiel im (u, v, w) -Raum: Der Durchschnitt von $|w| < 1$ und $(|u| < 1/2; |v| < 1) \cup (|u| < 1; |v| < 1/2)$ ist ein 1-Polyeder. Es gilt nun der Satz:

G sei beschränkt und q -konvex, G_0 ganz in G gelegen. Die Fläche g^k sei in $G - G_0$ analytisch und komme dem Rand von G beliebig nahe. Ist weiter $k \geq 2s$ ($s = n - q$), so gilt: Es gibt eine in G analytische Fläche g_*^k , die g^k enthält. Außerdem gibt es ein ganz in G gelegenes Gebiet G_* , so daß $g_*^k = g^k$ in $G - G_*$ ist (vgl. Satz 7).

⁶⁾ Vgl. [3], S. 72.

⁷⁾ Vgl. [1].

Die Bedingung $k \geq 2s$ ist zu scharf. Ich werde später zeigen, daß $k \geq s + 1$ genügt.

5. Auf einen wesentlichen Punkt, der in den Beweisen zu beachten ist, sei noch hingewiesen. Es sei P ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$, U eine Umgebung von P und $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$. Sind nun g_1 und g_2 in U reguläre Funktionselemente, die in \bar{U} übereinstimmen, so ist auch in U notwendig $g_1 = g_2$. Bei Flächen g_1^k und g_2^k ist das jedoch keineswegs richtig. Ist etwa $\varphi > 0$ das Kugellinnere, so gibt es bekanntlich von einander verschiedene Flächenstücke g_1^{n-1} und g_2^{n-1} durch P , welche $\varphi \geq 0$ überhaupt nicht schneiden. Sie stimmen also in \bar{U} überein (da beide dort keinen Punkt haben), in U jedoch nicht. Auf die Gleichheit von g_1 und g_2 in einer vollen Umgebung von P kann erst geschlossen werden, wenn $\varphi > 0$ etwa das Kugeläußere ist. $\varphi > 0$ muß also Konvexitätseigenschaften haben. — Das ist die Ursache dafür, daß I. für Funktionen richtig bleibt (Satz von HARTOGS und OSGOOD), für Flächen aber falsch wird, wenn man die Kugelschale durch die Differenz $G - G_0$ zweier beliebiger Gebiete ($G_0 \subset G$) ohne Konvexitätseigenschaften ersetzt. Auch die Bedingung $k \geq 2s$ des Satzes 7 rührt daher.

Inhalt.

§ 1. Grundlagen	100
§ 2. Analytische Elemente und ihre Erweiterung	105
§ 3. Die Differentialbedingung	113
§ 4. Lokale Fortsetzung	119
§ 5. Fortsetzung im Großen.	126
§ 6. Konvexität in bezug auf q -dimensionale analytische Flächen	129
§ 7. Unbeschränkte Gebiete.	134
§ 8. Das Analogon eines HARTOGSSchen Satzes	135

§ 1. Grundlagen.

1.1. Analytische Mengen und Gebilde.

1.11 Analytische Mengen^{a)}.

Die Punktmenge \mathfrak{M} des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen ist *analytisch im Punkte P* , wenn es eine Umgebung $U(P)$ und dort reguläre Funktionen f_1, \dots, f_r gibt, so daß $\mathfrak{M} \cap U(P)$ genau aus den gemeinsamen Nullstellen der f besteht. Ist \mathfrak{M} in jedem Punkte eines Gebietes G analytisch, so ist \mathfrak{M} in G *analytisch*.

\mathfrak{M} sei analytisch in G . Gibt es nun zwei nichtleere von \mathfrak{M} verschiedene in G analytische Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, so daß $\mathfrak{M} \cap G = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ ist, dann ist \mathfrak{M} in G *reduzibel*. Anderenfalls heißt \mathfrak{M} in G *irreduzibel*. \mathfrak{M} ist *im Punkte P irreduzibel*, wenn es beliebig kleine Umgebungen $U(P)$ gibt, in denen \mathfrak{M} irreduzibel ist. — Es gelten die Sätze:

1. $\mathfrak{M} \cap G$ ist die Vereinigung abzählbar vieler in G irreduzibler analytischer Mengen, der *Komponenten*.

^{a)} Vgl. [7] und vor allem [13], dort auch weitere Literaturangaben.

2. Zu jedem $P \in \mathfrak{M}$ gibt es Umgebungen $U(P)$, so daß $\mathfrak{M} \cap U(P)$ die Vereinigung endlich vieler in $U(P)$ analytischer, in P irreduzibler Mengen — der *Primelemente* — ist.

Jeder (irreduziblen) Komponente \mathfrak{M}' von $\mathfrak{M} \cap G$ läßt sich wie folgt eine („komplexe“) Dimension k zuordnen. Die Punkte P mit Umgebungen $U(P)$ so, daß $\mathfrak{M}' \cap U(P)$ einem $2k$ -dimensionalen Simplex homöomorph ist, liegen auf \mathfrak{M}' dicht. k ist dann die Dimension von \mathfrak{M}' .

Die Koordinaten seien $(v_1, \dots, v_m, \tau_1, \dots, \tau_k)$. Die Projektion von \mathfrak{M} in den τ -Raum ist die Menge derjenigen (τ_1, \dots, τ_k) , die als Koordinaten von \mathfrak{M} -Punkten vorkommen.

Für die Theorie der analytischen Mengen ist der folgende Satz von besonderer Bedeutung. Dazu setzen wir voraus: Die Veränderlichen seien $(v_1, \dots, v_m, \tau_1, \dots, \tau_k)$, das Gebiet H das Produkt des Zylinders $\bigcap_{i=1}^m (|v_i| < 1)$ mit dem Gebiet T des τ -Raumes. \mathfrak{M} sei in H analytisch. Überdies möge jede Ebene $\tau_1 - \tau_1^0 = \dots = \tau_k - \tau_k^0 = 0$ mit \mathfrak{M} nur isolierte Punkte gemein haben. Dann gilt der

Einbettungssatz⁹⁾. Zu jedem Punkte $P = (v^0, \tau^0) \in \mathfrak{M}$ gibt es eine Polyzylinder-Umgebung $U(P) = (U_v, U_\tau)$ und eine in ihr analytische Menge \mathfrak{M}^* , welche $\mathfrak{M} \cap U(P)$ umfaßt, mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Projektionen von \mathfrak{M}^* und $\mathfrak{M} \cap U(P)$ in den τ -Raum sind identisch.
2. Diese Projektion heiße \mathfrak{M}_τ^* . Sie ist eine analytische Menge, oder der volle Polyzylinder U_τ .
3. Es gibt Polynome mit in U_τ regulären Koeffizienten

$$\omega_i(v_i, \tau) = (v_i - v_i^0)^{l_i} + A_1^{(i)}(\tau)(v_i - v_i^0)^{l_i-1} + \dots + A_{l_i}^{(i)}(\tau),$$

so daß \mathfrak{M}^* genau dargestellt wird durch

$$\omega_1 = \dots = \omega_m = 0; \tau \in \mathfrak{M}_\tau^*.$$

Es ist $A(\tau^0) = 0$ und für alle Wurzeln (v_i', τ') von $\omega_i = 0$ gilt $v' \in U_v$.

Zusatz. Alle Komponenten von \mathfrak{M} seien k -dimensional. Dann heiße \mathfrak{M} selbst k -dimensional. Alsdann gilt noch:

4. \mathfrak{M}_τ^* ist der volle Polyzylinder.
5. $U(P)$ und die ω_i lassen sich so wählen, daß
 - a) die Projektion von $\mathfrak{M} \cap U(P)$ in den (v_i, τ) -Raum durch $\omega_i = 0$ genau gegeben ist;
 - b) zu jedem Punkt $P^* = (v^*, \tau^*) \in \mathfrak{M}$, dessen τ^* nicht auf der Vereinigung der Diskriminantenflächen der ω_i liegt, eine Umgebung $U(P^*)$ existiert, in welcher $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ ist.
6. Ist \mathfrak{M} irreduzibel in P , so können die ω_i irreduzibel gewählt werden.

1.12 Ausgezeichnete analytische Gebilde.

Jeder irreduziblen analytischen Menge \mathfrak{M} der Dimension k ist nach WEIERSTRASS ein analytisches Gebilde k -ter Stufe ($\hat{\mathfrak{M}}$ zugeordnet¹⁰⁾). Das ist ein

⁹⁾ Vgl. [13], Satz 1.

¹⁰⁾ Vgl. [12], S. 170 und [5].

topologischer Raum, dessen Punkte die Paare (P, \mathfrak{P}) sind. Hier ist P ein Punkt der Menge \mathfrak{M} und \mathfrak{P} ein zugehöriges Primelement. Wir fassen $\tilde{\mathfrak{M}}$ als Punktmenge über dem C^n auf. Die Spur von $\tilde{\mathfrak{M}}$ — das ist die Projektion in den C^n — ist \mathfrak{M}^k . Die Punkte auf den Selbstdurchdringungen von \mathfrak{M}^k sind mehrfach zu zählen.

Es sei nun $\omega(u, \tau) = (u - u^0)^d + A_1(\tau) \cdot (u - u^0)^{d-1} + \dots + A_d(\tau)$ ein in $(|u| < \infty; \tau \in T)$ irreduzibles Polynom, A regulär in T . Ist außerdem $A(\tau^0) = 0$ und ω in (u^0, τ^0) irreduzibel, so heißt ω ausgezeichnet.

Definition 1.1. Das durch $\omega = 0$ über $(|u| < \infty; \tau \in T)$ definierte analytische Gebilde werde $\Omega(u, \tau)$ genannt. Ist ω ausgezeichnet, so auch $\Omega(u, \tau)$ und (u^0, τ^0) sein Mittelpunkt.

Weiter seien g_1, \dots, g_n auf $\Omega(u, \tau)$ eindeutige reguläre Funktionen. g ist also im Punkte (u', τ') eine reguläre Funktion von τ im gewöhnlichen Sinne, wenn die Diskriminante $D(\tau)$ von ω in τ' nicht verschwindet. In den übrigen Punkten ist g stetig¹¹⁾.

Definition 1.2. Die durch $v_i = g_i(P); P \in \Omega(u, \tau)$ über dem (u, τ, v) -Raum erklärte Punktmenge $\Omega(u, \tau, v)$ heißt analytisches Gebilde der Dimension k . Ist $\Omega(u, \tau)$ ausgezeichnet (Mittelpunkt $P^0(u^0, \tau^0)$) und $v_i^0 = g_i(P^0)$, so heißt auch $\Omega(u, \tau, v)$ ausgezeichnet und (u^0, τ^0, v^0) sein Mittelpunkt.

Dem Gebilde $\Omega(u, \tau, v)$ ist zugeordnet erstens die analytische Menge $\bar{\Omega}(u, \tau, v)$ der Spurpunkte im (u, τ, v) -Raum, und zweitens ihre Projektion in den (τ, v) -Raum. Diese gleichfalls analytische, k -dimensionale und irreduzible Menge besitzt dann die Parameterdarstellung $v_i = g_i(P)$. Sie soll kanonisch heißen. Das Gebilde $\Omega(u, \tau)$ tritt hier nur als Hilfsmittel zur Erklärung der g_i auf.

Definition 1.3. Läßt sich die Menge \mathfrak{M}^k des (τ, v) -Raumes als Projektion eines Gebildes $\Omega(u, \tau, v)$ darstellen, so heiße die Parameterdarstellung $v_i = g_i(P)$ (g regulär auf $\Omega(u, \tau)$) kanonisch. Ist $\Omega(u, \tau)$ ausgezeichnet, so ist \mathfrak{M}^k und seine Darstellung ausgezeichnet.

Aus dem Einbettungssatz ergibt sich nun der

Satz von WEIERSTRASS¹²⁾. Unter den Voraussetzungen des Einbettungssatzes können die Primelemente von \mathfrak{M} in jedem Punkte so gewählt werden, daß sie ausgezeichnete Mengen sind. Sie haben dann also eine ausgezeichnete kanonische Darstellung. Sie mögen ausgezeichnet heißen und (v^0, τ^0) ihr Mittelpunkt.

Beweis. $U(P) = (U_v(P), U_\tau(P))$ und die ω_i seien gemäß (5), (6) des Einbettungssatzes gewählt und Q ein Punkt des Primelementes \mathfrak{P} , der (5 b) genügt. In einer Polyzylinder-Umgebung $U^*(Q) = (U_v^*, U_\tau^*)$ besitzt \mathfrak{P} dann eine reguläre Darstellung $v_i = g_i(\tau)$. Man erhält g_i durch Auflösen der Gleichung $\omega_i = 0$. Es sei U_τ' die an den Diskriminantenflächen der ω_i geschlitzte Umgebung $U_\tau(P)$. In U_τ' sind die g_i unbeschränkt regulär fortsetzbar; der

¹¹⁾ Die Argumente der g_i sind die Punkte des Gebildes $\Omega(u, \tau)$, die durch τ ja nicht eindeutig bestimmt sind. Trotzdem werde ich diese Punkte häufig auch mit τ bezeichnen. Mißverständnisse sind nicht zu befürchten.

¹²⁾ Vgl. [12], S. 132.

über U_τ gelegene Teil \mathfrak{P}' von \mathfrak{P} ergibt sich durch gleichzeitige Fortsetzung in der Darstellung $(v_1, \dots, v_m) = (g_1, \dots, g_m)$. Die g_i sind in U_τ selbst algebraisch und λ_i -wertig. Es gibt nun ein ausgezeichnetes analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ über dem Gebiete $(|u| < \infty; U_\tau)$ mit dieser Eigenschaft: Die Funktionen g_i sind auf $\Omega(u, \tau)$ regulär und eindeutig. Zu zwei verschiedenen Punkten von $\Omega(u, \tau)$ mit gleicher Spur gehören verschiedene Systeme (g_1^*, \dots, g_m^*) von Zweigen der g_i (vgl. [12], S. 118).

\mathfrak{P} erhält man aus \mathfrak{P}' , indem man die Häufungstellen hinzunimmt. Die Darstellung $v_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega(u, \tau)$ ist die gesuchte.

1.13 Maximumprinzip und Folgerungen¹³⁾.

Hilfssatz. Es sei \mathfrak{P} ein ausgezeichnetes Primelement mit dem Mittelpunkt O , $h(P)$ eine auf \mathfrak{P} eindeutige reguläre Funktion. Ist dann $|h(O)| = \max |h(\mathfrak{P})|$ so ist $h(P)$ eine Konstante.

Beweis. $v_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ sei die Darstellung von \mathfrak{P} gemäß Definition 3. Durch sie geht h in eine Funktion $\bar{h}(\tau)$ über, die auf Ω regulär ist. Sie hat ihr Maximum im Mittelpunkt M von Ω . Ω habe r Blätter; \bar{h} hat also r Zweige $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r$. Die symmetrischen Grundfunktionen der \bar{h}_i sind in der τ -Projektion T von Ω eindeutig und regulär. Sie sind sämtlich Konstanten. Sei etwa $s(\tau) = \Sigma \bar{h}_i$. Dann ist $\max |s| \leq \max \Sigma |\bar{h}_i| \leq \Sigma \max |\bar{h}_i| \leq r |\bar{h}(M)| = |s(M)|$. Also ist $s = s(M)$ nach dem Satz vom Maximum. Entsprechend schließt man bei den anderen Grundfunktionen. Da sie nun alle konstant sind, muß auch \bar{h} und dann h selbst konstant sein.

Folgerungen. Die Bedeutung des Einbettungssatzes beruht auf Folgendem. Ist die Menge \mathfrak{M} im Punkte P analytisch, so sind nach geeigneter Wahl affiner Koordinaten und der Umgebung $U(P)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Der WEIERSTRASSsche Satz kann daher auch so ausgesprochen werden: *P sei ein Punkt der analytischen k -dimensionalen Menge \mathfrak{M} . Die zu P gehörigen Primelemente und die Koordinaten lassen sich dann so bestimmen, daß die Primelemente ausgezeichnete kanonische Darstellungen besitzen. Daraus und aus dem Hilfssatz ergeben sich wichtige Aussagen.*

Maximumprinzip. Die Menge \mathfrak{M} sei in G analytisch und irreduzibel. $h(P)$ sei eine auf \mathfrak{M} reguläre eindeutige Funktion. Weiter sei $|h(Q)| = \max |h(\mathfrak{M})|$ und $Q \in \mathfrak{M}$. Dann ist h eine Konstante.

Der Beweis folgt sofort aus dem Hilfssatz und dem WEIERSTRASSschen Satz.

Satz 1.1. Sei \mathfrak{M} in $U(P)$ analytisch und a eine in $U(P)$ reguläre Funktion mit $|a(P)| = 1$. Schneidet \mathfrak{M} das Gebiet $|a| > 1$ nicht, so muß \mathfrak{M} auf der analytischen Menge $a = a(P)$ liegen.

Das ergibt sich, wenn man das Maximumprinzip auf die Funktionen anwendet, welche a auf den Komponenten von \mathfrak{M} induziert.

Satz 1.2. P sei ein Punkt der analytischen Hyperebene E der topologischen Dimension $2n - 1$, $U(P)$ eine Umgebung von P und \mathfrak{M} eine k -dimensionale

¹³⁾ Vgl. [16], S. 233.

analytische Menge, welche P enthält. Dann liegt \mathfrak{M} entweder ganz auf E oder aber \mathfrak{M} schneidet beide Seiten von E .

Nach Satz 1.1 ist das richtig, wenn E eine Darstellung $|a| = 1$ mit regulärer Funktion a hat. Das ist der Fall. — Aus diesem Satze folgt, daß es beschränkte, abgeschlossene in allen ihren Punkten analytische Mengen einer Dimension $k \geq 1$ nicht gibt. Das ist

Satz 1.3. Das Gebiet G sei beschränkt und \mathfrak{M}^k in G analytisch ($k \geq 1$). Dann kommt \mathfrak{M}^k dem Rand von G beliebig nahe (vgl. [13], Satz 7).

Beweis. Anderenfalls muß es eine Kugel K geben, welche \mathfrak{M}^k umfaßt und deren Rand einen Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ enthält. Die analytische Hypertangente E von K in P wird von \mathfrak{M}^k nur in P berührt. Die andern Punkte von \mathfrak{M}^k liegen alle auf derselben Seite von E . Das widerspricht Satz 1.2.

Ein anderer Beweis des Maximumprinzips (und des Satzes 1.3) folgt aus

Satz 1.4. \mathfrak{M} sei in G analytisch und irreduzibel, $h(P)$ eine auf \mathfrak{M} reguläre eindeutige Funktion. Ist nun $h(Q) = 0$ (Q auf \mathfrak{M}) und $\varepsilon > 0$ genügend klein, so gilt: Entweder ist h (auf \mathfrak{M}) identisch Null, oder h nimmt alle Werte c' des Kreises $|c| < \varepsilon$ an (insbesondere die reellen Werte).

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, daß \mathfrak{M} erstens ein ausgezeichnetes Primelement mit dem Mittelpunkt Q und zweitens eindimensional ist. Dann hat \mathfrak{M} eine Darstellung $v_i = g_i(\tau_1)$; $\tau_1 \in \Omega(u, \tau_1)$ mit nur einem Parameter τ_1 . Die τ_1 -Projektion von Ω ist ein Gebiet über der τ_1 -Ebene. $h(P)$ gehe in $\tilde{h}(\tau_1)$ über. Die Behauptung folgt nun aus der Gebietstreue der Abbildung $v = \tilde{h}(\tau_1)$.

Kanonische Darstellung im Großen.

Voraussetzungen. \mathfrak{M} sei eine im Gebiet $(\bigcap_1^m (|v_i| < 1); \tau \in T)$ des (v, τ) -Raumes analytische, irreduzible, k -dimensionale Menge. Überdies möge \mathfrak{M} vom Rande des Gebietes $\bigcap_1^m (|v_i| < 1)$ einen positiven (euklidischen) Abstand haben. Dann gilt der

Satz 1.5. Es gibt über $(|u| < \infty; \tau \in T)$ ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ und auf $\Omega(u, \tau)$ reguläre eindeutige Funktionen g_1, \dots, g_m so, daß \mathfrak{M} durch $v_1 = g_1(\tau); \dots; v_m = g_m(\tau); \tau \in \Omega$ genau dargestellt wird. $\Omega(u, \tau)$ ist im allgemeinen nicht ein ausgezeichnetes Gebilde. Diese Darstellung heiße kanonisch.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen und von Satz 1.3 trifft jede Ebene $\tau_1 - \tau_1^0 = \dots = \tau_k - \tau_k^0 = 0$ die Menge \mathfrak{M} nur in isolierten Punkten. Daher sind die Bedingungen für den Einbettungssatz in jedem Punkte von \mathfrak{M} erfüllt. Man überdecke nun $(\bigcap_1^m (|v_i| < 1); \tau \in T)$ mit abzählbar vielen Polyzylinder-Umgebungen $U(P)$ der Art, wie sie im Einbettungssatz vorkommen. Zu jeder $U(P)$ gehören ausgezeichnete Polynome $\omega_i^P(v_i, \tau)$ mit dem Mittelpunkt P . Sei T' das an der Vereinigung der Diskriminantenflächen der ω_i^P

geschlitzte Gebiet T . Wie beim WEIERSTRASSschen Satz folgt: Ist Q ein Punkt von \mathfrak{M} , der über T' liegt, so hat \mathfrak{M} in einer Umgebung $U(Q)$ eine reguläre Darstellung $v_i = g_i(\tau)$. Da \mathfrak{M} vom Rande von $\bigcap_1^m (|v_i| < 1)$ einen positiven Abstand hat, sind die g_i in T' unbeschränkt regulär fortsetzbar, endlich-deutig und in T selbst algebroid. Jedes g_i genügt daher einer in $(|v_i| < \infty; \tau \in T)$ irreduziblen regulären Gleichung $v_i^m + A_1^{(i)}(\tau) v_i^{m-1} + \dots + A_m^{(i)}(\tau) = 0$. Den über T' gelegenen Teil \mathfrak{M}' von \mathfrak{M} erhält man durch gleichzeitige Fortsetzung der g_i . Es gibt nun ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ über dem Gebiete $(|u| < \infty; \tau \in T)$ des (u, τ) -Raumes mit der Eigenschaft: Die Funktionen sind auf $\Omega(u, \tau)$ regulär und eindeutig. Zu zwei verschiedenen Punkten von Ω mit derselben Spur gehören verschiedene Systeme (g_1^*, \dots, g_m^*) von Zweigen der g_i (vgl. [12] S. 118). \mathfrak{M} erhält man aus \mathfrak{M}' , indem man die Häufungsstellen hinzunimmt. Die Darstellung $v_i = g_i(\tau); \dots; v_m = g_m(\tau)$ ist die gesuchte.

§ 2. Analytische Elemente und ihre Erweiterung.

2.1 Analytische Elemente¹⁴⁾.

Es sollen besondere analytische Mengen mit bequemen Parameterdarstellungen, die analytischen Elemente, ausgezeichnet werden. Dazu gehen wir von einem Gebilde $\Omega^*(u, \tau)$ aus, definiert im Gebiete $(|u| < \infty; \tau \in T^*)$ des (u, τ) -Raumes durch eine irreduzible reguläre Gleichung

$$\omega(u, \tau) = u^2 + A_1(\tau) u^{2-1} + \dots + A_1(\tau) = 0.$$

Es sei T ganz in T^* enthalten und $\Omega(u, \tau)$, der über T gelegene Teil von Ω^* , noch irreduzibel. Die Funktionen g_1, \dots, g_n seien auf Ω^* regulär und eindeutig. Darüber hinaus wird von der durch $z_i = g_i(\tau)$ vermittelten Abbildung gefordert:

a) Das Gleichungssystem $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat auf Ω^* nur isolierte Lösungen.

b) Die Punkte auf Ω^* (in denen die Diskriminante nicht verschwindet und) für welche der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau_j}\right)$ kleiner als k ist, erfüllen höchstens $(k-1)$ -dimensionale analytische Mengen.

Dazu nehmen wir noch eine Bedingung, die nicht immer erfüllt zu sein braucht:

c) Ist R Randpunkt von Ω und z' sein Bild, so hat das System $z'_i = g_i(\tau)$ innerhalb von Ω keine Lösung.

Definition 2.1. 1. Erfüllt die Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ von Ω^* die Bedingungen a), b), so heiße sie auf Ω^* zulässig und auf Ω zulässig im weiteren Sinne.

2. Ist auch c) noch erfüllt, so heißt $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω zulässig im engeren Sinne.

Definition 2.2. Die Punktmenge \mathfrak{E}^k des z -Raumes ist ein analytisches Element der Dimension k , wenn sie auf ein Gebilde Ω durch eine auf ihm im engeren

¹⁴⁾ Vgl. [12], S. 170. Hier wird „Element“ anders erklärt.

Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ bezogen ist. Die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ (g_i regulär auf Ω^*) ist eine zulässige Parameterdarstellung.

Die Berechtigung dieser Definition folgt aus

Satz 2.1. Jedes analytische Element \mathfrak{E}^k ist eine irreduzible, k -dimensionale analytische Menge.

Beweis. 1. \mathfrak{E}^k ist eine analytische Menge. Durch $z = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ (u, τ) wird nach Definition 1.2 ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau, z)$ des (u, τ, z) -Raumes erklärt. Seine z -Projektion ist \mathfrak{E}^k . Die Menge der Spurpunkte von $\Omega(u, \tau, z)$ sei $\bar{\Omega}$. Sie ist eine analytische Menge. Ist nun (u^0, τ^0, z^0) ein Punkt auf $\bar{\Omega}$, so trifft die Ebene $z_1 - z_1^0 = \dots = z_n - z_n^0 = 0$ wegen der Bedingung a) $\bar{\Omega}$ nur in isolierten Punkten. Alle diese Schnittpunkte sind wegen c) innere Punkte von $\bar{\Omega}$. Infolgedessen kann man ein Gebiet $H = \bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i$; u, τ beliebig) so angeben, daß gilt: $H \cap \bar{\Omega}$ ist analytisch und beschränkt; auf $H \cap \bar{\Omega}$ treffen die Voraussetzungen des Einbettungssatzes zu. Dabei spielt z die Rolle von τ , (u, τ) die von v . Aus 1., 2. des Satzes geht hervor, daß die z -Projektion von $H \cap \bar{\Omega}$, das ist aber $\mathfrak{E}^k \cap \bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i)$, eine analytische Menge oder der Polyzylinder $\bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i)$ ist. Unter 2. ergibt sich mit, daß der erste Fall eintritt.

2. \mathfrak{E}^k ist k -dimensional. z^0 sei ein Punkt auf \mathfrak{E}^k . Er hat endlich viele Urbilder P_1, \dots, P_s innerhalb $\Omega(u, \tau)$. Seien $U(P_\sigma)$ noch genauer zu bestimmende Umgebungen der P_σ auf $\Omega(u, \tau)$. Dann gibt es eine Umgebung $U(z^0)$, so daß $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ in der Vereinigung der Bilder U'_σ der $U(P_\sigma)$ enthalten ist. Sonst müßte z^0 außerdem noch Bild eines Randpunktes von Ω sein. Das ist wegen c) nicht der Fall. Da \mathfrak{E}^k genau aus den Bildpunkten von Ω besteht, ist also

$$U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k = U(z^0) \cap \bigcup_1^s U'_\sigma.$$

Sei nun zunächst angenommen, daß kein P_σ Verzweigungspunkt von Ω ist. Dann gibt es eine Umgebung $V(P_\sigma)$ auf Ω , welche keinen Verzweigungspunkt enthält. In ihr sind die g_i gewöhnliche reguläre Funktionen von τ . Das Bild einer passenden Umgebung $V^*(P_\sigma) \subset V(P_\sigma)$ ist eine k -dimensionale analytische Menge. Denn wegen der Bedingung a) sind für das jetzt im gewöhnlichen Sinn reguläre System $z_i = g_i(\tau)$ die Voraussetzungen des Satzes über die „Parameterdarstellung eines Elementes“¹⁵⁾ erfüllt. Es sei $U(P_\sigma) = V^*(P_\sigma)$. Nun folgt

$\alpha)$ Ist z^0 nicht Bild eines Verzweigungspunktes, so ist $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ genau k -dimensional.

Da die Bilder der Nicht-Verzweigungspunkte auf \mathfrak{E}^k dicht liegen, gilt noch $\beta)$ $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ ist überall mindestens k -dimensional. Schließlich gilt

$\gamma)$ Die Bilder der Verzweigungspunkte liegen auf $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ nirgends dicht.

Beweis. Die Verzweigungsfläche g von $\Omega(u, \tau)$ läßt sich darstellen als Vereinigung von abzählbar vielen Gebilden g_ν , deren Dimensionen zwischen 0

¹⁵⁾ Vgl. [12], S. 173.

und $k-1$ liegen, mit den Eigenschaften: 1. \mathfrak{g}_τ hat eine Parameterdarstellung $u = u(\sigma); \tau = \tau(\sigma); \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ mit in $\bigcap_1^h (|\sigma_i| < 1)$ regulären Funktionen u, τ ($h = \dim \mathfrak{g}_\tau$). 2. Die Funktionen $g_i(\tau)$ gehen auf \mathfrak{g}_τ in eindeutige reguläre Funktionen $g_i(\sigma)$ über¹⁶⁾. Sie definieren eine Abbildung von \mathfrak{g}_τ in den z -Raum, welche wegen a) den Bedingungen des Satzes über die „Parameterdarstellung eines Elementes“ genügt. Also ist das Bild \mathfrak{g}'_τ von \mathfrak{g}_τ eine h -dimensionale analytische Menge ($h = \text{Dimension von } \mathfrak{g}_\tau$). Da $h \leq k-1$ ist, liegt \mathfrak{g}'_τ auf $\mathfrak{E}^k \cap U(z^0)$ nirgends dicht. Dasselbe gilt dann für die Vereinigung \mathfrak{g}' der \mathfrak{g}'_τ . Denn wegen der Stetigkeit der Abbildung folgt aus $P'_\tau \in \mathfrak{g}'_\tau$ und $Q' = \lim P'_\tau$, daß Q' auf dem Bild von \mathfrak{g} , also in wenigstens einem \mathfrak{g}'_τ liegt.

3. \mathfrak{E}^k ist irreduzibel.

Es sei $\tilde{\mathfrak{E}}$ das \mathfrak{E}^k zugeordnete analytische Gebilde, dessen Punkte die Paare (P, \mathfrak{P}) mit Primelementen \mathfrak{P} sind. Weiter seien \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 Punkte mit Umgebungen \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 , in denen sich $\tilde{\mathfrak{E}}$ auf ein Ebenenstück abbilden läßt. Es ist zu zeigen, daß es eine Kurve \tilde{C} von \tilde{P}_1 nach \tilde{P}_2 gibt, welche nur Punkte der Art wie \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 enthält. In \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 gibt es nun Punkte \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 mit Urbildern Q_1, Q_2 auf Ω , die nicht auf der Verzweigungsfläche von Ω liegen und in denen die Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau_j} \right)$ den Rang k hat. Q_1, Q_2 lassen sich auf Ω durch eine Kurve C verbinden, die nur Punkte derselben Art wie Q_1, Q_2 besitzt. Ihr Bild verbindet \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 auf die geforderte Weise. Wird nun noch \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 mit \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 in \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 verbunden, so hat man eine gesuchte Kurve \tilde{C} . Also ist $\tilde{\mathfrak{E}}$ zusammenhängend und \mathfrak{E}^k daher irreduzibel.

Anmerkung. Der Begriff des Elementes ist bei WEIERSTRASS¹⁷⁾ etwas anders als hier gefaßt. Er verlangt im wesentlichen, daß die Parameter τ lineare Funktionen der z_i sind. Die Bedingungen a), b), c) sind dann nicht nötig. Diese Einschränkung der Parameter ist jedoch oft lästig. — Legt man den Parametern keine unnatürlichen Beschränkungen auf, so müssen Bedingungen an die g_i gestellt werden. Sonst ist das Bild nicht einmal notwendig eine analytische Menge (vgl. [12], S. 177), geschweige denn k -dimensional. Die wesentliche Bedingung ist nun a). Sie sichert, daß die Bilder der Primelemente von Ω analytische Mengen der Dimension k sind (vgl. unten). b) folgt aus a). Das führe ich nicht aus. Die Bedingung c) ist nur erforderlich, wenn das Bild als analytische Menge des z -Raumes aufgefaßt wird. Dann muß vermieden werden, daß Randpunkte von Ω dasselbe Bild wie innere Punkte haben. Wird das Bild von Ω dagegen als Gebilde $\tilde{\mathfrak{E}}$, also als Punktmenge über dem z -Raum betrachtet, so ist c) überflüssig. Das führe ich jetzt aus.

Es sei nun $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω zulässig im weiteren Sinne. Ist $P(u', \tau')$ ein Punkt auf Ω und z' sein Bild, so gibt es Umgebungen $U(P)$ auf Ω , für die gilt: 1. Die τ -Projektion von $U(P)$ ist der Zylinder $T' = \bigcap_1^k (|\tau_i - \tau'_i| < \delta)$; der

¹⁶⁾ Vgl. [12], S. 122.

¹⁷⁾ Vgl. [12], S. 170.

Rand von $U(P)$ liegt über dem Rande von T' . 2. Das Bild von $U(P)$ ist eine in z' analytische Menge. Genauer: Das Bild von $U(P)$ sei \tilde{U} . Es gibt eine Umgebung $V(z')$ so, daß $\tilde{U} \cap V$ eine k -dimensionale analytische in z' irreduzible Menge ist.

Beweis. $U(P)$ sei gemäß 1. gewählt und so klein, daß T' ganz im Inneren von T enthalten ist. Durch $z_i = g_i(\tau)$; $(u, \tau) \in U$ wird im (u, τ, z) -Raum ein analytisches Gebilde definiert. Seine Spur ist eine k -dimensionale analytische Menge \mathfrak{M}^k . Die Ebene $z_1 - z'_1 = \dots = z_n - z'_n = 0$ trifft \mathfrak{M}^k nur in isolierten Punkten. Es gibt also eine Umgebung $W(u', \tau', z')$ so, daß $z_1 - z'_1 = \dots = z_n - z'_n = 0$ mit $W \cap \mathfrak{M}^k$ nur den Punkt (u', τ', z') gemein hat. Daher kann der Einbettungssatz angewendet werden: Es gibt eine Polyzylinder-Umgebung $W^* = (W_u^*, W_\tau^*, W_z^*)$ derart, daß die z -Projektion \mathfrak{M}_z von $W^* \cap \mathfrak{M}^k$ der volle Zylinder W_z^* oder aber eine analytische Menge ist. Man schließt nun wie im Beweis von Satz 2.1 weiter, daß es eine k -dimensionale Menge ist. Es ist noch zu zeigen, daß es beliebig kleine Umgebungen $U(z')$ gibt, in denen \mathfrak{M}_z irreduzibel ist. Nun gibt es aber beliebig kleine Umgebungen von P , deren Bild irreduzibel ist. Das ergibt sich wie unter 3. im Beweis zu Satz 2.1. Daraus folgt die Behauptung.

Auf Grund des Vorhergehenden werden passende Umgebungen der Punkte von Ω auf Primelemente eines irreduziblen k -dimensionalen analytischen Gebildes über dem z -Raum abgebildet. Daraus geht hervor

Satz 2.1a. Durch eine auf $\Omega(u, \tau)$ im weiteren Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ wird $\Omega(u, \tau)$ auf ein irreduzibles analytisches Gebilde der Dimension k abgebildet. Die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ möge eine zulässige Parameterdarstellung des Gebildes heißen.

2.2. Faserung und Parameterdarstellung.

2.21. Es seien Z, Z_* (Z enthalten in Z_*) Gebiete des z -Raumes im Polyzylinder $\cap (|z_i| < 1)$ und T, T_* (T mit Rand in T_* enthalten) Gebiete des τ -Raumes. (Z, T) bezeichne das Produkt von Z und T . Weiter seien in (Z_*, T_*) reguläre Funktionen $f_1(z, \tau), \dots, f_k(z, \tau)$ gegeben, welche den Bedingungen genügen: 1. Für jedes $\tau' \in T_*$ erklären die Gleichungen $f_1(z, \tau') = \dots = f_k(z, \tau') = 0$ in Z_* genau eine irreduzible analytische Menge der Dimension $n - k$, die Faser $\mathfrak{F}(\tau')$. Verschiedene Fasern sind punktfremd: $\mathfrak{F}(\tau') \cap \mathfrak{F}(\tau'') = 0$ für $\tau' \neq \tau''$. 2. Es ist $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ und $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$. Der Rand von $\mathfrak{F}(\tau)$ sei $C(\tau)$ und $C_* = \bigcup C(\tau)/\tau \in T_*$. 3. Die inneren Punkte von Z_* und diejenigen Randpunkte, die nicht zu C_* gehören oder Häufungspunkte von C_* sind, liegen innerhalb $\bigcap_{i=1}^m (|z_i| < 1)$.

Definition 2.2. Die Darstellung $Z_ = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ heißt „Faserung von Z_* “. Die τ sind die Faserkonstanten.*

2.22. Gegeben sei die in Z_* analytische Menge g_*^k .

Definition 2.3. Die Faserung $Z_ = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ ist zulässig für g_*^k , wenn g_*^k von C_* einen positiven (euklidischen) Abstand hat.*

Satz 2.2. g^k_* sei in Z_* analytisch, irreduzibel und k -dimensional. Die Faserung $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau) / \tau \in T_*$ sei für g^k_* zulässig. Ist dann T genügend groß, so ist $g^k = Z \cap g^k_*$ ein analytisches Element im Sinne der Definition 2.2. Das heißt ausführlich: 1. g^k ist irreduzibel. 2. Es gibt ein Gebilde $\Omega_*(u, \tau)$ über ($|u| < \infty$; T_*) und auf $\Omega_*(u, \tau)$ reguläre eindeutige Funktionen g_1, \dots, g_n , so daß g^k durch $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$ genau dargestellt wird. Dabei ist Ω der über T gelegene Teil von $\Omega_*(u, \tau)$. Die g_i genügen den Bedingungen a), b), c).

Beweis. Durch $f_1(z, \tau) = \dots = f_k(z, \tau) = 0$; $z \in g^k_*$ wird im Gebiete (Z_*, T_*) des (z, τ) -Raumes eine k -dimensionale analytische Menge \mathfrak{M}^k erklärt. Jede Ebene $\tau_1 - \tau'_1 = \dots = \tau_k - \tau'_k = 0$ trifft \mathfrak{M}^k (vgl. Satz 1.3) nur in isolierten Punkten. In diesen ist \mathfrak{M}^k analytisch. Daher ist \mathfrak{M}^k eine in $\bigcap (|z_i| < 1)$; T_* analytische Menge. Außerdem hat \mathfrak{M}^k vom Rande des Gebietes $\bigcap (|z_i| < 1)$

einen positiven Abstand. Auf jede Komponente \mathfrak{M}_λ von \mathfrak{M}^k treffen daher die Voraussetzungen des Satzes über die kanonische Darstellung im Großen zu (§ 1, letzter Satz). Infolgedessen gibt es über ($|u| < \infty$; T_*) ein analytisches Gebilde $\Omega_*(u, \tau)$ und auf ihm reguläre eindeutige Funktionen g_i , so, daß \mathfrak{M}_λ durch $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega_*$ genau dargestellt wird.

Man mache nun T so groß, daß der über T gelegene Teil Ω von Ω_* ein zusammenhängendes, also irreduzibles Gebilde ist. Das ist möglich. Dann hat $g^k = g^k_* \cap Z$ die Darstellung $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$.

Beweis: Die Darstellung genügt jedenfalls den Forderungen a), b), c) (vgl. 2.1). Denn es ist $\mathfrak{F}(\tau') \cap \mathfrak{F}(\tau'') = 0$, wenn $\tau' \neq \tau''$, und zu jedem τ' gibt es nur endlich viele P auf Ω_* . Sie erklärt daher eine im engeren Sinne zulässige Abbildung von Ω . Das Bild ist nach Satz 2.1 eine irreduzible k -dimensionale analytische Menge g^k_0 . Es bleibt zu zeigen, daß $g^k = g^k_0$ ist. Nun ist ja g^k_0 die z -Projektion von $\mathfrak{M}_\lambda \cap (\tau \in T)$, während g^k die Vereinigung der z -Projektionen von $\mathfrak{M}_\lambda \cap (\tau \in T)$ für alle Komponenten \mathfrak{M}_λ von \mathfrak{M}^k ist. Jede dieser Komponenten wird wie oben \mathfrak{M}_λ auf ein irreduzibles Gebilde des z -Raumes abgebildet, dessen Spur in g^k_* enthalten ist. Wären die Spuren dieser Gebilde nicht alle miteinander identisch, so müßte g^k_* reduzibel sein. Das ist nach Voraussetzung nicht der Fall. Also ist $g^k = g^k_0$. Die Darstellung $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$ ist die gesuchte.

2.23. Anmerkung. Es ist ohne weiteres klar, daß der Begriff der Faserung verallgemeinert werden kann. Man darf z. B. statt schlichter Gebiete Z, T analytische Gebilde zugrunde legen. Da im folgenden nur der einfache Faserbegriff benutzt wird, soll das hier nicht weiter ausgeführt werden. Dagegen sei noch auf den engen Zusammenhang mit der analytischen Projektion¹⁸⁾ von Gebieten hingewiesen. Letztere ist jedoch, so weit mir bekannt, bisher nur im Falle $k = n - 1$ behandelt worden.

2.3 Erweiterung analytischer Elemente.

2.31. Ein Element ist erklärt als analytische Menge des z -Raumes, welche durch eine zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf ein Gebilde $\Omega(u, \tau)$ bezogen ist.

¹⁸⁾ Vgl. [8], [18].

Ω ist der über T (T ganz in T_*) gelegene Teil eines Gebildes Ω_* :

$$\omega(u, \tau) = u^m + A_1(\tau) u^{m-1} + \dots + A_m(\tau) = 0; \quad A \text{ regulär in } T_*.$$

Es kann nun vorkommen, daß alle $A(\tau)$ noch in einem T_* umfassenden Gebiet T_{**} regulär sind. Dann gibt es ein Ω_* umfassendes Gebilde Ω_{**} , das durch analytische Fortsetzung aus Ω_* entsteht. Die g_i brauchen auf Ω_{**} aber nicht regulär zu bleiben. Dies ist jedoch der Fall, wenn T_{**} die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(T_*)$ von T_* ist.

Satz 2.3. *Sind Ω_* und Ω_{**} die durch das irreduzible Polynom $\omega(u, \tau)$ über T_* und $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ erklärten Gebilde, so ist jede auf Ω_* reguläre und eindeutige Funktion g zu einer auf Ω_{**} regulären eindeutigen Funktion fortsetzbar. Kurz: g bleibt auf Ω_{**} regulär.*

Beweis. 1. T'_* sei das an der Diskriminantenfläche von ω geschlitzte Gebiet T_* . Über jedem Punkte von T'_* liegen m Punkte von Ω_{**} und auch m Funktionselemente g_μ . Letztere brauchen nicht alle von einander verschieden zu sein. Die symmetrischen Grundfunktionen $E(\tau)$ der g_μ sind in T_* regulär und eindeutig. Sie bleiben es in der Regularitätshülle $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$.

2. Jede irreduzible Komponente g_i der Diskriminantenfläche von ω muß T_* schneiden. Denn in dem Regularitätsgebiet T_{**} gilt die erste Aussage von COUSIN¹⁹⁾: „Zu jeder $(k-1)$ -dimensionalen analytischen Fläche gibt es eine in T_{**} meromorphe Funktion h , welche diese Fläche und nur sie als Polfläche hat.“ Alle Komponenten g_i sind $(k-1)$ -dimensional. Die zu g_i konstruierte Cousin-Funktion h_i muß in T_* Pole haben. Sonst wäre sie auch in T_{**} regulär. Also schneidet g_i T_* . Dasselbe gilt für die Komponenten von \mathfrak{h} (vgl. 3.).

3. Wegen 1. genügen die Funktionselemente von g einer (nicht notwendig irreduziblen) Gleichung $G^m + E_1(\tau) G^{m-1} + \dots + E_m(\tau) = 0$ mit in T_{**} regulären eindeutigen Koeffizienten $E(\tau)$. Sei \mathfrak{h} die τ -Projektion der Verzweigungsfläche des zugehörigen Gebildes und $\mathfrak{h}_* = \mathfrak{h} \cap T_*$. Da g auf Ω_* regulär ist, muß \mathfrak{h}_* und dann (wegen 2.) auch \mathfrak{h} in der Diskriminantenfläche g von Ω_{**} enthalten sein. Es sei jetzt T'_{**} das an g geschlitzte Gebiet T_{**} . In T'_{**} sind sowohl die Funktionselemente von u als auch die von g unbeschränkt regulär fortsetzbar. Die gleichzeitige Fortsetzung der Paare u, g — die Zuordnung des Elementes g zum Element u ist auf Ω_* eindeutig festgelegt — ordnet jedem Punkte von Ω_{**} eindeutig ein Element der Fortsetzung von g zu. Die so auf Ω_{**} in allen über T'_{**} gelegenen Punkten erklärte und dort eindeutige reguläre Funktion g ist in den ausgeschlossenen Punkten noch stetig, da die Grundfunktionen der Zweige auch auf der Diskriminantenfläche g regulär sind. g hat also die gewünschten Eigenschaften.

2.32. Zwar sind nun — falls $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ ist — die g_i auch auf Ω_{**} noch als eindeutige reguläre Funktionen erklärt. Es ist aber keineswegs sicher, daß die auf Ω_* zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω_{**} zulässig ist. Dazu wird

¹⁹⁾ Vgl. [10], [11].

man weitere Voraussetzungen machen müssen. Hier wollen wir zunächst zeigen, daß es genügt anzunehmen:

T_* habe die Eigenschaft E : Jede in $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ analytische nicht null-dimensionale Menge dringt in T_* ein.

Später wird eine andere Bedingung angegeben, welche für diese Arbeit ausreicht.

Satz 2.1. Ist die Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω_* zulässig und hat T_* die Eigenschaft E , so läßt $z_i = g_i(\tau)$ sich zu einer auf Ω_{**} (definiert über $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$) im weiteren Sinne zulässigen Abbildung erweitern.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die durch die Fortsetzung nach Satz 2.3 erhaltenen auf Ω_{**} regulären Funktionen g_i den Bedingungen a), b) (vgl. 2.1) genügen.

a) Das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat auf Ω_{**} nur isolierte Lösungen.

Zum Beweise ist zu beachten, daß die Nullstellenmannigfaltigkeit einer auf einem analytischen Gebilde der Dimension k regulären Funktion aus analytischen Gebilden der Dimension $k - 1$ besteht (oder das Gebilde ganz erfüllt) (vgl. [12], S. 120). Daraus geht hervor: Entweder hat das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ auf Ω_{**} nur isolierte Lösungen; dann sind wir am Ziel. Oder die Lösungen erfüllen nicht-nulldimensionale Gebilde auf Ω_{**} . Ihre Projektionen in den τ -Raum sind dann offenbar auch mindestens eindimensional. Sie dringen also nach der Voraussetzung in T_* ein. Das heißt aber, daß auch die Gebilde selbst noch Ω_* schneiden. Und das steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß die Abbildung auf Ω_* zulässig ist.

b) Die Punkte auf Ω_{**} (in denen die Diskriminante nicht verschwindet und), für welche der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau_j}\right)$ kleiner als k ist, erfüllen höchstens $(k - 1)$ -dimensionale analytische Mengen.

Anderenfalls müßten die k -reihigen Determinanten der Matrix sämtlich in einem k -dimensionalen Gebiet auf Ω_{**} verschwinden. Dann wären sie jedoch auf Ω_{**} identisch Null. Das ist wegen a) nicht der Fall (vgl. [12], S. 157).

Auf Grund dieses Satzes wird jeder Teil $\hat{\Omega}$ von Ω_{**} — er möge der über \hat{T} (\hat{T} ganz in T_{**}) gelegene Teil sein und es sei vorausgesetzt, daß $\hat{\Omega}$ irreduzibel ist — durch $z_i = g_i(\tau)$ auf ein irreduzibles k -dimensionales analytisches Gebilde $\hat{\mathfrak{C}}$ des z -Raumes abgebildet [vgl. Satz 2.1 a)]. Ist $T' \subset \hat{T}$ und $\tilde{\mathfrak{C}}$ das Gebilde, auf welches Ω abgebildet ist, so ist $\tilde{\mathfrak{C}} \subset \hat{\mathfrak{C}}$. Der Erweiterung von Ω zu $\hat{\Omega}$ entspricht daher die Erweiterung von $\tilde{\mathfrak{C}}$ zu $\hat{\mathfrak{C}}$. Es ist nicht von vornherein sicher, daß die Spur von $\hat{\mathfrak{C}}$ eine analytische Menge ist, wenn dies für die Spur von $\tilde{\mathfrak{C}}$ gilt. Dazu ist zu prüfen, ob auch die Bedingung c) erfüllt ist.

Anmerkung. Die Bedingung E ist z. B. nicht erfüllt, wenn T_* der an der eindimensionalen Ebene $z_1 = z_2 = 0$ geschlitzte Zylinder $|z_1| < 1$; $|z_2| < 1$; $|z_3| < 1$ ist. Um so wichtiger ist die Frage, wann man auf E verzichten kann. Entspringt die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$ einer Faserung, die selbst in einem genügend großen Gebiete erklärt ist, so braucht man keine besonderen Voraus-

setzungen über T_* zu machen. Wir gehen aus von einem Gebiet Z_{**} in der Faserung $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_{**}$ und den Teilgebieten $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ und $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$ mit $T_{**} \supset T_* \supset T$ gemäß 2.21. Die Faserung ist also von vornherein für Z_{**} erklärt. Außerdem soll der Rand $C(\tau)$ der Fasern auf dem Rande des Polyzylinders $\bigcap_{i=1}^n (|z_i| < 1)$ liegen. Ω_{**} , Ω_* , $\hat{\Omega}$, Ω seien wie bisher erklärt, so daß also $\Omega_{**} \supset \hat{\Omega} \supset \Omega$ und $\Omega_{**} \supset \Omega_* \supset \Omega$ und alle Gebilde irreduzibel sind. Sie liegen über T_{**} , T_* , \hat{T} , T .

Satz 2.5. *Die angegebenen Voraussetzungen seien erfüllt und g_*^k in Z_* analytisch, irreduzibel und k -dimensional. Die Faserung $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ sei für g_*^k zulässig (vgl. Definition 2.3). Dann gibt es genau eine in Z_{**} analytische, irreduzible und k -dimensionale Menge g_{**}^k , für die $g_*^k = Z_* \cap g_{**}^k$ ist.*

$\hat{g} = \hat{Z} \cap g_{**}^k$ ist ein analytisches Element, das Bild von $\hat{\Omega}$. Die Faserung $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$ ist für \hat{g} zulässig.

Beweis. 1. $g = Z \cap g_*^k$ wird nach Satz 2.2 durch eine im engeren Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω bezogen. Die Funktionen g_i bleiben nach Satz 2.3 auf Ω_{**} noch regulär. Auf Ω_* gilt für jede von ihnen $|g_i| < 1$ [vgl. 2.21, 3.]. Das gilt nun auch noch auf Ω_{**} . Denn sonst müßte es eine Zahl a vom Betrage 1 geben und ein g_i , etwa g_1 , welches auf Ω_{**} den Wert a annimmt. Das Produkt der Zweige von $(g_1 - a)$ ist in T_{**} regulär und eindeutig. Die reziproke Funktion ist in T_* regulär, da g_1 dort den Wert a nicht annimmt. Sie muß in der Regularitätshülle T_{**} regulär bleiben. Das heißt: g_1 nimmt auch in T den Wert a nicht an. Das ist ein Widerspruch.

2. Jeder Punkt $z_i' = g_i(\tau')$ des Bildes liegt auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau')$. Ein Punkt $z_i^* = g_i(\tau^*)$ liegt genau dann auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau^*)$, wenn $0 = f_1(g(\tau^*), \tau^*) = \dots = f_k(g(\tau^*), \tau^*)$ ist. Für alle τ^* aus T_* gilt nun $f_j(g(\tau^*), \tau^*) = 0$; $j = 1, \dots, k$. Es ist zu zeigen, daß diese Relation auch in T_{**} besteht. Ge setzt, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es Punkte $P_1 \in \Omega_*$, $P_2 \in \Omega_{**}$ und auf Ω_{**} eine Kurve L von P_1 nach P_2 , so daß nicht in allen Punkten von L die gewünschten Relationen gelten. Darin soll die Möglichkeit enthalten sein, daß diese Gleichungen sinnlos werden, da die Funktionen nicht mehr erklärt sind. Es muß nun auf L einen Punkt Q mit folgender Eigenschaft geben: Die Bilder der Punkte P' auf $P_1 Q$ liegen auf den zugehörigen Fasern. Wegen 1.

und da die Ränder der Fasern auf dem Rande von $\bigcap_{i=1}^n (|z_i| < 1)$ liegen, sind die Bilder der P' in Z_{**} enthalten. Das gilt auch für das Bild von Q . In allen diesen Punkten sind dann die Funktionen $f_j(g(\tau), \tau)$; $j = 1, \dots, k$ regulär. Die zweite Eigenschaft von Q müßte sein: Es gibt Punkte $P'' \rightarrow Q$ auf $Q P_2$, deren Bilder nicht auf den zugehörigen Fasern liegen. Aus dem vorhergehenden geht jedoch hervor, daß in einer vollen Umgebung von Q die Gleichungen $f_1(g_1(\tau), \tau) = \dots = f_k(g(\tau), \tau) = 0$ gelten. Das ist ein Widerspruch.

3. Die Fasern sind nach Definition punktfremd zueinander. Insbesondere ist $\mathfrak{F}(\hat{\tau}) \cap \mathfrak{F}(\tau) = 0$, wenn $\hat{\tau}$ auf dem Rande und τ im Inneren von \hat{T} liegt.

Wegen 2. kann also das Bild eines Randpunktes von $\hat{\Omega}$ nicht auf das Bild eines inneren Punktes fallen. Das ist Bedingung c) für $\hat{\Omega}$.

4. Jeder Bildpunkt liegt auf einer wohlbestimmten Faser. Das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat also nur die eine Lösung τ^0 (z_i^0 liege auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau^0)$). Das ist Bedingung a). Daß auch b) erfüllt ist, sieht man wie im Beweis zu Satz 2.4.

Daher ist nach Satz 2.2 das Bild von $\hat{\Omega}$ ein analytisches Element der Dimension k . Wegen 1. ist die Faserung $\hat{Z} = \cup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in \hat{T}$ für \hat{g} zulässig. Das gilt für jedes $\hat{\Omega}$. Daraus folgt, daß das Bild von Ω_{**} eine analytische Menge der Dimension k ist, die den Forderungen genügt. Denn es ist $g_*^k = Z_* \cap g_{**}^k$ und $\hat{g} = \hat{Z} \cap g_{**}^k$.

Anmerkung. Hier wird aus dem Fortbestehen der Faserung in Z_{**} auf die Existenz der Erweiterung von g_*^k geschlossen. Es ist eine interessante Frage, wann umgekehrt aus der Existenz der Erweiterung von g_*^k auf das Fortbestehen der Faserung geschlossen werden darf.

§ 3. Die Differentialbedingung²⁰⁾.

3.1. Hilfssatz. Ist die reelle quadratische Form $\sum_1^n a_{ik}^0 x_i x_k$ positiv definit, so auch alle Formen $\sum a_{ik} x_i x_k$ mit reellen a_{ik} , wenn nur $|a_{ik} - a_{ik}^0| < \varepsilon$ und ε genügend klein ist.

Beweis. Es gibt eine Substitution $x_i = \sum c_{ik} x'_k$; $|c_{ik}| \neq 0$ so, daß $\sum a_{ik}^0 x_i x_k = \sum x_i'^2$. Setzt man $\sum a_{ik} x_i x_k = \sum x_i'^2 + \sum b_{ik} x'_i x'_k$, so sind die b_{ik} stetige Funktionen der a_{ik} und verschwinden für $a_{ik} = a_{ik}^0$. Weiter ist

$$\left| \sum_1^n b_{ik} x'_i x'_k \right| \leq \sum_1^n |b_{ik}| |x'_i x'_k| \leq \frac{1}{2} \sum_1^n |b_{ik}| (x_i'^2 + x_k'^2) \leq n \cdot \max |b_{ik}| \sum_1^n x_i'^2.$$

Man wähle nun $\varepsilon > 0$ so, daß $|b_{ik}| < \frac{1}{2n}$. Dann ist $|\sum b_{ik} x'_i x'_k| \leq \frac{1}{2} \sum x_i'^2$ und daher $\sum a_{ik} x_i x_k \geq \frac{1}{2} \sum x_i'^2$.

3.2. Im Gebiete G des C^n der Veränderlichen $z_\mu = x_{2\mu-1} + i x_{2\mu}$ sei die Funktion $\varphi(x)$ reell und zweimal stetig differentiierbar. Nach Einführung der komplexen Koordinaten z_μ, \bar{z}_μ gehe $\varphi(x)$ in $\varphi(z, \bar{z})$ über. Im folgenden sei ζ ein Punkt aus G , der noch variiert werden kann. ζ^0 aus G soll ein für alle Mal festgelegt sein. Die Umrechnungsformeln lauten:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2\mu-1}} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2\mu}}; & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\mu} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2\mu-1}} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2\mu}}; \\ 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu} &= \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu-1}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu}} \right\} - i \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu-1}} \right\}; \\ 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} &= \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu-1}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu}} \right\} + i \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu-1}} \right\}; \\ & & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_\mu \partial \bar{z}_\nu} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu}. \end{aligned}$$

²⁰⁾ Vgl. [9], vor allem zu 3.1 bis 3.3.

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}; \quad \varphi_{\bar{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\mu}; \quad \varphi_{\mu\bar{\nu}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} \text{ usw.};$$

$$h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \text{ und } \varphi_\mu^0 = \varphi_\mu(\zeta^0); \quad \varphi_{\mu\bar{\nu}}^0 = \varphi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta^0) \text{ usw.}$$

Der Mittelwertsatz

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \sum_1^{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}(\xi) \cdot (x_\mu - \xi_\mu) + Q;$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_1^{2n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\xi^*) (x_\mu - \xi_\mu) (x_\nu - \xi_\nu)$$

geht über in

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta) + \sum_1^n (\varphi_\mu(\zeta) h_\mu + \varphi_{\bar{\mu}}(\zeta) \bar{h}_\mu) + Q_k;$$

$$Q_k = \frac{1}{2} \sum_1^n (\varphi_{\mu\nu}(\zeta^*) h_\mu h_\nu + \varphi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta^*) h_\mu \bar{h}_\nu + \varphi_{\bar{\mu}\nu}(\zeta^*) \bar{h}_\mu h_\nu) \text{ mit } |z - \zeta^*| \leq |z - \zeta|.$$

Q_k ist also die komplexe Darstellung der reellen quadratischen Form Q . In

Q_k ist die HERMITESCHE Form (H) : $\sum_1^n \varphi_{\mu\bar{\nu}} h_\mu \bar{h}_\nu$ enthalten.

3.3. In jedem Punkt aus G sei

$$(1) \quad \varphi_n(\zeta) \neq 0.$$

Um für $\varphi(\zeta) \geq 0$ analytische Flächen durch ζ zu finden, welche $\varphi \leq 0$ höchstens in ζ treffen, verfährt man nach KRZOSKA wie folgt. Zunächst wird

$$(2) \quad h_n = \sum_1^{n-1} a_\mu h_\mu + \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} h_\mu h_\nu$$

in φ eingesetzt. So entsteht eine Funktion $\chi = \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1})$, die noch stetig von den Konstanten a, b und dem Punkt ζ abhängt. Durch die Bedingung

$$(a1) \quad \chi_\mu(\zeta) = \varphi_\mu(\zeta) + \varphi_n(\zeta) a_\mu(\zeta) = 0$$

wird $a_\mu(\zeta)$ festgelegt. Da φ reell ist, folgt

$$(a2) \quad \chi_{\bar{\mu}}(\zeta) = \varphi_{\bar{\mu}}(\zeta) + \varphi_n(\zeta) \bar{a}_\mu(\zeta) = 0.$$

Weiter werde $b_{\mu\nu}^0$ durch

$$(b1) \quad \chi_{\mu\nu}(\zeta^0) = \varphi_{\mu\nu}^0 + \varphi_{\mu n}^0 \cdot a_\nu(\zeta^0) + \varphi_{\nu n}^0 \cdot a_\mu(\zeta^0) + \varphi_n^0 \cdot a_\mu(\zeta^0) \cdot a_\nu(\zeta^0) + 2\varphi_n^0 b_{\mu\nu}^0 = 0$$

bestimmt. Dann gilt auch

$$(b2) \quad \chi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta^0) = \overline{\chi_{\bar{\mu}\nu}(\zeta^0)} = 0.$$

KRZOSKA hat unter anderem bewiesen: Es sei in (2) $\zeta = \zeta^0$; $a_\mu = a_\mu(\zeta^0)$ und $b_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}^0$ gesetzt. Ist nun die HERMITESCHE Form

$$(H_\bullet): \quad \sum_1^{n-1} \chi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta^0) u_\mu \bar{u}_\nu; \quad u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0$$

positiv definit, so gibt es eine Umgebung U von ζ^0 , welche von (2) außer in ζ^0 nur auf der Seite $\varphi > 0$ geschnitten wird. Die Form (H_*) entsteht, wenn in (H) : $\sum_1^n \varphi_{\mu\bar{\nu}}^0 u_\mu \bar{u}_\nu$ durch $\sum_1^n \varphi_\mu^0 u_\mu = 0$ eliminiert wird. Also ist (H) auf der Ebene $\sum_1^n \varphi_\mu^0 u_\mu = 0$ mit (H_*) gleichwertig. Dies Ergebnis wollen wir ein wenig erweitern.

3.4 Der Trägheitsindex von (H_*) sei q . Dann gibt es eine Substitution

$$u_i = \sum_1^{n-1} c_{ik}^0 u'_k; \quad \bar{u}_i = \sum_1^{n-1} \bar{c}_{ik}^0 \bar{u}'_k; \quad u_i = z_i - \zeta_i^0; \quad u'_i = z'_i - \zeta_i^0; \quad i = 1, \dots, n-1,$$

welche (H_*) in die Normalform

$$(N): \quad |u'_1|^2 + \dots + |u'_q|^2 - \sum_{q+1}^{n-1} \delta_k |u'_k|^2 \quad (\delta_k = 0 \text{ oder } 1)$$

überführt. Auf der q -dimensionalen Ebene $u'_{q+1} = \dots = u'_{n-1} = 0$ ist (H_*) folglich positiv definit.

3.5. Man setze nun

$$\mathfrak{F}^q: h_n = \sum_1^{n-1} a_{ik} h'_k + \sum_1^{n-1} b_{i\bar{k}} h'_k \bar{h}'_k \quad (h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu; \quad h'_\mu = z'_\mu - \zeta'_\mu; \quad \zeta_\mu = \zeta'_\mu)$$

und dann $h_i = \sum_1^{n-1} c_{ik} h'_k$; $h'_{q+1} = \dots = h'_{n-1} = 0$; $i = 1, \dots, n-1$ mit zunächst willkürlichen Konstanten a, b, c in φ ein. So entsteht eine reelle Funktion $g(z', \bar{z}') = g(z'_1, \bar{z}'_1, \dots, z'_q, \bar{z}'_q, a, b, c, \zeta')$, welche mit ihren Ableitungen noch stetig von den Parametern a, b, c, ζ' abhängt. Von nun an werde $a_\mu = a_\mu(\zeta')$ eingesetzt. Dann ist $g_\mu(\zeta') = \bar{g}_\mu(\zeta') = 0$. Um die noch vorhandene Abhängigkeit von b, c, ζ' anzudeuten, schreiben wir $g_{\mu\nu}(z', \bar{z}') = B_{\mu\nu}(z', b, c, \zeta')$ usw. Der Mittelwertsatz liefert jetzt

$$g(z', \bar{z}') = g(\zeta', \bar{\zeta}') + Q_k$$

mit

$$Q_k = \frac{1}{2} \Sigma \{ B_{\mu\nu}(\zeta^*, b, c, \zeta') h'_\mu h'_\nu + B_{\mu\bar{\nu}}(\zeta^*, b, c, \zeta') h'_\mu \bar{h}'_\nu + B_{\bar{\mu}\nu}(\zeta^*, b, c, \zeta') \bar{h}'_\mu h'_\nu + B_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\zeta^*, b, c, \zeta') \bar{h}'_\mu \bar{h}'_\nu \}$$

und

$$|\zeta'_\mu - \zeta'_\mu| \leq |\zeta'_\mu - z'_\mu|.$$

Für die speziellen Werte $b_\mu^0, c_{ik}^0, \zeta' = \zeta^0$ kürzen wir ab: $B_{\mu\nu}(\zeta^0, b^0, c^0, \zeta^0) = B_{\mu\nu}^0$ usw. Dann ist erstens [vgl. (b1) unter 3.3] $B_{\mu\nu}^0 = B_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^0 = 0$ und zweitens ist wegen (3.4) die HERMITESCHE Form $\Sigma B_{\mu\bar{\nu}}^0 h'_\mu \bar{h}'_\nu$ positiv definit.

Da $B_{\mu\nu}^0 = B_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^0 = 0$, ist, reduziert sich Q_k für die speziellen Parameterwerte $\zeta' = \zeta^0$; $b = b^0$; $c = c^0$ auf die positiv definite Form $\Sigma B_{\mu\bar{\nu}}^0 h'_\mu \bar{h}'_\nu$. Daher kann nach dem Hilfssatz ein $\varepsilon > 0$ gefunden werden, so daß alle Formen $Q_k(\zeta^*; b; c; \zeta')$ positiv definit sind, wenn nur

$$|\zeta'_\mu - \zeta_\mu^0| < \varepsilon; \quad |\zeta'_\mu - \zeta_\mu^0| < \varepsilon; \quad |b_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}^0| < \varepsilon; \quad |c_{ik} - c_{ik}^0| < \varepsilon$$

ist.

3.6. Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen fassen wir zusammen.

Voraussetzung (v). Im Gebiete G des C^n der Variablen $z_\mu = x_{2\mu-1} + i x_{2\mu}$ sei $\varphi(x) = \varphi_*(z, \bar{z}) = \varphi(z)$ eine zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion und $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \neq 0$. Weiter sei $\zeta^0 \in G$ ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$. Und endlich sei $q \geq 1$ der Trägheitsindex der HERMITESCHEN Form $\sum \varphi_{\mu\bar{\nu}}^0 \cdot u_\mu \bar{u}_\nu$ auf der Ebene $\sum \varphi_{\mu}^0 u_\mu = 0$.

Die zu (c_{ik}^0) inverse Matrix sei (d_{ik}^0) ; es ist $\det (d_{ik}^0) \neq 0$.

Satz A. Unter der Voraussetzung (v) existiert eine Umgebung $U = \bigcap_1^n (|z_i - \zeta_i^0| < \delta)$ und Konstanten $b_{\mu\nu}^0, d_{\mu\nu}^0$ so, daß für alle Werte $b_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$, welche den Ungleichheiten $|b_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}^0| < \delta; |d_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}^0| < \delta$ genügen, gilt:

Ist ζ ein beliebiger Punkt aus $U \cap (\varphi \geq 0)$ und wird $a_\mu(\zeta)$ aus (a 1): $\varphi_\mu(\zeta) + \varphi_n(\zeta) \cdot a_\mu(\zeta) = 0$ bestimmt, so trifft jede der q -dimensionalen analytischen Flächen

$$\mathfrak{F}^q(\zeta, b, d) = \begin{cases} h'_n(\zeta, b) = h_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta) h_\mu - \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} h_\mu h_\nu = 0 \\ h'_k(\zeta, d) = \sum_1^{n-1} d_{k\mu} h_\mu = 0; \quad k = q+1, \dots, n-1 \\ h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \end{cases}$$

den Durchschnitt $U \cap (\varphi \leq 0)$ höchstens in ζ .

3.7. K. STEIN²¹⁾ hat für $n = 2, q = 1$ gezeigt, daß es sogar eine dreidimensionale Hyperfläche durch ζ^0 gibt, welche $\varphi \leq 0$ nur in ζ^0 trifft. Ähnlich ist es auch hier.

In dem folgenden Satz seien b', d' Konstanten, welche den Bedingungen des Satzes A genügen, und τ ein reeller Parameter. Außerdem treten noch Zahlen E, F auf, die passend zu bestimmen sind. Wir betrachten die einparametrische Schar q -dimensionaler analytischer Flächen

$$\mathfrak{F}^q(\tau, E, F) = \begin{cases} u'_n(\zeta^0, b') = u_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0) u_\mu - \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = F \cdot \tau + E \cdot \tau^2 \\ u'_k(\zeta^0, d') = \sum_1^{n-1} d'_{k\mu} u_\mu = 0; \quad k = q+1, \dots, n-1 \\ u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0 \end{cases}$$

Satz B. Es gibt Zahlen $E \neq 0, F \neq 0$ und eine Umgebung $U = \bigcap_1^n (|z_i - \zeta_i^0| < \delta)$, so daß $U \cap (\varphi \leq 0)$ von der Schar $\mathfrak{F}^q(\tau, E, F)$ mit $|\tau| \leq \delta$ nur in $z = \zeta^0; \tau = 0$ getroffen wird (τ reell).

Zusatz. Auch die Teilschar $\mathfrak{F}^q(\tau, E, 0)$ trifft $U \cap (\varphi \leq 0)$ nur in ζ^0 .

Beweis. Man setze (vgl. 3.5) $u'_n = \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0) u_\mu + \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} u_\mu u_\nu - F \cdot \tau - E \cdot \tau^2$ und dann $u_k = \sum c_{ki} u'_i; u'_{q+1} = \dots = u'_{n-1} = 0$ in φ ein. Diesmal entsteht eine Funktion $g(z'_1, \bar{z}'_1, \dots, z'_q, \bar{z}'_q, \tau, \bar{\tau})$. Dabei wird τ zunächst als komplexe Ver-

²¹⁾ Vgl. [17].

änderliche aufgefaßt. Nachträglich ist dann $\tau = \bar{\tau}$ zu setzen. Wir berechnen die Ableitungen von g im Punkte $z' = \zeta^0$; $\tau = \bar{\tau} = 0$. Die reinen Ableitungen nach den z' ändern sich gegen früher nicht. Für die Ableitungen, an denen τ beteiligt ist, bekommt man:

$$\begin{aligned} g_{\tau}^0 &= \varphi_n^0 \cdot F; \quad g_{\bar{\tau}}^0 = \varphi_{\bar{n}}^0 \cdot \bar{F} \\ g_{\mu\tau}^0 &= \varphi_{n\mu}^0 \cdot a_{\mu} \cdot F; \quad g_{\mu\bar{\tau}}^0 = \varphi_{n\mu}^0 \cdot \bar{F} \cdot a_{\mu}; \quad g_{\bar{\mu}\tau}^0 = \varphi_{n\bar{\mu}}^0 \bar{a}_{\mu} F; \quad g_{\bar{\mu}\bar{\tau}}^0 = \overline{g_{\mu\tau}^0} \\ g_{\tau\tau}^0 &= \varphi_{nn}^0 \cdot F^2 + 2 \varphi_n^0 \cdot E; \quad g_{\tau\bar{\tau}}^0 = \varphi_{n\bar{n}}^0 \cdot F \cdot \bar{F}; \quad g_{\bar{\tau}\bar{\tau}}^0 = \overline{g_{\tau\tau}^0}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung von g an der Stelle $(\zeta^0, 0)$ lautet nun (mit $\tau = \bar{\tau}$)

$$\begin{aligned} g(z', \tau) &= g(\zeta^0, 0) + (g_{\tau}^0 + g_{\bar{\tau}}^0) \tau + Q_k; \\ Q_k &= \frac{1}{2} \Sigma (g_{\mu\nu} u'_{\mu} u'_{\nu} + 2 g_{\mu\bar{\nu}} u'_{\mu} \bar{u}'_{\nu} + g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{u}'_{\mu} \cdot \bar{u}'_{\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau \Sigma (g_{\mu\tau} u'_{\mu} + g_{\bar{\mu}\tau} \bar{u}'_{\mu} + g_{\mu\bar{\tau}} u'_{\mu} + g_{\bar{\mu}\bar{\tau}} \bar{u}'_{\mu}) + \frac{\tau^2}{2} (g_{\tau\tau} + 2 g_{\tau\bar{\tau}} + g_{\bar{\tau}\bar{\tau}}). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind an einem Zwischenpunkt (ζ^*, τ^*) zu nehmen, für den $|\zeta^* - \zeta^0| \leq |z' - \zeta^0|$ und $|\tau^*| \leq |\tau|$ ist.

Q_k ist die komplexe Darstellung der entsprechenden reellen quadratischen Form in den Veränderlichen $(x'_1, \dots, x'_{2q}, \tau)$.

Wird in Q_k $F = 0$ gesetzt, so fällt die zweite Summe fort. Der Koeffizient von τ^2 wird $2(\varphi_n E + \varphi_{\bar{n}} \bar{E})$. Man bestimme E so, daß $\varphi_n^0 E + \varphi_{\bar{n}}^0 \bar{E}$ positiv ist.

Werden in der ersten Summe die $g_{\mu\nu}$ durch die an der Stelle $\zeta' = \zeta^0$; $\tau = 0$ zu bildenden $g_{\mu\nu}^0$ ersetzt, so ist die resultierende Form in den neuen Veränderlichen $(z'_1, \bar{z}'_1, \dots, z'_q, \bar{z}'_q)$ nach Voraussetzung positiv definit. Die durch die Spezialisierung $F = 0$; $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0$ usw. bei festem E mit $\varphi_n^0 \cdot E + \varphi_{\bar{n}}^0 \cdot \bar{E} > 0$ aus Q_k entstehende Form

$$Q_k^0 = \frac{1}{2} \Sigma (g_{\mu\nu}^0 u'_{\mu} u'_{\nu} + 2 g_{\mu\bar{\nu}}^0 u'_{\mu} \bar{u}'_{\nu} + g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^0 \bar{u}'_{\mu} \cdot \bar{u}'_{\nu}) + 2 \tau^2 (\varphi_n^0 E + \varphi_{\bar{n}}^0 \bar{E})$$

ist daher positiv definit. Nach dem Hilfssatz gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|F| < \delta$; $|\tau| < \delta$; $|z'_i - \zeta_i^0| < \delta$ und daher $|\zeta_i^* - \zeta_i^0| < \delta$; $|\tau^*| < \delta$ auch Q_k positiv definit ist.

Nachdem E festgelegt ist: $\varphi_n^0 \cdot E + \varphi_{\bar{n}}^0 \cdot \bar{E} > 0$, bestimme man nun F so, daß erstens $g_{\tau}^0 + g_{\bar{\tau}}^0 = \varphi_n^0 F + \varphi_{\bar{n}}^0 \bar{F} = 0$ und zweitens $|F| < \delta$ ist. Dann folgt $g(z', \tau) > 0$ in $|z'_i - \zeta_i^0| < \delta$; $|\tau| < \delta$ außer in $z' = \zeta^0$; $\tau = 0$. Das ist die Behauptung.

Satz C. Ist die Voraussetzung (v) erfüllt, ferner $\varphi(\zeta^0) = 0$ und $q = n - p$, so gilt: Jedes p -dimensionale analytische Flächenstück g^p durch ζ^0 schneidet $g > 0$.

Beweis. Nach Satz B trifft die Schar q -dimensionaler Flächen

$$\mathfrak{F}^q(\tau, E, 0) = \begin{cases} E \cdot k = u_n - \sum_1^{n-1} a_{\mu}(\zeta^0) u_{\mu} - \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu}^0 u_{\mu} u_{\nu} = E \tau^2; & \left\{ \begin{array}{l} \tau \text{ reell,} \\ |\tau| < \delta \end{array} \right. \\ u_k = \sum_1^{n-1} d'_{k\mu} \cdot u_{\mu} = 0; & k = q + 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

die Punktmenge $\bigcap_1^n (|z_i - \zeta_i^0| < \delta) \cap (\varphi \leq 0)$ nur in $(\zeta^0, 0)$. Der Schnitt von g^p mit $u'_{q+1} = \dots = u'_{n-1} = 0$ (für $q = n-1$ fallen diese Gleichungen fort und es ist g^p selbst zu betrachten) ist eine analytische Menge, deren Komponenten mindestens eindimensional sind. ζ^0 ist innerer Punkt jeder Komponente g_* . Es ist $k(\zeta^0) = 0$. Daher muß $k(g_*)$ entweder identisch Null sein oder auch beliebig kleine reelle Werte annehmen (Satz 1.4). Es gibt also einen Punkt $\zeta_* \in g_*$; $\zeta_* \neq \zeta^0$ und ein reelles τ_* ($0 \leq |\tau_*| < \delta$) so, daß $E k(\zeta_*) = E \tau_*^2$. Daraus folgt, da $\mathfrak{F}^q(\tau_*, E, 0)$ den Bereich $\varphi \leq 0$ nur in ζ^0 trifft, $\varphi(\zeta_*) > 0$.

Folgerung für die Einzigkeit der Fortsetzung.

Satz C hat wichtige Konsequenzen. Zu ihrer Ableitung ist es notwendig, (v) durch die natürliche Forderung (v*) zu ersetzen, daß wenigstens eine der ersten Ableitungen von φ , nicht gerade φ_n , ungleich Null ist. Satz C bleibt dann richtig. Es seien nun in G zwei reelle Funktionen gegeben: φ_1, φ_2 , auf die (v*) zutrifft. q_1, q_2 seien die Indizes im Punkte ζ^0 mit $\varphi_1(\zeta^0) = \varphi_2(\zeta^0) = 0$.

Satz D. (Einzigkeit der Fortsetzung). Es sei $\varphi_1(\zeta^0) = \varphi_2(\zeta^0) = 0$ und $q_1 + q_2 + k \geq 2n$, weiter U eine Umgebung von ζ^0 . Endlich seien g_1^k und g_2^k in U analytische Mengen. Dann gilt: Stimmen g_1^k und g_2^k in $U \cap (\varphi_1 > 0) \cap (\varphi_2 > 0)$ überein, so gibt es eine volle Umgebung U_* von ζ^0 , in der $g_1^k = g_2^k$ ist.

Beweis. In einer passenden Umgebung U_* von ζ^0 läßt sich g_1^k (und ebenso g_2^k) als Vereinigung irreduzierbarer Komponenten h_1^k, \dots, h_l^k darstellen, die alle ζ^0 als inneren Punkt enthalten. Es genügt zu zeigen, daß jedes h in $(\varphi_1 > 0) \cap (\varphi_2 > 0)$ eindringt.

Nach Satz A gibt es eine Fläche \mathfrak{F}^q durch ζ^0 , welche $\varphi_1 \leq 0$ nur in ζ^0 trifft. Da $q_2 \leq n-1$ ist folgt aus $q_1 + q_2 + k \geq 2n$ die Ungleichung $q_1 + k - n \geq 1$. Die Dimension des Schnittes \mathfrak{D} von \mathfrak{F}^q und h ist wenigstens gleich $q_1 + k - n \geq 1$. Es ist aber $p_2 = n - q_2 \leq q_1 + k - n$. Die Dimension von \mathfrak{D} ist also mindestens p_2 . Daher schneidet \mathfrak{D} nach Satz C auch $\varphi_2 > 0$. Andererseits ist ζ^0 der einzige Punkt auf \mathfrak{D} in $\varphi_1 \leq 0$; und \mathfrak{D} ist nicht nulldimensional. Infolgedessen dringt \mathfrak{D} und dann auch h in $(\varphi_1 > 0) \cap (\varphi_2 > 0)$ ein.

Für die Anwendungen ist es bequem, diesen Satz auf mehr als zwei Hyperflächen von einer besonderen Art zu erweitern. Wir legen den Raum von $m = n + s$ Veränderlichen $(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n)$ zugrunde. Dort seien s Hyperflächen der Form

$$\varphi_\alpha = w_\alpha \bar{w}_\alpha - \psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$$

gegeben, jede (in allen Punkten) vom Index n . $P^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_s^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_n^0)$ mit $\alpha_\sigma^0 \neq 0$; $\sigma = 1, \dots, s$ sei ein Punkt auf $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$ und U eine Umgebung von P^0 .

Satz D'. g_1^k und g_2^k seien in U analytische Mengen, die beide die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in P^0 treffen. Weiter sei $k \geq s$. Dann gilt: Ist $g_1^k = g_2^k$ in $U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\alpha > 0)$, so gibt es eine volle Umgebung U_ von P^0 , in welcher $g_1^k = g_2^k$ ist.*

Beweis. Es genügt wieder, die Behauptung für irreduzible g_1^k, g_2^k zu beweisen, die durch P^0 gehen.

Zu jedem $\varphi_\sigma = 0$ gibt es eine $(n + s - 1)$ -dimensionale Fläche $\mathfrak{F}_\sigma^{m-1}$ ($m = n + s$), die $\varphi_\sigma \leq 0$ nur in der Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = w_\sigma - \alpha_\sigma = 0$ schneidet. Der Schnitt $F = \bigcap_1^{s-1} \mathfrak{F}_\sigma^{m-1}$ hat die Dimension $n + s - s + 1 = n + 1$

und trifft $\bigcup_1^{s-1} (\varphi_\sigma \leq 0)$ nur auf $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = 0$. Also hat jede Komponente von $F \cap g_1^k$ mindestens die Dimension $k - s + 1 = 1$. Außerdem trifft $F \cap g_1^k$ die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in P^0 . Jede in P^0 irreduzible Komponente \mathfrak{h} von $F \cap g_1^k$ muß dann $\varphi_s > 0$ schneiden [Beweis wie bei Satz C: \mathfrak{F}_s^{m-1} hat eine Darstellung

$$E \cdot k = (w_s - \alpha_s) - \sum_1^n a_\mu (P^0) (z_\mu - \zeta_\mu^0) - \sum_1^n b_{\mu\nu}^0 (z_\mu - \zeta_\mu^0) (z_\nu - \zeta_\nu^0) = 0.$$

Die Funktion k muß auf \mathfrak{h} entweder identisch verschwinden oder auch beliebig kleine reelle Werte annehmen. In beiden Fällen weist \mathfrak{h} Punkte aus $\varphi_s > 0$ auf. Denn die Flächen $E \cdot k = E \tau^2$ (τ reell, $|\tau| < \delta$) treffen $\varphi_s \leq 0$ nur in $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = w_s - \alpha_s = 0$ und \mathfrak{h} liegt nicht auf dieser Ebene. \mathfrak{h} trifft ja die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in P^0 , da das sogar g_1^k tut.], \mathfrak{h} dringt also notwendig in $\varphi_s > 0$ ein.

Jede Komponente von g_1^k oder g_2^k dringt daher in $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ ein. Daraus folgt die Behauptung.

Zusatz zu Satz D. Ist nur eine Hyperfläche gegeben, so ergibt sich ganz ähnlich

Satz D₁. ζ^0 sei ein Punkt auf $\varphi = 0$, U eine Umgebung von ζ^0 und g_1^k, g_2^k in U analytische Mengen: $g_1^k = g_2^k$ in $U \cap (\varphi > 0)$. Ist nun $q + k \geq n$, so gibt es eine Umgebung U_* von ζ^0 , in der $g_1^k = g_2^k$ ist.

§ 4. Lokale Fortsetzung.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Fortsetzung analytischer Mengen des z -Raumes. Die Voraussetzung ist immer, daß die Dimension k mindestens zwei, die topologische Dimension also wenigstens vier ist. Die Grundlage ist die lokale Fortsetzung.

Satz 1 (lokale Fortsetzung). ζ^0 sei gewöhnlicher Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$. Es sei $n \geq 3$; $2 \leq k \leq n - 1$ und $q + k \geq n + 1$ (q ist der Index von $\sum \varphi_\mu^0 u_\mu \bar{u}_\nu$ auf der Ebene $\sum \varphi_\mu^0 u_\mu = 0$). Weiter sei U eine Umgebung von ζ^0 und g^k eine in $\bar{U} = U \cup (\varphi > 0)$ analytische Menge der Dimension k . Dann gilt:

1. Es gibt eine Umgebung U_* von ζ^0 und eine in U_* analytische k -dimensionale Menge g_*^k , so daß $g_*^k = g^k$ in $\bar{U} \cap U_*$.

2. Ist U_{**} eine weitere Umgebung von ζ^0 und g_{**}^k eine in U_{**} analytische Menge der Dimension k , welche in $\bar{U} \cap U_{**}$ mit g^k übereinstimmt, so gibt es eine Umgebung U_{***} von ζ^0 , in der $g_*^k = g_{**}^k$ ist.

Kurz: Es gibt genau eine lokale Fortsetzung von g^k in ζ^0 .

Vorbemerkung zum Beweis. Der erste Teil des Beweises (1.—4.) ist eine Verbindung der Ergebnisse von § 2 und § 3. Unter 1. wird eine Faser — \mathfrak{F}^{n-k} genannt — konstruiert, welche ζ^0 enthält und die Eigenschaften hat: (1) \mathfrak{F}^{n-k} trifft $\varphi \leq 0$ nur in ζ^0 . (2) \mathfrak{F}^{n-k} trifft g^k höchstens in isolierten Punkten. Unter 2. und 3. wird \mathfrak{F}^{n-k} zu einer Faserung $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_{**}$ und $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ von Gebieten Z_{**}, Z_* ergänzt. Z_* liegt in $\varphi > 0$, Z_{**} umfaßt Z_* und enthält den Punkt ζ^0 im Inneren. T_{**} ist die Regularitätshülle von T_* . Die Faserung ist für jede Komponente g_λ von $g^k \cap Z_*$ zulässig. Aus Satz 2.5 folgt dann, daß jedes g_λ eine in Z_{**} analytische Erweiterung g_λ^* besitzt.

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß $g_k \cap U_*$ in der Vereinigung der g_λ^* enthalten ist. Das ist nicht selbstverständlich. Denn Z_* ist nur ein Ausschnitt von $\varphi > 0$. Es wäre denkbar, daß $g^k \cap Z_*$ leer ist. Dann wäre gar nichts bewiesen.

I. Beweis von (1). $b_{\mu\nu}^0, d_{\mu\nu}^0, \delta$ seien die in Satz A, § 3 vorkommenden Zahlen und $U = \bigcap_1^n (|z_i - \zeta_i^0| < \delta)$, so daß die Ergebnisse von § 3 unmittelbar benutzt werden dürfen. Alles soll sich in U abspielen. Wir nehmen an, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n}(\zeta^0) \neq 0$ ist.

1. Nach Hilfssatz 4 (s. u.) fixiere man $b'_{\mu\nu}, d'_{\mu\nu} : |b'_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}^0| < \delta; |d'_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}^0| < \delta$ so, daß die $(n-k)$ -dimensionale Fläche

$$\mathfrak{F}^{n-k} = \begin{cases} u'_n = u_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0) u_\mu - \sum_1^{n-1} b'_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0; u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0 \\ u'_j = \sum_1^{n-1} d'_{jk} u_k = 0; j = n-k+1, \dots, n-1 \end{cases}$$

die Menge g^k nur in isolierten Punkten — falls überhaupt — trifft. Da $g \geq n - k + 1$ ist, liegt \mathfrak{F}^{n-k} auf $\mathfrak{F}^q(\zeta^0, b', d') = (u'_n = \dots = u'_{q+1} = 0)$ und schneidet daher $U \cap (\varphi \leq 0)$ nach Satz A nur in ζ^0 .

Vorbemerkung zu 2.—4. Die d'_{ik} seien so gewählt, daß die Determinanten $|d'_{ik}|$ ($i, k = 1, \dots, n-1$) und $|d'_{\sigma, \sigma}|$ ($\sigma = n-k+1, \dots, n-1$) ungleich Null sind (vgl. Beweis des Hilfssatzes 4, Schluß). Dann schneidet der Polyzylinder $\bigcap_1^{n-k} (|u_i| < A)$ aus jeder Fläche $u'_j - c'_j = 0$ ($j = n-k+1, \dots, n$) ein einziges Gebiet heraus, die „Faser $\mathfrak{F}^{n-k}(c')$ “. Die Flächen und die Fasern sind $(n-k)$ -dimensional. — Ist $C = 2\delta$, so liegen \mathfrak{R} und \mathfrak{D} (vgl. 2. und 3.) in $\bigcap_1^n (|u_i| < C)$. Infolgedessen sind Z_* und Z_{**} ganz in $\bigcap_1^n (|u_i| < C)$ enthalten (vgl. 4.). Die Faserung genügt also der Bedingung (3), 2.21 in bezug auf den Polyzylinder $\bigcap_1^{n-k} (|u_i| < A) \cap \bigcap_r^n (|u_i| < C)$. Die Voraussetzungen des Satzes 2.5 sind erfüllt.

2. $\mathfrak{B}(A)$ sei der Polyzylinder $\bigcap_1^{n-k} (|u_i| < A)$ und $R(A)$ sein Rand. Wir setzen $r = n-k+1$. Man bestimme nun A so, daß auf $(u'_n = \dots = u'_r = 0; R(A))$ kein Punkt von g^k liegt.

$(u'_n = \dots = u'_{r+1} = 0)$ liegt auf $\mathfrak{F}^a(\zeta^0, b', d')$ und trifft daher $U \cap (\varphi \leq 0)$ nur in ζ^0 . Infolgedessen gibt es ein $B > 0$ so, daß $(u'_n = \dots = u'_{r+1} = 0; |u'_r| = B; \mathcal{G}(A))$ in $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$ enthalten ist. Außerdem möge auf $(u'_n = \dots = u'_{r+1} = 0; |u'_r| = B; R(A))$ kein Punkt von g^k liegen. Dann läßt sich ein δ_1 fixieren, so daß

$$\mathfrak{R} = \{|u'_n|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1; B - \delta_1 < |u'_r| < B + \delta_1; \mathcal{G}(A + \delta_1)\}$$

in $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$ enthalten ist und außerdem g^k das Gebiet $\mathfrak{R} \cap \{\mathcal{G}(A + \delta_1) - \mathcal{G}(A - \delta_1)\}$ nicht trifft. In \mathfrak{R} ist g_k analytisch.

3. Schließlich bestimme man $\tau_0 (0 < \tau_0 < \delta)$ und E gemäß Satz B und zudem so, daß $|E \tau_0| < \delta_1$. Es sei $a = E \tau_0$. Darauf mache man $\varepsilon > 0$ so klein, daß gilt:

$$(3.1) \quad |u'_n - a|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \varepsilon$$

liegt in

$$|u'_n|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1$$

$$(3.2) \quad \mathfrak{D} = \{|u'_n - a|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \varepsilon; |u'_r| < B + \delta_1; \mathcal{G}(A + \delta_1)\}$$

liegt in $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$.

(3.2) ist erfüllbar, da nach Satz B die Fläche $(u'_n = a; u'_{n-1} = \dots = u'_{r+1} = 0)$ das Gebiet $U \cap (\varphi \leq 0)$ nicht trifft. Dann ist also g^k auch in \mathfrak{D} analytisch.

4. Infolge 2. und 3. ist g^k in $Z_* = (\mathfrak{R} \cup \mathfrak{D}) \cap \mathcal{G}(A)$ analytisch und schneidet das Gebiet $(\mathcal{G}(A + \delta_1) - \mathcal{G}(A - \delta_1))$ nicht. Es sei weiter

$$Z_{**} = \{|u'_n|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1; |u'_r| < B + \delta_1; \mathcal{G}(A)\}.$$

Als Fasern $\mathfrak{F}(\tau)$ werden die $(n-k)$ -dimensionalen Flächen

$$u'_n(z) - \tau_1 = \dots = u'_r(z) - \tau_k = 0; (z) \in \mathcal{G}(A)$$

eingeführt. Es ist dann $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau) / \tau \in T_{**}$ und $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau) / \tau \in T_*$ mit

$$T_{**} = (|\tau_1|^2 + \dots + |\tau_{k-1}|^2 < \delta_1; |\tau_k| < B + \delta_1)$$

und

$$T_* = (|\tau_1|^2 + \dots + |\tau_{k-1}|^2 < \delta_1; B - \delta_1 < |\tau_k| < B + \delta_1) \cup \\ \cup (|\tau_1 - a|^2 + |\tau_2|^2 + \dots + |\tau_{k-1}|^2 < \varepsilon; |\tau_k| < B + \delta_1).$$

Offenbar liegt jeder Punkt von Z_{**} auf einer und nur einer Faser. Die Faserung ist für jede Komponente g_k von $g^k \cap Z_*$ zulässig. T_{**} ist die Regularitätshülle von T_* . Für jedes g_k sind nun die Voraussetzungen des Satzes 2.5 erfüllt. Es gibt daher eine in Z_{**} analytische k -dimensionale Menge g_k^* , so daß $g_k^* \cap Z_* = g_k$ ist. Die Vereinigung g_*^k der g_k^* ist in Z_{**} analytisch, k -dimensional und es ist $g_*^k \cap Z_* = g^k \cap Z_*$.

5. Zum vollständigen Beweis der Behauptung (1) ist noch zu zeigen: Es gibt eine Umgebung U_* von ζ^0 , so daß $g_*^k = g^k$ in $\bar{U} \cap U_*$ ist.

Zum Beweis ziehen wir die Flächen

$$\mathfrak{F}^r(\zeta) = \begin{cases} h'_n(z; \zeta) = h_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta) h_\mu - \sum_1^{n-1} b'_{\mu r} h_\mu h_r = 0; h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \\ h'_j(z; \zeta) = \sum_1^{n-1} d'_{jk} h_k; j = r+1, \dots, n-1; r = n-k+1 \end{cases}$$

heran. Ist nun $l > 0$ klein genug, so liegt für jedes ζ aus $U_* = \cap (|\zeta_t - \zeta_t^0| < l)$ die Punktmenge

$$S(\zeta) = \left\{ \begin{array}{l} h'_n = \dots = h'_{r+1} = 0; |h'_r| = B \\ |h'_1| + \dots + |h'_{r-1}|^2 < A \end{array} \right.$$

innerhalb

$$\mathfrak{R} = \left\{ \begin{array}{l} |u'_n|^2 + \dots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1; B - \delta_1 < u'_r < B + \delta_1 \\ |u'_1|^2 + \dots + |u'_{r-1}|^2 < A + \delta_1. \end{array} \right.$$

Denn in jedem Gebiet des z -Raumes gilt gleichmäßig $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta^0} h'_\mu(z; \zeta) = u'_\mu$, da

$h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu$; $u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0$ und $a_\mu(\zeta)$ stetig ist.

Daraus folgt sehr leicht die Behauptung. Denn jede auf $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ gelegene nicht nulldimensionale analytische Fläche muß $S(\zeta)$, also erst recht \mathfrak{R} schneiden (vgl. Satz 1.3, § 1). Nun liegt $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ auf $\mathfrak{F}^q(\zeta, b', d')$, somit — für $\varphi(\zeta) > 0$ — ganz in $\varphi > 0$ (Satz A). Sei $\bar{U}_* = U_* \cap (\varphi > 0)$ und ζ aus \bar{U}_* . Liegt ζ auf g^k , so ist jede Komponente von $g^k \cap \mathfrak{F}^r(\zeta)$ wegen $r + k = n + 1$ wenigstens eindimensional, trifft also \mathfrak{R} . Infolgedessen liegt ζ auch auf g^k_* . Umgekehrt: Liegt ζ auf g^k_* , so ist jede Komponente von $g^k_* \cap \mathfrak{F}^r(\zeta)$ mindestens eindimensional, schneidet daher \mathfrak{R} . Folglich liegt ζ auch auf g^k .

II. Die Behauptung (2) folgt sofort aus Satz D₁.

Es steht noch aus der

Hilfssatz 4. Es gibt Zahlen $b'_{\mu\nu}, d'_{\mu\nu}$ ($|b'_{\mu\nu} - b^0_{\mu\nu}| < \delta$; $|d'_{\mu\nu} - d^0_{\mu\nu}| < \delta$), so daß die analytische Fläche

$$\mathfrak{F}^{n-k} = \left\{ \begin{array}{l} u'_n = u_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0) u_\mu - \sum_1^{n-1} b'_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0; u_i = z_i - \zeta_i^0 \\ u'_j = \sum_1^{n-1} d'_{jk} u_k = 0; j = n-k+1, \dots, n \end{array} \right.$$

die Menge g^k nur in isolierten Punkten schneidet.

Beweis. 1. Für $\mu \neq \nu$ sei $b'_{\mu\nu} = b^0_{\mu\nu}$, sonst $b'_{\mu\mu} = b^0_{\mu\mu} + b_\mu$ und $d'_{\mu\nu} = d^0_{\mu\nu} + d_{\mu\nu}$. Weiter werde gesetzt

$$\begin{aligned} h_n(z, b') &= u_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0) u_\mu - \sum_1^{n-1} b'_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = h_n^0 - \Sigma b_\mu u_\mu^2 \\ h_j(z, d') &= \sum_1^{n-1} d'_{jk} u_k = h_j^0 + \sum_1^{n-1} d_{j\nu} u_\nu. \end{aligned}$$

Die Zahlen $b_\mu, d_{j\nu}$ sind noch zu bestimmen.

2. Der Schnitt der Fläche $h^0_{n-k+1} = \dots = h^0_n = 0$ mit dem Rand von $U = \cap (|\zeta_t - \zeta_t^0| < \delta)$ sei S . Man lege Zylinder Z_1, \dots, Z_l so fest, daß $V = \cup Z_i$ in $\varphi > 0$ liegt, S ganz in V enthalten ist und g^k in V die Vereinigung nur endlich vieler irreduzibler Komponenten g^k_1, \dots, g^k_l ist. Weiter sei $S(b', d')$ der Schnitt von $\mathfrak{F}(b', d') = \{h_{n-k+1}(z, d') = \dots = h_{n-1}(z, d') = h_n(z, b') = 0\}$ mit dem Rand von U . Ist $\varepsilon > 0$ genügend klein und $|b_\mu| < \varepsilon$; $|d_{jk}| < \varepsilon$, so liegt $S(b', d')$ ganz in V .

3. Jede nicht nulldimensionale Komponente des Schnittes von g^k und $\mathfrak{F}(b', d')$ muß den Rand von U schneiden, also in V eindringen (Satz 1.3). Es genügt somit dafür zu sorgen, daß $g^k \cap \mathfrak{F}(b', d')$ in V nur aus isolierten Punkten besteht. Daher brauchen nur die g_σ^k (vgl. 2.) betrachtet zu werden.

4. Die Fläche $h_n(z, b') = 0$ schneidet $u_1 = \dots = u_{n-1} = 0$ nur in $u_1 = \dots = u_n = 0$. Also weist jede auf $h_n(z, b') = 0$ gelegene analytische nicht nulldimensionale Fläche Punkte auf, für die $|u_1|^2 + \dots + |u_{n-1}|^2 > 0$ ist. Ferner benutzen wir, daß eine analytische Funktion h auf einer irreduziblen analytischen Fläche \mathfrak{F}^k der Dimension λ , wenn sie dort überhaupt Null wird, entweder identisch verschwindet, oder aber $(h=0) \cap \mathfrak{F}^k$ eine analytische Menge der Dimension $\lambda - 1$ ist²²⁾.

Man wähle auf jeder g_σ^k einen Punkt $P_\sigma = (u_1^\sigma, \dots, u_n^\sigma)$, für den $|u_1^\sigma|^2 + \dots + |u_n^\sigma|^2 > 0$. Dann können die $b_\mu(|b_\mu| < \varepsilon)$ offenbar so fixiert werden, daß $h_n(P_\sigma, b') \neq 0$ ist. Infolgedessen ist der Schnitt von $\bigcup g_\sigma^k$ und $h_n(z, b') = 0$ $(k-1)$ -dimensional.

Darauf werden die d_{1k} so bestimmt, daß $(h_n(z, b') = h_{n-1}(z, d') = 0) \cap \bigcup g_\sigma^k$ $(k-2)$ -dimensional ist. Das geht wie oben. Fährt man so fort, so erniedrigt sich die Dimensionszahl bei jedem Schritt um 1.

Die d können in der Umgebung eines beliebigen Punktes gewählt werden.

Es ist zweckmäßig, den Satz auf mehrere Hyperflächen zu erweitern. Dazu seien im $(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n)$ -Raum Hyperflächen der Form

$$\varphi(w_\sigma, \bar{w}_\sigma, z, \bar{z}) = w_\sigma \bar{w}_\sigma - \chi_\sigma(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0; \sigma = 1, \dots, s$$

gegeben, die sich im Punkte $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ schneiden. Der Index aller $\varphi_\sigma = 0$ in P^0 soll n und $w_\sigma^0 = \alpha_\sigma^0 \neq 0$ sein. U sei eine Umgebung vom P^0 und $\bar{U} = \bigcap_{\sigma=1}^s (\varphi_\sigma > 0)$.

Satz 1a: Es sei g^k eine in \bar{U} analytische k -dimensionale Menge, welche auf der Ebene $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ liegt. Ist weiter $k \geq s+1$, so existiert in P^0 die lokale Fortsetzung von g^k und ist eindeutig bestimmt. Es gilt also:

1. Es gibt eine Umgebung U_* von P^0 und eine in ihr analytische Menge g_{**}^k , so daß $g_{**}^k = g^k$ in $\bar{U} \cap U_*$.

2. Ist U_{**} eine andere Umgebung von P^0 und g_{**}^{k*} eine in ihr analytische Menge, für die $g_{**}^{k*} = g^k$ in $\bar{U} \cap U_{**}$, so existiert eine Umgebung U_{***} von P^0 , in welcher $g_{**}^k = g_{**}^{k*}$.

3. g_{**}^k liegt auf $w_1 - z_1 = \dots + w_s - z_s = 0$.

Beweis. Wird Satz A auf alle $\varphi_\sigma = 0$ und Satz B auf $\varphi_s = 0$ angewendet, so findet sich: Es gibt eine δ -Umgebung U von $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ — es sei $\alpha^0 = (\zeta_1^0, \dots, \zeta_s^0)$ — eine Zahl $E \neq 0$ und Zahlen $b_{\mu, \nu, \sigma}^0$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n$) so, daß für alle $b_{\mu, \nu, \sigma}$, welche der Bedingung $|b_{\mu, \nu, \sigma} - b_{\mu, \nu, \sigma}^0| < \delta$ genügen, gilt:

²²⁾ Vgl. [12], S. 132, Satz.

1) Ist $P = (\alpha, \zeta)$ ein Punkt aus $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma \geq 0)$, so trifft jede Fläche

$$\mathfrak{F}^n(P, b) = \begin{cases} h_{n+1}(P, b) = \dots = h_{n+s}(P, b) = 0 & \text{mit} \\ h_{n+\sigma}(P, b) = (w_\sigma - \alpha_\sigma) - \sum_1^n a_{\mu\sigma}(P)(z_\mu - \zeta_\mu) - \sum_1^n b_{\mu\nu, \sigma}(z_\mu - \zeta_\mu)(z_\nu - \zeta_\nu) \end{cases}$$

den Schnitt von $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ und $U \cap \bigcup_1^s (\varphi_\sigma \leq 0)$ höchstens in P .

2) Ist $0 < \tau < \delta$, so trifft $h_{n+1}(P^0, b^0) = \dots = h_{n+s-1}(P^0, b^0) = h_{n+s}(P^0, b^0) - E\tau^2 = 0$ den Schnitt von $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ und $U \cap \bigcup_1^s (\varphi_\sigma \leq 0)$ überhaupt nicht.

Da g^k auf der Ebene $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ liegt und deshalb die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \dots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ schneidet, können ähnlich wie beim Hilfssatz 4 Zahlen $b'_{\mu\nu, \sigma} (|b'_{\mu\nu, \sigma} - b_{\mu\nu, \sigma}^0| < \delta)$ und $d'_{\mu\nu} (|d'_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}^0| < \delta: \delta_{\mu\nu}^0 = 1; \delta_{\mu\nu}^0 = 0, \mu \neq \nu)$ bestimmt werden, so daß

$$\mathfrak{F}^{m-k} = \begin{cases} u'_{n+1} = \dots = u'_m = 0; \quad m = n + s; \quad u'_{n+\sigma} = h_{n+\sigma}(P^0, b') \\ u'_j = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta_k^0) = 0; \quad j = m - k + 1, \dots, n \end{cases}$$

die Menge g^k nur in diskreten Punkten trifft. Außerdem mögen die Determinanten $|d'_{jk}|$ ($j, k = 1, \dots, n$) und $|d'_{\varrho\sigma}|$ ($\varrho, \sigma = m - k + 1, \dots, n$) ungleich Null sein.

Im Beweis zu Satz 1 ersetze man nun n durch $m = n + s$, so daß $r = m - k + 1$ ist, und erkläre u'_μ durch $u'_{n+\sigma} = h_{n+\sigma}(P^0, b')$ ($\sigma = 1, \dots, s$); $u'_j = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta_k^0)$ ($j = 1, \dots, n$). Im übrigen kann man nun formal genau so wie unter 1.—4. verfahren. Dabei ist jedoch folgendes zu beachten: Zwar liegen die Gebiete \mathfrak{R} und \mathfrak{D} jetzt nicht in $\bar{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$. Trotzdem ist g^k in $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{D}$ analytisch — und das allein ist wichtig —, da die Schnitte von \mathfrak{R} und \mathfrak{D} mit der Ebene $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ in $\bar{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ enthalten sind. Man bekommt so wieder eine in Z_{**} analytische k -dimensionale Menge g_*^k , für die $Z_* \cap g_*^k = Z_* \cap g^k$ ist.

Unter 5. sind jetzt statt der $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ die Flächen

$$\mathfrak{F}^r(P) = \begin{cases} h_{n+1}(P, b') = \dots = h_{n+s}(P, b') = 0 \\ h_j(P, d') = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta_k) = 0; \quad j = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

für P aus $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ zu nehmen. Wieder ist zu bedenken, daß zwar $\mathfrak{F}^r(P) \cap U_*$ nicht in $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ liegt, dies jedoch für den Schnitt von $\mathfrak{F}^r(P) \cap U_*$ mit der

Ebene $w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0$ gilt. Auf dieser Ebene liegt g^k . Aber auch g_*^k liegt auf ihr. Denn g_*^k ist aus g^k durch analytische Fortsetzung entstanden. Dabei bleiben die Identitäten $w_\sigma - z_\sigma = 0$ ($\sigma = 1, \dots, s$) auf jeder Komponente erhalten. Infolgedessen bleiben die Schlüsse von 5. gültig.

Anmerkung. Auch beim Beweis des Analogons zu Hilfssatz 4 hat man geringfügige Änderungen anzubringen. Man geht aus von der Fläche \mathfrak{F}^{m-k} und verfährt zunächst wie früher. Dann aber ist S zu erklären als Schnitt von $h_{m-k+1}^0 = \dots = h_m^0 = 0$ mit dem Rand von $U \cap (w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0)$ und entsprechend $S(b', d')$ als Schnitt von $\mathfrak{F}(b', d')$ mit dem Rand von $U \cap (w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0)$. Sonst geht es wie früher.

Dieser Satz wird zur Untersuchung der analytischen Mengen des z -Raumes wie folgt benutzt. Es seien s Hyperflächen $\varphi_\sigma = z_\sigma - \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ gegeben, und $\zeta_\sigma^0 \neq 0$. Für sie soll gelten: Der Index der Hyperfläche im (w, z) -Raum $\varphi_\sigma^* = w_\sigma \bar{w}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ ist in allen Punkten gleich n . In Zukunft haben wir es nur mit solchen $\varphi_\sigma = 0$ zu tun. Sie mögen „normal“ heißen.

Satz 2. Die $\varphi_\sigma = z_\sigma \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ seien normal. Ferner sei ζ^0 mit $\zeta_\sigma^0 \neq 0$; $\sigma = 1, \dots, s$ ein Punkt auf $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$, U eine Umgebung von ζ^0 und $\bar{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$. Endlich sei g^k eine in U analytische Menge und $k \geq s + 1$. Dann existiert in ζ^0 die lokale Fortsetzung von g^k und ist eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. Man ordne g^k die Menge \mathfrak{G}^k des (w, z) -Raumes:

$$\mathfrak{G}^k = (w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0; (z) \in g^k)$$

zu. Setzt man $\varphi_\sigma^* = w_\sigma \bar{w}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$, so treffen auf sie und eine Umgebung des Punktes $P^0 = (\zeta_1^0, \dots, \zeta_s^0; \zeta_1^0, \dots, \zeta_n^0)$ die Voraussetzungen des Satzes 1a zu. Also gibt es eine Umgebung U_* von P^0 und eine in ihr analytische Menge \mathfrak{G}_*^k , für die $\mathfrak{G}_*^k = \mathfrak{G}^k$ in $\bar{U}_* = U_* \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma^* > 0)$ ist. Jede Komponente \mathfrak{G}_i^k von \mathfrak{G}_*^k trifft \bar{U}_* . Außerdem liegt \mathfrak{G}_*^k auf $(w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0)$.

2. \mathfrak{G}_i^k trifft die Ebene $z_1 - \bar{z}_1 = \dots = z_n - \bar{z}_n = 0$ nur in P^0 . In einer Polyzylinder-Umgebung $U = (U_w, U_z)$ von P^0 besitzt \mathfrak{G}_i^k nach dem Einbettungssatz eine Einbettungsmenge \mathfrak{G}_i^k mit einer Darstellung

$$\mathfrak{G}_i^k = (w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0; (z) \in g_i^k; g_i^k \text{ analytisch in } U_z).$$

Die Komponenten von \mathfrak{G}_i^k bekommt man offenbar, indem man g_i^k in seine Komponenten zerlegt. \mathfrak{G}_i^k selbst hat dann eine Darstellung

$$\mathfrak{G}_i^k = (w_1 - z_1 = \dots = w_s - z_s = 0; (z) \in h_i^k; h_i^k \text{ analytisch und irreduzibel in } U_z).$$

Die Vereinigung der h_i^k ist die gesuchte Fortsetzung von g^k . Denn nach Konstruktion umfaßt sie $U_* \cap g^k$ und ihr Durchschnitt mit $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma^* > 0)$ ist in g^k enthalten.

Ähnlich geht aus § 3, Satz D' hervor

Satz D''. Es seien s normale Hyperflächen $\varphi_\sigma = z_\sigma \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ gegeben, ζ ein Punkt auf $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$ und U eine Umgebung von ζ^0 .

g_1^k, g_2^k seien in U analytische Mengen, welche in $\bar{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\alpha > 0)$ übereinstimmen. Dann gilt:

Ist $k \geq s$, so gibt es eine Umgebung U_* von ζ^0 , in der $g_1^k = g_2^k$ ist.

Anmerkung. Bei einer normalen Hyperfläche $z_1 \bar{z}_1 - \chi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ kann die linke Seite nicht in Wahrheit unabhängig von z_1 sein. Das ist leicht zu sehen. — Es ist möglich und erlaubt, daß $\cap (\varphi_\alpha > 0)$ etwa der Durchschnitt der Außengebiete zweier Kugeln ist, die sich in ζ^0 berühren und sonst punktfremd sind. $U - \bar{U}$ ist dann nicht zusammenhängend. Das spielt keine Rolle.

§ 5. Fortsetzung im Großen.

Im folgenden werden mehrere Hyperflächen $\varphi = 0$ betrachtet. Sie sollen alle zweimal stetig differenzierbar sein und nur gewöhnliche Punkte haben. Die Bedingung (v^*) ist dann erfüllt. Jedem ζ auf $\varphi = 0$ ist ein Index $q(\zeta)$ zugeordnet, der Index von $\sum \varphi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta) u_\mu \bar{u}_\nu$ auf $\sum \varphi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta) u_\mu = 0$. Als „Index von $\varphi = 0$ “ wird das $\min q(\zeta)$ auf $\varphi = 0$ bezeichnet. Aus den Sätzen D und D' ergeben sich zwei Aussagen, die für die Fortsetzung im Großen nützlich sind.

Hilfssatz 5.1. Voraussetzungen. 1. Φ sei die Vereinigung von l Hyperflächen $\varphi_\lambda = 0$ und q_λ der Index von $\varphi_\lambda = 0$. Es sei $q_\lambda + k \geq n$. Die Vereinigung der Außengebiete $\varphi_\lambda > 0$ heiße A .

2. M sei eine abgeschlossene Punktmenge auf Φ .

3. Jedem $\zeta \in M$ sei eine Kugel $U(\zeta)$ und eine in $U(\zeta)$ analytische Menge $g^k(\zeta)$ zugeordnet, und zwar so, daß in A die Verträglichkeitsbedingung: $g^k(\zeta') = g^k(\zeta'')$ in $U(\zeta') \cap U(\zeta'') \cap A$ erfüllt ist. Dann ist also $g^k = \bigcup g^k(\zeta)$ eine in $A \cup \bigcup U(\zeta)$ analytische Menge.

Behauptung. Es gibt ein Gebiet B , welches M im Inneren enthält, und eine in B analytische Menge g_*^k , so daß $g_*^k = g^k$ in $B \cap A$ ist.

Anmerkung. Da stets $q_\lambda \leq n - 1$ ist und natürlich auch $k \leq n - 1$ sein soll, so folgt aus $q_\lambda + k \geq n + 1$, daß $n \geq 3$ und $k \geq 2$ ist. — Der Satz ist etwas allgemeiner gefaßt, als man ihn hier braucht. Aber der Beweis wird nicht erschwert.

Beweis. 1. Zu jedem $P \in M$ fixiere man eine ganz in $U(P)$ gelegene Kugel $U'(P)$. Da M abgeschlossen ist, gibt es Punkte P_1, \dots, P_m , so daß M innerhalb $B' = U'(P_1) \cup \dots \cup U'(P_m)$ liegt. Es sei $g'_\mu = g^k(P_\mu) \cap U'(P_\mu)$. Die Vereinigung der g'_μ stimmt in $B' \cap A$ offenbar mit g^k überein.

2. Außerdem aber genügen die $(g'_\mu, U'(P_\mu))$ in einer vollen Umgebung B von M den Äquivalenzbedingungen.

Zum Beweise sei $Q \in M$ ein Punkt des abgeschlossenen Durchschnitts von U'_1, \dots, U'_r (jedes U'_θ ein $U'(P_\mu)$). Dann existiert eine Umgebung $V(Q)$, in der die beteiligten $g(P_\mu)$ miteinander übereinstimmen.

Denn Q liegt, da $U'(P_\mu) \subset U(P_\mu)$, im Inneren aller beteiligten $U(P_\mu)$; alle beteiligten $g(P_\mu)$ sind also in einer Umgebung $V'(Q)$ noch analytisch. Sie stimmen ferner in $V'(Q) \cap A$ paarweis überein. Nach Satz D_1 gibt es eine volle Umgebung $V(Q)$, in welcher sie gleich sind. $V(Q)$ sei so klein, daß $V(Q) \cap U'(P_\mu) = 0$ für alle nicht beteiligten $U'(P_\mu)$ ist.

Sei nun B der Durchschnitt von B' und der Vereinigung der $V(Q)$ für alle Q aus M . Es ist zu zeigen, daß g'_i und g'_k in $\mathfrak{D}_{ik} = U'(P_i) \cap U'(P_k) \cap B$ übereinstimmen. Das ist jedoch klar. Denn jeder Punkt $R \in \mathfrak{D}_{ik}$ liegt in einer Umgebung $V(Q)$ um einen Punkt Q aus M . Und in $V(Q)$ stimmen $g^k(P_i)$ und $g^k(P_k)$ miteinander und mit g'_i und g'_k überein.

3. Aus 1. und 2. folgt, daß die Vereinigung der g'_μ in B eine analytische Menge g^k_\star bildet, welche in $B \cap A$ mit g^k übereinstimmt, w. z. b. w.

In dem nun folgenden Hilfssatz werden $l \cdot s$ Hyperflächen $w_{\lambda\sigma} \cdot \bar{w}_{\lambda\sigma} - \varphi(z, \bar{z}) = \varphi_{\lambda\sigma} = 0$ betrachtet. Es sei $\mathfrak{D}_\lambda = \bigcap_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$, also der (bei festem λ) von den $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$ begrenzte Durchschnitt der $\varphi_{\lambda\sigma} > 0$. Weiter sei A nun die Vereinigung der \mathfrak{D}_λ , also $A = \bigcup_{\lambda=1}^l \mathfrak{D}_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^l \bigcap_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$.

Hilfssatz 5.2. In den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5.1 sei jetzt Φ die Vereinigung der $l \cdot s$ normalen Hyperflächen $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$. Weiter sei $q_{\lambda\sigma} = n$ und $s \leq k$. Schließlich sei $A = \bigcup_{\lambda=1}^l \bigcap_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$. Im übrigen braucht weder an der Voraussetzung von 5.1 noch an der Behauptung etwas geändert zu werden.

Der Beweis geht genau wie oben. Nur wird statt des Satzes D jetzt Satz D'' benutzt.

Satz 3 (sternartige Gebiete). Das Gebiet G sei beschränkt, sternartig und ganz in G' enthalten. G werde von l Hyperflächen $\varphi_\lambda = 0$ begrenzt, und zwar so, daß $G = \bigcap_{\lambda=1}^l (\varphi_\lambda < 0)$ ist. Die φ_λ sollen der Voraussetzung (v^*) genügen und die Indexrelation $q_i + q_j + k \geq 2n$ für jedes Paar i, j befriedigen. g^k sei eine in $G' - G$ analytische Menge ($k \geq 2$). Dann gibt es eine und nur eine in G' analytische Menge g^k_\star , welche in $G' - G$ mit g^k übereinstimmt. Jede Komponente von g^k_\star enthält mindestens eine Komponente von g^k .

Anmerkung. Aus $q_i + q_j + k \geq 2n$ und $q_i \leq n-1$ folgt $q_j + k \geq n+1$. Also darf im Beweis außer Satz D auch der Satz 1 benutzt werden. Ferner folgt aus $q_i = q_j = n-1$ und $k \geq 2$ wieder $q_i + q_j + k \geq 2n$. Ist das Gebiet G also nur von Hyperflächen mit dem Höchstindex berandet, so sind die Bedingungen erfüllt. Aber die Hyperflächen brauchen nicht den Höchstindex zu haben, außer für $n=3$. G braucht also durchaus kein Regularitätsgebiet zu sein, wenn $n > 3$ ist.

Beweis. a) Existenz.

1. Der Ursprung 0 sei Mittelpunkt des Sterngebietes G . Durch die Abbildung $z' = r \cdot z$ ($0 < r < 1$) gehe G in $G(r)$ über. Wird $\varphi^{(r)}_\lambda = \varphi_\lambda \left(\frac{z}{r} \right)$ gesetzt, so ist $G(r) = \bigcap_{\lambda=1}^l (\varphi^{(r)}_\lambda < 0)$. Der Index von $\varphi^{(r)}_\lambda = 0$ ist derselbe wie der von $\varphi_\lambda = 0$. Für je zwei der Hyperflächen ist die Indexrelation also erfüllt.

2. Es ist zunächst zu zeigen: Zu jedem r ($0 < r < 1$) gibt es eine in $G' - G(r)$ analytische Menge $g(r)$, so daß $g(r) = g^k$ in $G' - G(r)$. Kurz: Die Fortsetzung existiert in $G' - G(r)$.

Gesetzt, diese Behauptung sei falsch. Dann muß es ein kleinstes $r' > 0$ geben, so daß die Fortsetzung $g(r')$ in $G' - G(r')$ noch existiert. Der Rand von $G(r')$ sei \mathfrak{R} .

2.1. Der Randpunkt $R \in \mathfrak{R}$ liege auf nur einer Hyperfläche $\varphi_\sigma^{(r')} = 0$. Dann gibt es nach Satz 1 eine Umgebung $U(R)$ und eine in ihr analytische Menge g_R , so daß $g_R = g(r')$ in $U(R) \cap (\varphi_\sigma^{(r')} > 0)$. Man mache $U(R)$ so klein, daß in $U(R)$ für die übrigen σ gilt: $\varphi_\sigma^{(r')} < 0$. Dann ist also $g_R = g(r')$ im Durchschnitt von $U(R)$ und $G' - G(r')$.

2.2 $R \in \mathfrak{R}$ liege auf den Hyperflächen $\chi_1 = 0; \dots; \chi_m = 0$ (jedes χ_μ ein $\varphi_\sigma^{(r')}$) und keiner weiteren. Dann gibt es nach Satz 1 eine Umgebung $U'(R)$ und m in ihr analytische Mengen g_μ , so daß jeweils $g_\mu = g(r')$ in $U'(R) \cap (\chi_\mu > 0)$. Die Mengen g_i und g_j stimmen daher in $U'(R) \cap (\chi_i > 0) \cap (\chi_j > 0)$ überein. Nach Satz D gibt es aber eine Umgebung U_{ij} von R , in der $g_i = g_j$ ist. Daher existiert auch eine Umgebung $U(R)$ (man Sorge nur dafür, daß $U(R)$ im Durchschnitt aller U_{ik} liegt und daß für alle nicht beteiligten $\varphi_\sigma^{(r')}$ in $U(R)$ gilt: $\varphi_\sigma^{(r')} < 0$), so daß alle g_μ in $U(R) \cap (G' - G(r'))$ untereinander und mit $g^k(r')$ übereinstimmen.

2.3. Nach 2.1 und 2.2 gibt es zu jedem R auf \mathfrak{R} eine Umgebung $U(R)$ und eine in ihr analytische Menge $g(R)$, so daß die Vereinigung der $g(R)$ im Durchschnitt von $G' - G(r')$ und $\bigcup_{R \in \mathfrak{R}} U(R)$ mit $g^k(r')$ übereinstimmt. Nach Hilfssatz

5.1 existiert dann ein Gebiet B , welches \mathfrak{R} im Innern enthält, und eine in B analytische Menge g_0 , so daß $g_0 = g^k(r')$ in $B \cap (G' - G(r'))$. Ist $r' - r'' > 0$ klein genug, so liegt $G' - G(r'')$ sicher in $B \cup (G' - G(r'))$. Die Vereinigung von g_0 und $g^k(r')$ ist also eine in $G' - G(r'')$ analytische Menge, die in $G' - G$ gleich g^k ist. Das widerspricht der Definition von r' .

3. Wegen 2. gibt es eine in $G' - O$ analytische Menge g_+ , die in $G' - G$ gleich g^k ist. Nach der von REMMERT und STEIN²³⁾ bewiesenen Erweiterung eines bekannten Satzes von THULLEN²⁴⁾ gibt es jedoch keine isolierten Singularitäten mindestens eindimensionaler analytischer Mengen. Infolgedessen muß g_+ auch in O noch analytisch bleiben. Die durch den Punkt O ergänzte Menge g_+ hat die von g^k_* geforderten Eigenschaften.

Anmerkung. Den tiefliegenden zuletzt benutzten Satz kann man im vorliegenden Fall $k \geq 2$ vermeiden. Man betrachte die Kugeln

$$\varphi_1 = |z_1 - \varepsilon|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 - \varepsilon^2 = 0$$

und

$$\varphi_2 = |z_1 + \varepsilon|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 - \varepsilon^2 = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Sie berühren sich nur in O . Es gibt eine Umgebung $U(O)$ und dort analytische Mengen g_1 und g_2 , so daß $g_1 = g_+$ in $U(O) \cap (\varphi_1 > 0)$; $g_2 = g_+$ in $U(O) \cap (\varphi_2 > 0)$.

²³⁾ Vgl. [13] und [16].

²⁴⁾ Vgl. [19].

Da $g_1 = g_2$ in $U(O) \cap (\varphi_1 > 0) \cap (\varphi_2 > 0)$, so nach Satz D auch $g_1 = g_2$ in einer vollen Umgebung $U_*(O)$. In $U_*(O) - O$ ist aber nun $g_1 = g_2 = g_+$ (vgl. auch die Anmerkung zu Satz 2, § 4).

b) Gesetzt, es seien g_*^k, g_{**}^k zwei in G' analytische Mengen und $g_*^k = g_{**}^k$ in $G' - G$. Es ist zu zeigen, daß $g_*^k = g_{**}^k$ in G' ist.

Angenommen, das sei nicht der Fall. Dann muß es ein kleinstes $r_* > 0$ geben, so daß $g_*^k = g_{**}^k$ in $G' - G(r_*)$. Ist $r_* > 0$, so muß es dann einen Randpunkt R von $G(r_*)$ geben, derart, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von R $g_*^k \neq g_{**}^k$ ist. Das steht im Widerspruch zu Satz D.

Ist $r_* = 0$, so kann man den gleichen Schluß anwenden. Es ist nur eine Hilfskugel zu betrachten, auf deren Rand 0 liegt.

Daher muß $g_*^k = g_{**}^k$ in G' sein.

Satz 3a. G, G' seien schlichte Gebiete des z -Raumes, G ganz in G' enthalten und G sternartig und beschränkt. G werde von $l \cdot s$ normalen Hyperflächen $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$ berandet,

und zwar so, daß $G = \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} < 0)$. Es sei $2s \leq k$ und $s \geq 1$. Dann gilt:

Ist g^k eine in $G' - G$ analytische Menge, so gibt es genau eine in G' analytische Menge g_*^k , die in $G' - G$ gleich g^k ist. Jede Komponente von g_*^k enthält wenigstens eine Komponente von g^k .

Beweis. Im Beweis zu Satz 3 ersetze man eine Hyperfläche $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$ durch den Rand von $\bigcup_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} < 0)$, die Gebiete $\varphi_{\lambda\sigma} < 0$ (bzw. $\varphi_{\lambda\sigma} > 0$) durch $\bigcup_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} < 0)$ (bzw. $\bigcap_{\sigma=1}^s (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$). Man stützt sich jetzt auf Satz D'', Hilfssatz 5.2 und Satz 2 statt Satz D, Hilfssatz 5.1 und Satz 1. Sonst geht alles wie früher. Auf die Durchführung im einzelnen wird daher verzichtet.

Anwendung von Satz 3.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind offenbar erfüllt, wenn

$$\varphi_\lambda = z_\lambda \bar{z}_\lambda + \alpha \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i - \beta \quad (\alpha, \beta > 0; \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

und $G = \bigcap_{\lambda=1}^n (\varphi_\lambda < 0)$ ist. Der Polyzylinder $\mathcal{B} = \bigcap_{\lambda=1}^n (|z_\lambda| < 1)$ läßt sich durch solche Gebiete G , welche ihn ganz im Inneren enthalten, beliebig genau approximieren. Also folgt

Satz 4. Sei $\mathcal{B} = \bigcap_{\lambda=1}^n (|z_\lambda| < 1)$ und $\mathcal{B}' = \bigcap_{\lambda=1}^n (|z_\lambda| < 1 + \varepsilon)$, ferner g^k eine in $\mathcal{B}' - \mathcal{B}$ analytische Menge der Dimension $k \geq 2$.

Dann gibt es genau eine in \mathcal{B}' analytische Menge g_*^k , die in $\mathcal{B}' - \mathcal{B}$ mit g^k übereinstimmt. Jede Komponente von g_*^k enthält wenigstens eine Komponente von g^k .

§ 6. Konvexität in bezug auf q -dimensionale analytische Flächen.

Untersucht wird die Frage, für welche (zunächst beschränkten) Gebiete G' die folgende Aussage richtig ist:

G sei ein ganz in G' gelegenes Gebiet. Die in $G' - G$ analytische irreduzible Menge g^* der Dimension $k \geq 2$ komme dem Rand von G' beliebig nahe. Dann existiert ein Gebiet $G_0: G \subset G_0 \subset G'$ und eine in G' analytische irreduzible Menge g_0^* , welche in $G' - G_0$ mit g^* übereinstimmt.

Eine jedenfalls ausreichende Bedingung für die Richtigkeit dieser Aussage ist die „ q -Konvexität“, die eine Erweiterung der Regularitätskonvexität²⁵⁾ auf Systeme von Funktionen ist.

Definition. G ist q -konvex, wenn es zu jedem ganz in G gelegenen Teilgebiet G_0 ein Zwischengebiet $G'_0: G_0 \subset G'_0 \subset G$ gibt, so daß gilt: Zu jedem Randpunkt R von G'_0 existieren $s = n - q$ in G reguläre Funktionen $f_R^{(1)} \dots, f_R^{(s)}$, so daß

$|f_R^{(\sigma)}(R)| > 1$ ist und G_0 ganz in $\bigcup_{\sigma=1}^s (|f_R^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist.

Offenbar ist G genau dann regulärkonvex, wenn es $(n - 1)$ -konvex ist. Ist G regulärkonvex, so ist es bekanntlich durch ganz in G gelegene (bezüglich G) analytische Polyeder \mathfrak{P} approximierbar. Das sind Gebiete, zu denen l in G reguläre Funktionen f_1, \dots, f_l existieren, so daß \mathfrak{P} in $\bigcap_{\lambda=1}^l (|f_\lambda| < 1)$ enthalten und in jedem Randpunkt für mindestens ein $\lambda': |f_{\lambda'}| = 1$ ist. Analog führen wir bezüglich G analytische q -Polyeder ein.

Definition. Das Gebiet $\mathfrak{P} \subset G$ ist ein (bezüglich G) analytisches q -Polyeder, wenn es $l \cdot s$ ($s = n - q$) in G reguläre Funktionen $g_\lambda^{(\sigma)}$ gibt, so daß \mathfrak{P} in

$\bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|g_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist und zu jedem Randpunkt von \mathfrak{P} für mindestens ein λ' gilt: $|g_{\lambda'}^{(\sigma)}| \geq 1$ ($\sigma = 1, \dots, s$).

Auch hier gilt der

Hilfssatz. Jedes q -konvexe Gebiet G kann beliebig genau durch ganz in seinem Inneren gelegene (bezüglich G) analytische q -Polyeder approximiert werden.

Der Beweis geht wie bei regulärkonvexen Gebieten. Zu jedem $G_0 \subset G$ gibt es nach Voraussetzung ein $G'_0: G_0 \subset G'_0 \subset G$, für dessen Randpunkte R gilt: Es gibt eine Umgebung $U(R)$ und s Funktionen $f_R^{(1)}, \dots, f_R^{(s)}$, so daß $|f_R^{(\sigma)}(U(R))| > 1$ ist und G_0 ganz in $\bigcup_{\sigma=1}^s (|f_R^{(\sigma)}| < 1)$ liegt. Man fixiere Rand-

punkte R_1, \dots, R_l , so daß der Rand von G'_0 ganz in $\bigcup_{\lambda=1}^l U(R_\lambda)$ enthalten ist.

Setzt man $f_{R_\lambda}^{(\sigma)} = g_\lambda^{(\sigma)}$, so gilt: G_0 liegt ganz in $\mathfrak{P} = \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|g_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$. Andererseits liegt die G_0 enthaltende Komponente von \mathfrak{P} ganz in G .

Das einfachste analytische Polyeder ist der Polyzylinder. Ein einfaches beschränktes q -Polyeder, das für unseren Zweck geeignet ist, erhält man so. Wir legen den Raum der $n + l \cdot s$ Veränderlichen

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \dots, l \\ (w_{\lambda\sigma}, z_i); \quad \sigma &= 1, \dots, s \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

²⁵⁾ Vgl. [3], S. 72.

zugrunde. Das q -Polyeder sei

$$\Pi_{AB} = \left\{ \bigcap_{\lambda, \sigma=1}^{l, s} (|w_{\lambda\sigma}| < A) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|w_{\lambda\sigma}| < B) \right\} \cap \left\{ \bigcap_1^n (|z_i| < A) \right\}$$

mit $0 < B < A$.

Es ist demnach der Durchschnitt eines Polyzylinders im (w, z) -Raum mit einem unbeschränkten q -Polyeder im w -Raum. Man kann es leicht auf die frühere Form bringen, indem man z. B. $|z_i| < A$ durch $\bigcup_1^s (|z_i^{(\sigma)}| < 1)$ ($z_i = A z_i^{(\sigma)}$) ersetzt und mit den anderen Variablen genau so verfährt.

Analog zu Satz 4 erhält man

Satz 5. Es sei $A > A' > B > B' > 0$, also $\Pi_{A'B'} \subset \Pi_{AB}$. Ferner sei $2s \leq k \leq 2$ und g^k in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ analytisch. Dann gibt es genau eine in Π_{AB} analytische Menge g_^k , welche in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gleich g^k ist. Jede Komponente von g_*^k enthält wenigstens eine Komponente von g^k .*

Beweis. Bei zunächst willkürlichem $\alpha > 0$ bilde man die Funktionen

$$\varphi_j = |z_j|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 + \alpha \sum_{\lambda, \sigma=1}^{l, s} |w_{\lambda\sigma}|^2$$

$$\psi_{\lambda\sigma} = |w_{\lambda\sigma}|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 + \alpha \sum_{\lambda, \sigma=1}^{l, s} |w_{\lambda\sigma}|^2$$

und mache nun $\alpha, \beta > 0$ so klein, daß für

$$\mathfrak{P} = \left\{ \bigcap_1^n (\varphi_j - A^2 + \beta < 0) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\lambda, \sigma=1}^{l, s} (\psi_{\lambda\sigma} - A^2 + \beta < 0) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (\psi_{\lambda\sigma} - B^2 + \beta < 0) \right\}$$

die Beziehung $\Pi_{A'B'} \subset \mathfrak{P} \subset \Pi_{AB}$ richtig ist. Das ist offenbar möglich. Jede der Randhyperflächen ist normal. Weiter ist \mathfrak{P} sternartig. Schließlich kann man \mathfrak{P} auf die in Satz 3a zugrunde gelegte Form $\mathfrak{P} = \bigcap_{\mu=1}^m \bigcup_{\sigma=1}^s (\chi_{\mu\sigma} < 0)$ bringen, worin jedes χ eine der Funktionen φ, ψ ist. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 3a erfüllt. Infolgedessen gibt es genau eine in \mathfrak{P} analytische Menge g_0 , welche in $\Pi_{AB} - \mathfrak{P}$ mit g^k übereinstimmt.

Die Vereinigung $g^k \cup g_0 = g_*^k$ ist die gesuchte Menge. Denn sie ist in Π_{AB} analytisch und stimmt in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ mit g^k überein. Sie ist ferner die einzige ihrer Art. w. z. b. w.

Es mögen jetzt drei Gebiete $G \supset G_1 \supset G_2$ gegeben sein. G sei schlicht und beschränkt, sonst beliebig. G_1 sei ein bezüglich G analytisches q -Polyeder: Es gibt l in G reguläre Funktionensysteme $(f_\lambda^{(1)}, \dots, f_\lambda^{(s)})$, so daß G_1 in $\bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|f_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist, und in jedem Randpunkt von G_1 für wenigstens ein λ' und alle σ $|f_{\lambda'}^{(\sigma)}| \geq 1$ ist ($s = n - q$). Es ist denkbar und erlaubt, daß

g^*

$\bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|f_{\lambda}^{(\sigma)}| < 1)$ in mehrere Gebiete zerfällt, welche zum Teil in $G - G_1$ liegen.

G_2 sei eine der in G_1 gelegenen Komponenten von $\mathfrak{P}_\varepsilon = \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|f_{\lambda}^{(\sigma)}| < 1 - \varepsilon)$, also eines der in G_1 enthaltenen maximalen Teilgebiete von \mathfrak{P}_ε . Dann gilt

Satz 6. *Ist g^k eine in $G_1 - G_2$ irreduzible analytische Menge ($k \geq 2$; $k \geq 2s$), welche dem Rand von G_1 beliebig nahe kommt, so gibt es genau eine in G_1 analytische Menge g_\star^k und eine Umgebung U des Randes von G_1 , so daß $g_\star^k = g^k$ in $G_1 \cap U$ ist.*

Anmerkung. Die Voraussetzungen sind enger als im letzten Satz. Damit soll vermieden werden, daß g^k in $(G_1 - G_2) \cap \mathfrak{P}_\varepsilon$ enthalten ist. Auch die Behauptung sagt weniger aus. Ob überall in $G_1 - G_2$ auch $g_\star^k = g^k$ ist, wird nicht untersucht.

Beweis. 1. $A > 1$ sei so groß, daß G ganz im Polyzylinder $\bigcap_{i=1}^n (|z_i| < A - \varepsilon)$ enthalten ist und in G_1 $|f_{\lambda}^{(\sigma)}(z)| < A - \varepsilon$ ist. Nach dem Vorbild OKAs²³⁾ wird G_1 das n -dimensionale analytische Flächenstück

$$\mathfrak{G}_1^n = \{w_{\lambda\sigma} = f_{\lambda}^{(\sigma)}(z); z \in G_1\}$$

im Raume der $m = n + l \cdot s$ Veränderlichen $(w_{\lambda\sigma}, z_i)$ zugeordnet. \mathfrak{G}_1^n ist in

$$\Pi_{AB} = \bigcap_1^n (|z_i| < A) \cap \bigcap_{\lambda,\sigma}^{l,s} (|w_{\lambda\sigma}| < A) \cap \bigcap_{\lambda=1}^l \bigcup_{\sigma=1}^s (|w_{\lambda\sigma}| < B); B = 1$$

analytisch und irreduzibel. Alle seine Randpunkte liegen auf dem Rand von

$$\bigcap_1^l \bigcup_1^s (|w_{\lambda\sigma}| < 1) \text{ und im Inneren von } \bigcap_1^n (|z_i| < A) \cap \bigcap_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} (|w_{\lambda\sigma}| < A).$$

2. Bei dieser Zuordnung geht $G_1 - G_2$ in einen Teil \mathfrak{R}^n von \mathfrak{G}_1^n über. Es ist denkbar, daß \mathfrak{R}^n das Gebiet $\Pi_{A'B'}$ ($A' = A - \varepsilon$; $B' = B - \varepsilon$) noch schneidet. Jedenfalls aber liegen in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ Teile des Bildes \tilde{g}^k von g^k , da g^k dem Rand von G_1 beliebig nahe kommt.

3. Der in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gelegene Teil von \tilde{g}^k ist eine analytische k -dimensionale Menge \tilde{g}_0^k . Auf \tilde{g}_0^k treffen die Voraussetzungen des Satzes 5 zu. Infolgedessen gibt es eine in Π_{AB} analytische Menge \tilde{g}_\star^k , welche in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ mit \tilde{g}_0^k übereinstimmt.

4. Die Menge \tilde{g}_1^k hat folgende Eigenschaften: a) Sie ist k -dimensional. b) Jede ihrer Komponenten \tilde{g}_λ^k enthält wenigstens eine der Komponenten von \tilde{g}_0^k . — Außerdem aber gilt

c) Die z -Projektion g_1^k von \tilde{g}_1^k liegt in G_1 und ist eine dort analytische k -dimensionale Menge. In der z -Projektion \mathfrak{G} von $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ ist $g_1 = g^k$.

Beweis. (1) Auf jeder Komponente \tilde{g}_λ^k von \tilde{g}_1^k gilt identisch $w_{\lambda\sigma} = f_{\lambda}^{(\sigma)}(z)$ und es ist $z \in G_1$. Denn das ist richtig auf dem in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gelegenen Teil von \tilde{g}_1^k ; da dort $\tilde{g}_1^k = \tilde{g}_0^k$ und auf \tilde{g}_0^k doch $w_{\lambda\sigma} = f_{\lambda}^{(\sigma)}(z)$ ist. Dann bleibt die Gleichung nach dem Identitätssatz auf ganz \tilde{g}_λ^k erhalten, soweit die $f_{\lambda}^{(\sigma)}$ noch

²³⁾ Vgl. [10], [11].

regulär sind. Nun ist auf \tilde{g}_1^k aber $w \in \cap \cup (|w_{\lambda\sigma}| < 1)$. Also ist auch $z \in \cap \cup (|f_{\lambda}^{(\sigma)}| < 1)$ und infolgedessen $z \in G_1$ und $f_{\lambda}^{(\sigma)}(z)$ regulär.

(2) Wegen (1) trifft jede Ebene $z_1 - z_1^0 = \dots = z_n - z_n^0 = 0$ die Fläche \tilde{g}_1^k höchstens in isolierten Punkten. Zu jedem Punkt $P(w^0, z^0)$ von \tilde{g}_1^k gibt es also nach dem Einbettungssatz eine Polyzylinder-Umgebung $U(P) = (U_w(P), U_z(P))$ und eine in ihr analytische Menge $\tilde{g}_* = (w_{\lambda\sigma} = f_{\lambda}^{(\sigma)}(z); z \in g_P)$, deren z -Projektion g_P in $U_z(P)$ analytisch ist und dort mit der z -Projektion von \tilde{g}_1^k übereinstimmt. Daher ist in $U_z(P) \cap U_z(Q)$ sicher $g_P = g_Q$. Die Vereinigung der g_P ist folglich eine in G_1 analytische Menge g_1 . In der z -Projektion \mathcal{E} von $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ stimmt g_1 mit der z -Projektion von \tilde{g}_0^k überein; das ist aber $g^k \cap \mathcal{E}$. Also ist $g_1 \cap \mathcal{E}$ k -dimensional. Da jede Komponente von g_1 notwendig \mathcal{E} schneidet (vgl. Satz 1.3; § 1), ist g_1 selbst k -dimensional.

Damit ist c) bewiesen.

5. Wird $g_*^k = g_1 \cup g^k$ und $G_1 \cap U = \mathcal{E}$ gesetzt, so erfüllt g_*^k alle Forderungen. Das folgt aus c) und der bereits erwähnten Tatsache, daß jede Komponente von g_1 auch \mathcal{E} schneidet.

Aus Satz 6 ergibt sich

Satz 7. G sei beschränkt und q -konvex, G_0 ganz in G gelegen. Die Menge g^k sei in $G - G_0$ analytisch und irreduzibel und komme dem Rand von G beliebig nahe. Ist $2s \leq k$ ($s = n - q$), so gilt: Es gibt eine in G analytische, irreduzible k -dimensionale Menge g_^k , welche g^k enthält. Außerdem gibt es ein ganz in G gelegenes Gebiet G_* , so daß $g^k = g^k$ in $G - G_*$ ist.*

Beweis. G ist durch q -Polyeder approximierbar. Es gibt also Gebiete $G_1, G_2: G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_0$ von der Art, wie sie im letzten Satz vorkommen. Da g^k dem Rand von G beliebig nahe kommt und eine zusammenhängende Punktmenge ist, läßt sich erreichen, daß $(G_1 - G_2) \cap g^k = g_1^k$ nicht leer ist und sogar den Rand von G_1 schneidet. Es gibt vielleicht mehrere, jedenfalls aber nur endlich viele Komponenten g_1 von g_1^k , die den Rand von G_1 treffen. Nach dem letzten Satz gibt es ein ganz in G_1 gelegenes Gebiet G_* und eine in G analytische Menge g_{**}^k , welche in $G_1 - G_*$ mit der Vereinigung der g_1 übereinstimmt. Jede Komponente von g_{**}^k enthält wenigstens ein g_1 . Sei nun $g_*^k = g_{**}^k \cup g^k$. Diese Menge g_*^k stimmt jedenfalls in $G - G_*$ mit g^k überein. Sie ist ferner in G analytisch. Außerdem ist sie nach Konstruktion die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften. Sie ist daher die gesuchte Menge.

Eine besondere und wichtige Folge ist, daß der Rand von G zusammenhängt.

Satz 7a. Sei g_^k in G (G beschränkt und q -konvex) analytisch und irreduzibel ($k \geq 2(n - q)$). Dann ist G durch Gebiete G_* approximierbar, für welche gilt: In $G - G_*$ ist g_*^k irreduzibel.*

Daraus ergibt sich, daß der Rand von G zusammenhängend ist.

Der Beweis geht fast unmittelbar aus Satz 7 hervor. Gesetzt, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es nach Satz 7 ein Gebiet $G_* \subset G$, so daß gilt: 1. g_*^k hat in $G - G_*$ mindestens zwei verschiedene irreduzible Komponenten g_1^k, g_2^k . 2. Es ist $g_*^k \cap (G - G_*) = g_1^k$ und $g_*^k \cap (G - G_*) = g_2^k$. — Das ist absurd.

$F_1 = (1, 0, \dots, 0); \dots; F_p = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (homogene Koordinaten) liegen außerhalb aller $U(\tau)$. Der Satz von THULLEN ist hier also für den Beweis nicht mehr nötig. Man vermeidet ihn wie im Beweis zu Satz 3. Im übrigen geht der Beweis wie beim Satz 8. Das Zerfallen des Komplementes von $U(\tau)$ spielt gar keine Rolle.

Folgerung. Nach einem Satz von CHOW²⁸⁾ ist jede im C^n analytische Menge eine algebraische Menge. Aus der Erweiterung des Satzes von THULLEN folgt, daß jede isolierte analytische Singularitätsebene einer g^k mindestens k -dimensional ist. Wenn also $q < k$ ist, so folgt aus den Voraussetzungen von Satz 8: g^k ist in $U(T)$ analytisch. Aus Satz 8 in Verbindung mit dem zitierten Satz von CHOW ergibt sich so

Satz 9. Ist $k \geq 2$, $q + k \geq n + 1$ und $q < k$, ferner g^k in $U(T) - E^q$ analytisch und irreduzibel, so gibt es eine irreduzible algebraische Menge der Dimension k , welche g^k enthält.

Zusatz. Insbesondere ergibt sich noch aus Satz 8: Jede in $C^n - E^q$ analytische und irreduzible Menge \mathfrak{g}^k ist auch in $U(T) - E^q$ irreduzibel.

Beweis. Zerfiele g^k in $U(T) - E^q$ in mehrere Komponenten, so würde sich jede von ihnen zu einer in $C^n - E^q$ analytischen irreduziblen Menge ergänzen lassen. Sie müssen alle voneinander verschieden sein. Denn in $U(T)$ sind sie verschieden. Das ist offenbar nicht möglich.

Daß Satz 9 richtig bleibt, wenn E^q durch eine beliebige irreduzible algebraische Fläche der Dimension q ersetzt wird, soll in einer späteren Arbeit gezeigt werden.

§ 8. Das Analogon eines HARTOGSSchen Satzes.

Der folgende Satz ist schärfer als die bisherigen. Er ist — für Funktionen ausgesprochen — der eigentliche Kern des „Kontinuitätssatzes“. Ich werde später zeigen, daß mit seiner Hilfe die Voraussetzungen des Satzes 6 auf das unerläßliche Maß reduziert werden können. Die Veränderlichen seien $z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q$ und $Z(r), W(r)$ die Polyzylinder $\cap \{|z_i| < r\}; \cap \{|w_j| < r\}$. ($q + p = n$).

Satz 10. Die Menge g^k sei analytisch und irreduzibel in der Vereinigung von $(Z(\epsilon), W(1))$ und $(Z(1), W(1) - W(1/2))$. Es sei $k \geq 2$ und $q + k \geq n + 1$. g^k komme der Hyperfläche $(Z(1), \text{Rand von } W(1))$ beliebig nahe. Dann gilt:

- 1. Es gibt eine in $(Z(1), W(1))$ analytische irreduzible und k -dimensionale Menge g^k , welche g^k enthält.*

2. Es ist $g_{\star}^k = g^k$ in $(Z(1), W(1) - W(1/2))$.

Beweis. Bei festem $\tau > 0$; $1 > \alpha > 0$ sei $U(\tau, \alpha)$ das Gebiet

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_1|^2 - \alpha \left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2 \right) - \tau < 0 \\ |z_p|^2 - \alpha \left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2 \right) - \tau < 0 \end{array} \right.$$

²⁰⁾ Vgl. [6] und auch [7], [4], [13].

Man wähle $\epsilon, E > 0$ ($\epsilon < \epsilon; E < 1$) beliebig und darauf α so, daß $U(\epsilon, \alpha) \subset (Z(\epsilon), W(1))$ und $(Z(E), W(1)) \subset U(E, \alpha) \subset (Z(1), W(1))$ ist.

Es genügt nun zu zeigen, daß es eine in $U(E, \alpha)$ analytische k -dimensionale Menge gibt, welche in $U(E, \alpha) \cap (Z(1), W(1) - W(1/2))$ mit g^k übereinstimmt.

Gesetzt, dies sei nicht der Fall. Dann muß es ein größtes $\tau_* < E$ mit folgender Eigenschaft geben: In $U(\tau_*, \alpha)$ existiert eine analytische k -dimensionale Menge $g(\tau_*)$, welche in $U(\tau_*, \alpha) \cap (Z(1), W(1) - W(1/2))$ mit g^k übereinstimmt. Wir zeigen, daß es ein solches τ_* nicht geben kann.

1. Es sei F der in $W(2/3)$ gelegene Teil des Randes von $U(\tau_*, \alpha)$ mit Ein-schluß der (auf dem Rande von $W(2/3)$ gelegenen) Häufungsstellen. Die Menge dieser Randpunkte von F sei \mathfrak{R} . In jedem Punkte P von F existiert die lokale Fortsetzung $g(P)$ von $g(\tau_*)$ (aus $U(\tau_*, \alpha)$ heraus in den Punkt P). Insbesondere gilt für die Punkte R von \mathfrak{R} : Es gibt eine Umgebung $U(R)$, so daß $U(R) \cap g(R) = U(R) \cap g^k$ ist. Nach Hilfsatz 5.1, § 5 können die $U(P)$ so gewählt werden, daß die Vereinigung der $g(P)$ in $\bigcup U(P)$ (P auf F) eine analytische k -dimensionale Menge \hat{g} ist. Dabei ist die Vereinigung der $g(R)$ (mit $R \in \mathfrak{R}$) identisch mit $\bigcup (g^k \cap U(R))$ (R auf \mathfrak{R}).

Infolgedessen läßt sich ein $\tau_{**} > \tau_*$ so finden, daß die Vereinigung \bar{g} von \hat{g} und $g^k \cap (W(1) - W(2/3))$ eine in $U(\tau_{**}, \alpha)$ analytische k -dimensionale Menge ist, die im Durchschnitt von $U(\tau_*, \alpha)$ und $(W(1) - W(2/3))$ mit g^k übereinstimmt.

2. Es muß noch nachgewiesen werden — und das ist ganz wesentlich —, daß auch in $(W(1) - W(1/2))$ noch $\bar{g} = g^k$ ist.

Zum Beweise wähle man zunächst ein $\tau': \tau_* < \tau' < \tau_{**}$. Die Mengen \bar{g} und g^k sind im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $(W(1) - W(1/2))$ analytisch; sie sind es sogar noch in allen Randpunkten, die im Inneren von $(W(1) - W(1/2))$ liegen. Da τ' beliebig ist, reicht es aus, die Gleichheit von \bar{g} und g^k im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $(W(1) - W(1/2))$ nachzuweisen.

Es sei nun $V(t, \beta)$ das Gebiet

$$|w_1|^2 + \beta \left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2 \right) - t = \chi_1 < 0$$

$$|w_q|^2 + \beta \left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2 \right) - t = \chi_q < 0.$$

Man wähle $1/2 < d < 1$; $D < 1$ beliebig und darauf $\beta > 0$ so, daß $W(2/3) \subset V(D, \beta) \subset W(1)$ und $W(1/2) \subset V(d, \beta) \subset W(d)$ ist. Wir zeigen, daß im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $V(d, \beta)$ noch $\bar{g} = g^k$ ist. Das genügt, da d beliebig nahe an $1/2$ genommen werden kann.

Wäre das nämlich nicht richtig, so müßte es ein kleinstes $t_* > d$ geben, für welches gilt: In $U(\tau', \alpha) \cap V(t_*, \beta)$ ist $\bar{g} = g^k$. — Das aber besagt: Auf dem Teil des Randes von $U(\tau', \alpha) \cap V(t_*, \beta)$, der zum Rande von $V(t_*, \beta)$ gehört, gibt es wenigstens einen Punkt R mit beliebig kleinen Umgebungen $U(R)$, in denen $\bar{g} \neq g^k$ ist. In $U(R)$ sind \bar{g} und g^k analytisch. Das jedoch widerspricht Satz D'', § 4: Es sei etwa $\chi_1(R) = 0$. Die Mengen sind k -dimensional

und stimmen in $U(\tau', \alpha) \cap (\chi_1 > 0)$ miteinander überein. Es ist $k \geq n + 1 - q = p + 1$, also k mindestens gleich der Anzahl der beteiligten (normalen) Hyperflächen. Dann gibt es (Satz D'') eine Umgebung von R , in der $\bar{g} = g^k$ ist.

Damit ist gezeigt, daß in $W(1) - W(1/2)$ noch $\bar{g} = g^k$ ist. 1. und 2. zusammen ergeben, daß τ_* nicht das größte τ seiner Art ist im Widerspruch zu seiner Definition, w.z.b.w.

Erweiterungen dieses Satzes ergeben sich sofort. Im Teil 1. des Beweises kommt es nur darauf an, daß die lokale Fortsetzung existiert. Im 2. Teil muß der Eindeigkeitsatz anwendbar sein. Ersetzt man nun $W(1)$, $W(1/2)$ durch zwei q' -Polyeder des w -Raumes Π_1, Π_2 ($\Pi_2 \subset \Pi_1$), welche nur von Hyperflächen $|w_j| = \text{const.}$ begrenzt werden, so hat man $k \geq p + n - q'$ zu fordern. Verfährt man dann wie früher, so hat man die Übereinstimmung der Mengen \bar{g} und g^k in $U(\tau', \alpha) \cap \bigcap_{i=1}^{n-q'} (\chi_{1i} > 0)$ (anstatt in $U(\tau', \alpha) \cap (\chi_1 > 0)$). Wieder ist k mindestens gleich der Anzahl der beteiligten Hyperflächen. Also gibt es eine Umgebung $U(R)$, in welcher $\bar{g} = g^k$ ist. Daher gilt

Satz 10a. Es seien Π_1, Π_2 ($\Pi_2 \subset \Pi_1$) beschränkte analytische q' -Polyeder des w -Raumes, die nur von Hyperflächen $|w_j| = \text{const.}$ begrenzt werden. Weiter sei $k \geq 2$ und $k \geq p + n - q'$. Dann bleibt Satz 10 richtig, wenn $W(1)$, $W(1/2)$ durch Π_1, Π_2 ersetzt werden. — Ist $p = 1$, so muß demnach $k + q' \geq n + 1$ sein ($p = n - q$).

Zusatz. Es liegt nahe, $W(1/2)$ in Satz 10 durch ein beliebiges Gebiet $W \subset W(1)$ zu ersetzen und auf die Aussage (2) zu verzichten. Das ist offenbar möglich. Entsprechendes gilt für Satz 10a. Im Beweis des Satzes scheint der 2. Teil jedoch unumgänglich zu sein. Man wird also $W(1)$ nicht ohne weiteres durch ein beliebiges Gebiet ohne Konvexitätseigenschaften ersetzen dürfen. Gleichwohl vermute ich, daß Satz 10 (ohne Teil (2)) für beliebige Gebiete W_1, W_2 anstelle von $W(1)$, $W(1/2)$ richtig ist. Nur wird man ein Beweisverfahren wie in meiner Arbeit [15] benutzen müssen.

Literatur.

- [1] BEHNKE, H.: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg Univ. 4, 347—365 (1926). — [2] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes. Math. Ann. 121, 356—378 (1950). — [3] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3, 3 (1934). [4] CARTAN, H.: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Amer. J. Math. 71, 893—914 (1949). — [5] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51). — [6] CHOW, W. L.: On compact analytic varieties. Amer. J. Math. 71, 893—914 (1949). — [7] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51). — [8] KOCH, K.: Die analytische Projektion. Schriftenreihe des Math. Instituts der Univ. Münster, H. 6 (1953). — [9] KRZOSKA, J.: Über die natürlichen Grenzen der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dissertation Greifswald 1933. — [10] OKA, K.: Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. J. Sci. Hiroshima

Univ., Ser. A, Vol. 6, Nr. 3 (1936). — [11] OKA, K.: Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, Vol. 7, Nr. 2 (1937). — [12] OSCOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Lieferung (2. Aufl.). Leipzig 1929. — [13] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263—306 (1953). — [14] ROTHSTEIN, W.: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{1n} ($n \geq 3$). Math. Ann. 121, 340—355 (1950). — [15] ROTHSTEIN, W.: Über die Fortsetzung analytischer Flächen. Math. Ann. 122, 424—434 (1951). — [16] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. 126, 221—238 (1953). — [17] STEIN, K.: Die Regularitätshüllen niederdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 114, 543—569 (1937). — [18] STEIN, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. C.B.R.M. 1953. — [19] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 111, 137—157 (1935).

(Eingegangen am 8. Juli 1954.)

Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung.

Von

REINHOLD BAER in Urbana, Illinois (USA).

HEINRICH SCHOLZ, dem Lehrer und Freund, zum 70. Geburtstag gewidmet.

Man verdankt MALZEW [1] den schönen Satz, daß jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe endlich erzeugbar ist, wenn dies nur von den abelschen Untergruppen vorausgesetzt wird. Beim Beweise dieses Satzes wie auch gewisser damit zusammenhängender Resultate über Automorphismengruppen benutzen MALZEW [1] und SMIRNOW [1, 2] ganz wesentlich einen Satz über kontinuierliche Gruppen. Wir wollen hier einen anderen Weg zur Gewinnung dieser Resultate einschlagen; und zwar werden wir die topologischen Hilfsmittel durch einfache Resultate aus der Ringtheorie ersetzen, welche im wesentlichen im § 1 zusammengestellt sind.

Der Gedankengang unseres Beweises sei kurz skizziert. Eine Gruppe heißt bekanntlich auflösbar, wenn jedes ihrer von 1 verschiedenen homomorphen Bilder einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler besitzt. Eine Gruppe ist sicher dann auflösbar, wenn eine ihrer Ableitungen gleich 1 ist. Doch ist die Umkehrung nicht richtig. Eine Gruppe mit Maximalbedingung ist aber, wie man sich leicht überzeugt, dann und nur dann auflösbar, wenn eine ihrer Ableitungen gleich 1 ist. Dies legt es nahe, den Beweis des MALZEWschen Satzes in zwei Teile zu zerlegen, nämlich in die Beweise der folgenden beiden Resultate.

Satz A: Ist eine Ableitung der Gruppe G gleich 1 und jede abelsche Untergruppe von G endlich erzeugbar, so ist jede Untergruppe von G endlich erzeugbar.

Satz B: Ist die Gruppe G auflösbar und jede abelsche Untergruppe von G endlich erzeugbar, so ist eine Ableitung von G gleich 1.

Diese Sätze A und B werden wir im § 5 aus Sätzen über Automorphismengruppen herleiten; und zwar wird sich Satz A durch eine naheliegende Induktion aus folgendem Resultat ergeben.

Satz A': Abelsche Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen sind endlich erzeugbar.

Es sei gleich darauf hingewiesen, daß dieser Satz A' sich ohne große Mühe aus dem DIRICHLETSchen Einheitensatz gewinnen läßt. Satz B dagegen — und dies ist beweistechnisch nicht ohne Interesse — ergibt sich aus Satz A und dem folgenden

Satz B': Ist Φ eine auflösbare Automorphismengruppe der auflösbaren Gruppe G mit Maximalbedingung, so ist eine Ableitung von Φ gleich 1 und die abelschen Untergruppen von Φ sind endlich erzeugbar.

Die Hauptschwierigkeiten beim Beweise dieser Sätze über Automorphismengruppen ergeben sich bei der Untersuchung einer speziellen Klasse

von Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges, die wir als semi-primitiv bezeichnen wollen. Wir werden im § 2 zeigen, daß Normalteiler semi-primitiver Automorphismengruppen semi-primitiv sind, daß semi-primitive Automorphismengruppen in ihren abelschen Normalteilern endliche Automorphismengruppen induzieren, und daß ihre abelschen Torsionsuntergruppen endlich sind. Den § 3 widmen wir dann der Herleitung von auch an sich interessanten Kriterien für die Existenz auflösbarer und abelscher Untergruppen von endlichem Index, die wir dann im § 4 dazu benutzen, um zu zeigen, daß auflösbare semi-primitive Automorphismengruppen abelsche Untergruppen von endlichem Index besitzen (und das ist mehr als zum Beweis von Satz B' nötig ist).

Die folgende Darstellung ist unabhängig von den Abhandlungen von MALZEW und SMIRNOW zu lesen.

Bezeichnungen.

Sind X und Y Teilmengen einer Gruppe G , so ist $[X, Y]$ die von den Kommutatoren $x^{-1}y^{-1}xy$ für x in X und y in Y erzeugte Untergruppe von G . Die Untergruppen iG und $G^{(i)}$ der Gruppe G werden induktiv folgendermaßen definiert:

$${}^0G = G = G^{(0)}, \quad {}^{i+1}G = [G, {}^iG], \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}];$$

insbesondere ist ${}^1G = G'$ die Kommutatorgruppe von G . $Z(G)$ = Zentrum von G . Torsionsgruppen sind frei von Elementen unendlicher Ordnung, während torsionsfreie Gruppen keine von 1 verschiedenen Elemente endlicher Ordnung enthalten.

Die Komposition der Gruppenelemente werden wir meistens als Multiplikation bezeichnen; jedoch werden wir die additive Schreibweise bei Gruppen, die durchaus nicht kommutativ zu sein brauchen, vorziehen, deren Automorphismengruppen gerade den Hauptgegenstand der Untersuchung bilden.

1. Ringe endlichen Ranges.

Alle in diesem Abschnitt behandelten Ringe sind kommutativ und besitzen ein Einselement 1. Weiter wird es bequem sein zu sagen, daß R ein Ring endlichen Ranges ist, wenn die Additionsgruppe R_+ von R eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist. Wir erinnern daran, daß die torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Rang hat, wenn sie eine endlich erzeugbare Untergruppe U derart besitzt, daß A/U eine Torsionsgruppe ist. Entsprechend wollen wir sagen, daß das Ideal J in dem Ringe R ein Ideal endlichen Ranges ist, wenn der Rang des Ringes R/J endlich ist. Diesen Begriff werden wir fast nur auf Primideale anwenden; dabei sei unter einem Primideal ein Ideal J in R derart verstanden, daß R/J nullteilerfrei, d. h. ein Integritätsbereich ist — z. B. ist die Null ein Primideal endlichen Ranges im Ringe der ganzen Zahlen. Das Ziel der Betrachtungen dieses Abschnitts ist der Beweis der folgenden einfachen Tatsache.

Satz: *Läßt sich die Null des kommutativen Ringes R als Durchschnitt endlich vieler Primideale endlichen Ranges darstellen, so sind Automorphismengruppe und Einheitswurzelgruppe von R beide endlich.*

Dem Beweise dieses Satzes seien die Beweise einiger Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz 1: *Ist 0 der Durchschnitt der endlich vielen Primideale J_1, \dots, J_n des kommutativen Ringes R , so enthält jedes Primideal von R eines der Ideale J_i .*

Der einfache Beweis dieses wohlbekannten Satzes sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen kurz angedeutet. Enthielte nämlich das Primideal J keines der Ideale J_i , so gäbe es in jedem J_i ein nicht in J enthaltenes Element r_i . Das Produkt $r_1 \dots r_n$ liegt dann im Durchschnitt 0 der Ideale J_i und gehört also insbesondere zu J . Haben wir nun etwa schon gezeigt, daß $r_1 \dots r_i r_{i+1}$ zu J gehört, so bedenken wir, daß J ein Primideal ist und daß r_{i+1} nicht zu J gehört. Es folgt, daß $r_1 \dots r_i$ zu J gehört. Induktion ergibt, daß r_1 zu J gehört. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 1.

Bemerkung 1: Aus Hilfssatz 1 läßt sich folgern, daß ein Ring der hier betrachteten Art nur endlich viele minimale Primideale besitzt, und daß der Durchschnitt aller minimalen Primideale gleich 0 ist.

Hilfssatz 2: *Ist R ein Integritätsbereich endlichen Ranges, so ist 0 das einzige Primideal endlichen Ranges in R , R ist ein Teilring eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, und Automorphismengruppe wie Einheitswurzelgruppe von R sind beide endlich.*

Beweis: Ist $J \neq 0$ ein Ideal in R , so gibt es ein Element $j \neq 0$ in J . Aus der Nullteilerfreiheit von R folgt, daß die Abbildung des Elements r in R auf das Element rj in J einen Isomorphismus der Additionsgruppe R_+ in die Additionsgruppe J_+ darstellt. Die torsionsfreien abelschen Gruppen J_+ und R_+ haben also denselben endlichen Rang; und daraus folgt, daß R_+/J_+ eine Torsionsgruppe ist. Dann ist aber J kein Primideal endlichen Ranges; und damit haben wir gezeigt, daß 0 das einzige Primideal endlichen Ranges in R ist.

Aus der Endlichkeit des Ranges der torsionsfreien abelschen Gruppe R_+ folgern wir die Existenz endlich vieler Elemente r_1, \dots, r_n in R derart, daß $R_+/\{r_1, \dots, r_n\}$ eine Torsionsgruppe ist. Also gibt es zu jedem Element r in R eine positive ganze Zahl e und ganze Zahlen c_i derart, daß $er = c_1 r_1 + \dots + c_n r_n$ ist. Aus der Torsionsfreiheit von R_+ folgt nun, daß $r = d_1 r_1 + \dots + d_n r_n$ ist, wo $d_i = e^{-1} c_i$ rational ist. Damit ist aber gezeigt, daß R in einer endlichen algebraischen Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen enthalten ist, also ein Teilring eines endlichen algebraischen Zahlkörpers ist. Aus dieser Tatsache folgert man schließlich mühelos, daß R nur endlich viele Automorphismen und Einheitswurzeln besitzt, q.e.d.

Beweis des Satzes: Nach Voraussetzung gibt es endlich viele Primideale endlichen Ranges: J_1, \dots, J_k , deren Durchschnitt gleich 0 ist. Ist e eine Einheitswurzel unseres Ringes R , so ist $J_i + e$ eine Einheitswurzel des Integritätsbereichs endlichen Ranges R/J_i . Es folgt aus Hilfssatz 2, daß R/J_i nur endlich viele Einheitswurzeln enthält; und folglich gibt es nur endlich viel verschiedene Einheitswurzeln der Form $J_i + e$ für $i = 1, \dots, k$. Da aber $e = 1$ modulo J_i für $i = 1, \dots, k$ nach sich zieht, daß $e = 1$ ist, so sieht man, daß R selbst nur endlich viele Einheitswurzeln enthält.

Es sei Φ die Gruppe aller Automorphismen von R . Ist σ ein Automorphismus von R , so ist J_i^σ ein Primideal endlichen Ranges von R . Aus Hilfssatz 1 folgern wir die Existenz eines Index j derart, daß $J_j \leq J_i^\sigma$ ist. Da R/J

ein Integritätsbereich endlichen Ranges und J_i^2/J_i ein Primideal endlichen Ranges in R/J_i ist, so folgt aus Hilfssatz 2, daß $J_i^2/J_i = 0$ oder $J_i^2 = J_i$ ist. Damit ist gezeigt, daß jeder Automorphismus σ in der Menge der J_i eine Permutation bewirkt.

Wir bezeichnen nun mit Θ die Menge der Automorphismen σ von R , die $J_i^2 = J_i$ für $i = 1, \dots, k$ erfüllen. Man sieht sofort, daß Θ ein Normalteiler von Φ ist, und daß Φ/Θ im wesentlichen mit einer Gruppe von Permutationen der endlich vielen Primideale J_1, \dots, J_k identisch ist. Folglich ist auch Φ/Θ endlich.

Sei Θ_i die Gesamtheit der Automorphismen in Θ , die in R/J_i die Identität induzieren. Dann ist Θ_i ein Normalteiler von Θ und Θ/Θ_i ist im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von R/J_i identisch, da ja Automorphismen aus Θ jedes J_i in sich überführen und also in R/J_i Automorphismen induzieren. Da aber R/J_i ein Integritätsbereich endlichen Ranges ist, so gibt es nach Hilfssatz 2 nur endlich viele Automorphismen von R/J_i . Also ist Θ/Θ_i endlich.

Aus dem Satz von POINCARÉ folgt nun auch die Endlichkeit von $\Theta/(\Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_k)$. Gehört aber σ dem Durchschnitt der Θ_i an, so gilt $\sigma^r \equiv r$ modulo J_i für $i = 1, \dots, k$. Also liegt $\sigma^r - r$ im Durchschnitt 0 der Ideale J_i , woraus $\sigma = 1$ folgt. Also ist $\Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_k = 1$. Damit haben wir aber gezeigt, daß Θ und Φ/Θ endlich sind, woraus nun auch die Endlichkeit von Φ folgt, q.e.d.

Bemerkung 2: Wenn die Null des kommutativen Ringes R sich als Durchschnitt endlich vieler Primideale endlichen Ranges darstellen läßt, so sieht man leicht ein, daß R_+ eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist und daß R keine von 0 verschiedenen nilpotenten Elemente enthält.

2. Semi-primitive Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges.

Wir beginnen mit der Definition der primitiven Automorphismengruppen, die auf unsere speziellen Zwecke zugeschnitten ist.

Definition 1: Die Automorphismengruppe Φ der abelschen Gruppe A ist primitiv, wenn 0 die einzige Φ -zulässige Untergruppe von A mit torsionsfreier Faktorgruppe ist.

Es ist klar, daß jede Automorphismengruppe abelscher Torsionsgruppen primitiv ist; ist aber Φ eine primitive Automorphismengruppe der abelschen Gruppe A , die keine Torsionsgruppe ist, so sieht man leicht ein, daß A torsionsfrei ist. Folglich kann unsere Definition nur auf Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen sinnvoll angewandt werden.

Lemma 1: Ist Φ eine primitive Automorphismengruppe der abelschen Gruppe A und $S \neq 0$ eine Φ -zulässige Untergruppe von A , so ist A/S eine Torsionsgruppe.

Beweis: Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in A/S bildet eine Torsionsuntergruppe T/S von A/S . Da S eine Φ -zulässige Untergruppe

von A ist, so ist auch T eine Φ -zulässige, von 0 verschiedene Untergruppe von A . Da Φ primitiv ist, so ist A/T nicht torsionsfrei. Aus der Konstruktion von T ergibt sich aber die Torsionsfreiheit von A/T . Also ist $A/T = 0$, so daß $A/S = T/S$ eine Torsionsgruppe ist.

Lemma 2: Ist Φ eine primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A , so ist 0 der einzige Endomorphismus von A , der eine von 0 verschiedene, Φ -zulässige Untergruppe von A auf 0 abbildet.

Bemerkung: Diese Eigenschaft primitiver Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen ist für viele unserer Zwecke ausreichend. Man kann aber leicht Beispiele konstruieren, die zeigen, daß die Umkehrung von Lemma 2 falsch ist.

Beweis: Ist $S \neq 0$ eine Φ -zulässige Untergruppe von A , so ist A/S eine Torsionsgruppe (Lemma 1). Ein S auf 0 abbildender Endomorphismus von A bildet also A auf eine Torsionsuntergruppe von A ab, die wegen der Torsionsfreiheit von A notwendig gleich 0 ist, q.e.d.

Lemma 3: Ist Φ eine Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges und haben alle von 0 verschiedenen, Φ -zulässigen Untergruppen von A denselben Rang wie A , so ist Φ primitiv.

Dies folgt sofort daraus, daß A/S eine Torsionsgruppe ist, falls A und S denselben endlichen Rang haben.

Lemma 4: Ist Φ eine abelsche und primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A , so ist der von Φ erzeugte Endomorphismenring E von A ein Integritätsbereich, dessen Additionsgruppe E_+ einer Untergruppe von A isomorph ist.

Beweis: Aus der Kommutativität von Φ folgt sofort die von E . Ist K der Kern des Endomorphismus $\sigma \neq 0$ in E , so folgt aus der Kommutativität von E , daß $K\Phi\sigma = K\sigma\Phi = 0$ ist. Also ist $K\Phi \leq K$ und mithin auch $K\Phi = K$. Folglich ist K eine Φ -zulässige Untergruppe von A , die von dem Endomorphismus $\sigma \neq 0$ auf 0 abgebildet wird. Wir folgern $K = 0$ aus der Primitivität von Φ und Lemma 2. Also gilt:

(+) Ist σ in E , a in A und $a\sigma = 0$, so ist $a = 0$ oder $\sigma = 0$.

Hieraus ergibt sich sofort die Nullteilerfreiheit von E , so daß also E ein Integritätsbereich ist. — Ist weiter $t \neq 0$ ein Element in A , so bilden wir das Element σ in E auf das Element $t\sigma$ in A ab. Es ist klar, daß dies ein Homomorphismus der Additionsgruppe E_+ von E auf die Untergruppe tE von A ist; und es folgt aus (+), daß dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Also ist E_+ der Untergruppe tE von A isomorph, q.e.d.

Folgerung 1: Ist Φ eine abelsche und primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges, so ist der von Φ erzeugte Endomorphismenring von A ein Integritätsbereich endlichen Ranges.

Dies folgt sofort aus dem Lemma 4, wenn man nur bedenkt, daß Untergruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges ebenfalls torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges sind.

Definition 2: Die Automorphismengruppe Φ der abelschen Gruppe A ist *semi-primitiv*, wenn es ein endliches System von 0 verschiedener, Φ -zulässiger Untergruppen S_1, \dots, S_k von A derart gibt, daß

- (a) Φ in jedem S_i eine primitive Automorphismengruppe induziert und
- (b) $A / \sum_{i=1}^k S_i$ eine Torsionsgruppe ist.

Wir werden ein solches Untergruppensystem S_1, \dots, S_k stets als Φ -Zerlegung von A bezeichnen.

Ist Φ eine primitive Automorphismengruppe von A , so ist A eine Φ -Zerlegung von A und Φ also semi-primitiv. Wie bei der Definition der Primitivität bemerkt man, daß unsere Definition nur für torsionsfreie Gruppen A bedeutungsvoll ist.

Lemma 5: Ist Φ eine semi-primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A und S_1, \dots, S_k eine Φ -Zerlegung von A , so ist

(b') 0 der einzige, $S_i \sigma = 0$ für $i = 1, \dots, k$ erfüllende Endomorphismus σ von A und

(b'') 1 der einzige jedes Element in jedem S_i invariant lassende Endomorphismus von A .

Beweis: Bildet der Endomorphismus σ jedes S_i auf 0 ab, so auch $\sum_{i=1}^k S_i$.

Da aber $A / \sum_{i=1}^k S_i$ eine Torsionsgruppe ist [Definition 2, (b)], so ist $A\sigma$ eine Torsionsuntergruppe der torsionsfreien Gruppe A . Also ist $A\sigma = 0$ oder $\sigma = 0$, womit (b') erwiesen ist. — Die Äquivalenz von (b') und (b'') sieht man ein, wenn man nur bedenkt, daß σ dann und nur dann jedes S_i auf 0 abbildet, wenn $1 - \sigma$ jedes Element in jedem S_i invariant läßt.

Bemerkung: Wieder sei auf die Wichtigkeit der Eigenschaften (b') und (b'') hingewiesen. Es scheint aber, daß es nicht ausreicht, (b) durch (b') zu ersetzen; siehe besonders den Beweis von Lemma 6.

Lemma 6: Ist Θ ein Normalteiler der semi-primitiven Automorphismengruppe Φ der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges, so ist Θ semi-primitiv.

Beweis: Es existiert eine endliche Φ -Zerlegung S_1, \dots, S_k von A . Dann ist jedes S_i (als Untergruppe von A) eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges; und jedes S_i ist Φ -zulässig und also auch Θ -zulässig. Weiter induziert Φ in jedem S_i eine primitive Automorphismengruppe und $A / \sum_{i=1}^k S_i$ ist eine Torsionsgruppe.

Wir betrachten eine der Komponenten S_i unserer Φ -Zerlegung von A . Es gibt von 0 verschiedene, Θ -zulässige Untergruppen von S_i , z. B. S_i selbst; und jede von diesen hat einen wohlbestimmten positiven Rang. Unter all diesen positiven Rängen gibt es einen kleinsten m (der natürlich von i abhängt). Dann gibt es also Θ -zulässige Untergruppen von S_i , deren Rang m ist; und diese wollen wir der Kürze halber als m - Θ -Untergruppen von S_i bezeichnen.

Ist X eine m - Θ -Untergruppe von S_i und σ ein Automorphismus in Φ , so ist der Rang von $X\sigma$ natürlich auch m . Da Θ ein Normalteiler von Φ ist, so gilt weiter

$$X\sigma\Theta = X\sigma\Theta\sigma^{-1}\sigma = X\Theta\sigma = X\sigma \leq S_i\sigma = S_i,$$

so daß Automorphismen in Φ also m - Θ -Untergruppen von S_i auf m - Θ -Untergruppen von S_i abbilden.

Ist X eine m - Θ -Untergruppe von S_i , so folgt aus der Minimalität von m , daß von 0 verschiedene, Θ -zulässige Untergruppen von X denselben Rang wie X haben. Es folgt aus Lemma 3, daß Θ in X eine primitive Automorphismengruppe induziert.

Sei nun S_i^* die Summe aller m - Θ -Untergruppen von S_i . Wir folgern $S_i^* \neq 0$ aus der Existenz von m - Θ -Untergruppen von S_i . Da Automorphismen aus Φ die m - Θ -Untergruppen von S_i untereinander permutieren, so ist $S_i^*\Phi = S_i^*$. Da aber Φ in jedem S_i eine primitive Automorphismengruppe induziert, so ergibt sich jetzt aus Lemma 1, daß S_i/S_i^* eine Torsionsgruppe ist.

Wir betrachten nun alle Summen endlich vieler m - Θ -Untergruppen von S_i . Da der Rang einer jeden dieser Summen den endlichen Rang von S_i nicht überschreiten kann, so gibt es unter diesen eine T_i maximalen Ranges. Wir bemerken, daß

$$T_i = \sum_{j=1}^{n(i)} S_{i,j}$$

ist, wo jedes $S_{i,j}$ eine m - Θ -Untergruppe von S_i ist und also jedes $S_{i,j}$ eine von 0 verschiedene Θ -zulässige Untergruppe von A ist, in der Θ eine primitive Automorphismengruppe induziert.

Ist wieder X irgendeine m - Θ -Untergruppe von S_i , so folgt aus der Maximalität des Ranges von T_i , daß T_i und $T_i + X$ denselben endlichen Rang haben. Dann ist aber $(T_i + X)/T_i$ eine Torsionsgruppe. Da S_i^* die Summe aller dieser m - Θ -Untergruppen X von S_i ist, so folgt, daß S_i^*/T_i eine Torsionsgruppe ist. Nun haben wir früher gezeigt, daß S_i/S_i^* eine Torsionsgruppe ist. Also ist auch S_i/T_i eine Torsionsgruppe; und hieraus folgt weiter, daß

$$\sum_{i=1}^k S_i / \sum_{i=1}^k T_i$$

eine Torsionsgruppe ist. Wir haben aber im Anfang gezeigt, daß $A / \sum_{i=1}^k S_i$ eine Torsionsgruppe ist. Folglich ist auch

$$A / \sum_{i=1}^k T_i = A / \sum_{i,j} S_{i,j}$$

eine Torsionsgruppe; und damit haben wir gezeigt, daß die endlich vielen Untergruppen $S_{i,j}$ eine Θ -Zerlegung von A bilden, und daß also Θ semiprimitiv ist.

Satz 1: Es sei Φ eine abelsche und semi-primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges. Dann gilt:

(a) Die Torsionsuntergruppe von Φ ist endlich.

(b) Ist Φ Normalteiler der Automorphismengruppe Γ von A , so hat der Zentralisator von Φ in Γ endlichen Index in Γ .

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine endliche Φ -Zerlegung S_1, \dots, S_k von A . Weiter bilden wir den von Φ erzeugten Endomorphismenring E von A . Aus der Kommutativität von Φ folgt die von E .

Wir bezeichnen mit E_i die Gesamtheit der Endomorphismen in E , die S_i auf 0 abbilden. Es ist klar, daß jedes E_i ein Ideal in E ist; und es folgt aus Lemma 5, (b'), daß

$$0 = E_1 \cap \dots \cap E_k$$

ist. Weiter ist klar, daß jeder Endomorphismus in E die Φ -zulässige Untergruppe S_i in sich abbildet, und daß also E/E_i im wesentlichen mit dem Endomorphismenring von S_i identisch ist, der von $E_i\Phi/E_i$ erzeugt wird. Weiter sieht man ein, daß $E_i\Phi/E_i$ im wesentlichen mit der von Φ in S_i induzierten Automorphismengruppe identisch ist. Die letztere ist aber eine primitive Automorphismengruppe, da ja die S_i eine Φ -Zerlegung bilden. Da Φ abelsch ist und da S_i (als Untergruppe von A) eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so ergibt sich aus Folgerung 1, daß

E/E_i ein Integritätsbereich endlichen Ranges ist.

Wir können nun den Satz aus § 1 anwenden und finden, daß die Einheitswurzelgruppe wie auch die Automorphismengruppe von E beide endlich sind.

Die Torsionsuntergruppe von Φ ist natürlich in der Einheitswurzelgruppe von E enthalten; und aus der Endlichkeit der letzteren folgt auch die Endlichkeit der Torsionsuntergruppe von Φ .

Da Φ ein Normalteiler der Gruppe Γ von Automorphismen von A ist, so induziert jedes Element aus Γ in E einen Automorphismus; und das Element γ aus Γ induziert dann und nur dann die Identität in E , wenn es mit allen Elementen aus Φ vertauschbar ist, d. h. wenn γ zum Zentralisator Θ von Φ in Γ gehört. Es folgt, daß Θ ein (Φ enthaltender) Normalteiler von Γ ist, und daß Γ/Θ im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von E identisch ist. Da Automorphismengruppen von E endlich sind, so ist also auch Γ/Θ endlich, q.e.d.

Folgerung 2: Ist Θ ein abelscher Normalteiler der semi-primitiven Automorphismengruppe Φ der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges, so ist der Index des Zentralisators von Θ in Φ endlich.

Dies folgt sofort aus Lemma 6 und Satz 1.

Hilfssatz 1: Ist σ ein Automorphismus endlicher Ordnung der torsionsfreien abelschen Gruppe A und ist $(\sigma - 1)^n = 0$ für positives n , so ist $\sigma = 1$.

Beweis: Es existiert eine kleinste positive Zahl m derart, daß $(\sigma - 1)^m = 0$ ist. Wäre $m \neq 1$, so bilden wir die Untergruppe

$$S = A(\sigma - 1)^{m-2}$$

von A . Es ist klar, daß σ in S einen Automorphismus endlicher Ordnung $i \neq 1$ induziert und daß $S(\sigma - 1)^2 = 0 \neq S(\sigma - 1)$ ist. Ist nun s ein beliebiges Element in S , so ist $s(\sigma - 1)^2 = 0$; und es wird also $s(\sigma - 1)\sigma = s(\sigma - 1)$. Man sieht dann, daß

$$\begin{aligned} s\sigma &= s + s(\sigma - 1), \quad s\sigma^i = s + is(\sigma - 1), \\ s &= s\sigma^i = s + is(\sigma - 1) \quad \text{oder} \quad is(\sigma - 1) = 0 \end{aligned}$$

ist; und daraus folgt $s(\sigma - 1) = 0$ wegen der Torsionsfreiheit von A . Folglich ist $A(\sigma - 1)^{m-1} = S(\sigma - 1) = 0$; und aus diesem Widerspruch mit unserer Wahl von m folgt $m = 1$ oder $\sigma = 1$, q.e.d.

Folgerung 3: Ist Φ eine abelsche Torsionsgruppe von Automorphismen der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges, so ist Φ endlich.

Beweis: Sind S und T Untergruppen von A derart, daß $S < T$ und T/S torsionsfrei ist, so folgt aus der Endlichkeit des Ranges von A , daß auch die Ränge von S und T endlich sind und daß der Rang von S kleiner ist als der von T . Folglich gibt es eine längste, endliche Kette von Untergruppen A_i von A mit folgenden Eigenschaften:

$$0 = A_0 < \cdots < A_n = A,$$

A/A_i ist torsionsfrei und A_i ist Φ -zulässig.

Wir bezeichnen mit Φ_i die Gesamtheit der Automorphismen aus Φ , die in A_{i+1}/A_i die Identität induzieren. Dann ist Φ/Φ_i im wesentlichen mit der von Φ in A_{i+1}/A_i induzierten Automorphismengruppe identisch, die natürlich ebenfalls eine abelsche Torsionsgruppe ist. Wir bemerken weiter, daß A_{i+1}/A_i eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist. Ist S eine Φ -zulässige Untergruppe von A derart, daß $A_i < S < A_{i+1}$ ist, so folgt aus der maximalen Länge unserer Kette A_i , daß A/S nicht torsionsfrei ist. Da aber A/A_{i+1} torsionsfrei ist, so kann A_{i+1}/S nicht torsionsfrei sein. Es folgt aus Definition 1, daß Φ in A_{i+1}/A_i eine primitive Automorphismengruppe induziert. Da diese primitive Automorphismengruppe einer torsionsfreien abelschen Gruppe endlichen Ranges im wesentlichen mit der abelschen Torsionsgruppe Φ/Φ_i identisch ist, so ergibt sich die Endlichkeit aller Φ/Φ_i aus Satz 1. Hieraus folgt aber auch die Endlichkeit von $\Phi/[\Phi_0 \cap \cdots \cap \Phi_{n-1}]$. Gehört schließlich σ zu $\Phi_0 \cap \cdots \cap \Phi_{n-1}$, so überzeugt man sich sofort, daß $(\sigma - 1)^n = 0$ ist. Da die Ordnung des Automorphismus σ endlich ist, so folgt $\sigma = 1$ aus Hilfssatz 1. Also ist $\Phi_0 \cap \cdots \cap \Phi_{n-1} = 1$; und damit ist die Endlichkeit von Φ erwiesen.

3. Gruppen mit abelschen Untergruppen von endlichem Index.

Im Zentrum der Betrachtungen dieses Abschnitts stehen Kriterien für die Existenz abelscher Untergruppen von endlichem Index. Um diese Kriterien anwenden zu können, bedarf es einer Diskussion der auflösbaren Gruppen und allgemeiner der Gruppen, die eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzen.

Definition 1: Die Gruppe G ist auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler besitzt.

Man sieht ohne Mühe ein, daß aus $G^{(n)} = 1$ die Auflösbarkeit von G folgt, während man leicht auflösbare Gruppen konstruieren kann, deren sämtliche Ableitungen von 1 verschieden sind. Ist andererseits G eine auflösbare Gruppe, von deren Normalteilern die Maximalbedingung erfüllt wird, so existiert unter den Normalteilern X , die $X^{(i)} = 1$ für geeignetes i erfüllen, ein maximaler M . Dann ist also M ein Normalteiler von G und $M^{(n)} = 1$ für

geeignetes m . Wäre nun $M \neq G$, so besäße das von 1 verschiedene homomorphe Bild G/M der auflösbaren Gruppe G einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler N/M ; und N wäre ein Normalteiler von G , der $M < N$ und $N^{(m+1)} = 1$ im Widerspruch zur Maximalität von M erfüllte. Also ist $G = M$ und $G^{(m)} = 1$.

Es ist klar, daß jedes homomorphe Bild einer auflösbaren Gruppe ebenfalls auflösbar ist. Dagegen bedarf die Tatsache, daß Untergruppen auflösbarer Gruppen selbst auflösbar sind, eines Beweises, den wir kurz angeben wollen: Ist U eine Untergruppe der auflösbaren Gruppe G und N ein von U verschiedener Normalteiler von U , so existiert ein maximaler, $M \cap U < N$ erfüllender Normalteiler M von G . Dann ist G/M ein von 1 verschiedenes homomorphes Bild der auflösbaren Gruppe G ; und wir folgern aus Definition 1 die Existenz eines $W' \leq M < W$ erfüllenden Normalteilers W von G . Aus der Maximalität von M folgt $W \cap U \not\leq N$. Also wird

$$N < N(W \cap U).$$

Weiter ist

$$(W \cap U)' \leq W' \cap U \leq M \cap U \leq N.$$

Also ist $N(W \cap U)/N$ ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler von U/N ; und damit ist die Auflösbarkeit von U argetan.

Die Situation auflösbarer Untergruppen in beliebigen Gruppen scheint recht kompliziert zu sein, wie aus folgender Bemerkung hervorgeht. Ist $N \neq 1$ ein auflösbarer Normalteiler der Gruppe G , so besitzt N einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler, der aber im allgemeinen kein Normalteiler von G sein wird. Ob sich immer ein von 1 verschiedener, in N enthaltener abelscher Normalteiler von G angeben läßt, scheint eine offene Frage zu sein. Für unsere Zwecke ist folgendes Kriterium ausreichend.

Lemma 1: *Ist $N \neq 1$ ein auflösbarer Normalteiler der Gruppe G und G/N endlich, so existiert ein von 1 verschiedener, in N enthaltener abelscher Normalteiler von G .*

Beweis: Es existiert stets ein maximaler abelscher Normalteiler M von N . Aus $N \neq 1$ und der Auflösbarkeit von N folgt $M \neq 1$. Da M ein Normalteiler von N und G/N endlich ist, so hat der Normalisator von M in G , der ja N enthält, endlichen Index in G ; und folglich ist auch die Klasse K der zu M in G konjugierten Untergruppen endlich. Da M ein maximaler abelscher Normalteiler des Normalteilers N von G ist, so ist auch jede zu M konjugierte Untergruppe ein maximaler abelscher Normalteiler von N .

Wäre nun der Durchschnitt der in K enthaltenen Untergruppen gleich 1, so folgte aus der Endlichkeit von K die Existenz einer kleinsten Teilmenge M_1, \dots, M_k von K , deren Durchschnitt gleich 1 ist. Da mit M auch keines der M_i gleich 1 ist, so ist $1 < k$. Da jedes der M_i ein abelscher Normalteiler von N ist, so ist auch $A = M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}$ ein abelscher Normalteiler von N ; und $A \neq 1$ folgt aus der Minimalität der ausgewählten Teilmenge von K , während $A \cap M_k = 1$ ist. Da A und M_k abelsche Normalteiler von N sind, deren Durchschnitt gleich 1 ist, so ist AM_k ein abelscher Normalteiler von N . Aus der Maximalität von M und M_k folgt dann $AM_k = M_k$ oder

$1 = A \cap M_k = A \neq 1$, ein Widerspruch. Folglich ist der Durchschnitt D aller Untergruppen in K von 1 verschieden. Es ist aber klar, daß D ein in M und N enthaltener, abelscher Normalteiler von G ist, q.e.d.

Satz 1: Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent.

(a) G besitzt eine auflösbare charakteristische Untergruppe von endlichem Index.

(b) G besitzt eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index.

(c) G besitzt einen auflösbaren Normalteiler von endlichem Index.

(d) Jedes unendliche homomorphe Bild von G besitzt einen unendlichen Normalteiler mit endlicher Kommutatorgruppe.

Beweis: Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt. — Ist U eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index in G , so besitzt U nur endlich viele konjugierte in G , deren Durchschnitt nach dem Satz von POINCARÉ ein in U enthaltener Normalteiler von endlichem Index in G ist. Da aber Untergruppen auflösbarer Gruppen, wie früher gezeigt, selbst auflösbar sind, so sehen wir, daß auch (c) aus (b) folgt.

Als nächstes nehmen wir die Gültigkeit von (c) an. Ist dann H ein unendliches homomorphes Bild von G , so existiert ein auflösbarer Normalteiler K von H , dessen Index $[H : K]$ endlich ist, da ja homomorphe Bilder auflösbarer Gruppen auflösbar sind. Weiter existiert ein maximaler, abelscher, in K enthaltener Normalteiler N von H . Wäre N unendlich, so wäre wegen $N' = 1$ bereits N der gesuchte unendliche Normalteiler von H , dessen Kommutatorgruppe endlich ist. Wir nehmen also im folgenden an, daß N endlich ist.

Der Zentralisator N^* von N in H ist ein N enthaltender Normalteiler von H ; und H/N^* ist endlich, da ja H/N^* im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von N identisch ist. Da H/K endlich ist, so ist $K \cap N^*$ ein N enthaltender Normalteiler von H mit endlicher Faktorgruppe $H/(K \cap N^*)$. Aus der Endlichkeit von N und $H/(K \cap N^*)$ und der Unendlichkeit von H folgt die Unendlichkeit von $(K \cap N^*)/N$.

Unter den in $(K \cap N^*)/N$ enthaltenen abelschen Normalteilern von H/N existiert ein maximaler M/N . Die Kommutatorgruppe M' von M ist in N enthalten; und aus der Endlichkeit von N folgt die von M' . Wir wollen zeigen, daß M unendlich ist — dies genügt zur Verifizierung von (d) — und nehmen also an, daß M endlich ist. Dann ist der Zentralisator M^* von M in H ein Normalteiler von H mit endlicher Faktorgruppe H/M^* . Da M im Zentralisator N^* von N enthalten ist, so ist $N \leq M^*$. Folglich ist

$$N \leq M \cap M^* = Z(M) \leq M \leq K \cap N^* \leq K.$$

Da $Z(M)$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers M von H ein abelscher Normalteiler von H ist und da N ein maximaler abelscher, in K enthaltener Normalteiler von H ist, so wird

$$N = Z(M) = M \cap M^*.$$

Unter den $M \leq X \leq K$ und $N = M^* \cap X$ erfüllenden Normalteilern X von H existiert ein maximaler, den wir mit W bezeichnen wollen. Aus $N \leq M$

folgt $M^* \leq N^*$ und aus der Endlichkeit von H/M^* folgt also die Endlichkeit von $(K \cap N^*)/(K \cap M^*)$. Aus der Unendlichkeit von $(K \cap N^*)/N$ ergibt sich also die Unendlichkeit von

$$(K \cap M^*)/N = (K \cap M^*)/(W \cap M^*) \cong W(K \cap M^*)/W \leq K/W.$$

Als homomorphes Bild der auflösbaren Gruppe K ist K/W eine unendliche auflösbare Gruppe. Da K/W ein Normalteiler von endlichem Index in H/W ist, so ergibt sich aus Lemma 1 die Existenz eines von 1 verschiedenen, in K/W enthaltenen, abelschen Normalteilers V/W von H/W . Der Normalteiler V von H erfüllt also

$$V' \leq W < V \leq K.$$

Aus der Maximilität von W folgt dann

$$N = Z(M) = M \cap M^* = W \cap M^* < V \cap M^*.$$

Wäre nun $M = M(V \cap M^*)$, so wäre $V \cap M^* \leq M$ und also

$$N < V \cap M^* = V \cap M^* \cap M = V \cap M^* \cap W = M^* \cap W = N,$$

ein Widerspruch, der

$$M < M(V \cap M^*)$$

nach sich zieht. Weiter haben wir

$$M(V \cap M^*) \leq K \cap N^*;$$

und schließlich wird

$$\begin{aligned} [M(V \cap M^*)]' &= M'[M, V \cap M^*](V \cap M^*)' = M'(V \cap M^*)' \\ &\leq N(V' \cap M^*) \leq N(W \cap M^*) = N, \end{aligned}$$

da ja M^* der Zentralisator von M , M/N abelsch und $W \cap M^* = N$ ist. Damit haben wir aber gezeigt, daß $M(V \cap M^*)/N$ ein in $(K \cap N^*)/N$ enthaltener abelscher Normalteiler von H/N ist, der größer als M/N ist; und dies widerspricht der Maximalität von M/N . Aus diesem Widerspruch ergibt sich die gewünschte Unendlichkeit von M ; und damit haben wir gezeigt, daß (d) aus (e) folgt.

Dem Beweis, daß (a) aus (d) folgt, schicken wir einige Betrachtungen voraus, die von der Annahme (d) unabhängig sind. Wir betrachten alle Normalteiler N von G mit der Eigenschaft:

(e) Ist X ein Normalteiler von G und $X < N$, so existiert ein $Y' \leq X < Y \leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G . [Man könnte diese Eigenschaft (e) als auflösbare Einbettbarkeit des Normalteilers N in G bezeichnen.]

Das Produkt aller Normalteiler N mit der Eigenschaft (e) ist eine charakteristische Untergruppe P von G . Wir werden zwei für uns wichtige Eigenschaften von P herleiten.

(f) Ist U ein Normalteiler von G und $U' \leq P \leq U$, so hat U die Eigenschaft (e) und $P = U$.

Um zu zeigen, daß U die Eigenschaft (e) hat, betrachten wir einen $N < U$ erfüllenden Normalteiler N von G und unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $P \leq N$.

Da P das Produkt aller (e) erfüllenden Normalteiler von G ist, und da P nicht in N enthalten ist, so gibt es einen (e) erfüllenden Normalteiler X von G , der nicht in N enthalten ist. Dann ist $N \cap X < X$. Da $N \cap X$ ein Normalteiler von G ist, so folgt aus (e) die Existenz eines Normalteilers Y von G derart, daß $Y' \leq N \cap X < Y \leq X$ ist. Zunächst ist dann $NY \leq NX \leq NP \leq U$. Wäre $N = NY$, so wäre $Y \leq N$ oder $N \cap X < Y \leq N \cap X$, eine Unmöglichkeit, aus der $N < NY$ folgt. Schließlich ist $(NY)' \leq NY' = N$; und wir sehen, daß NY ein die Ungleichungen $(NY)' \leq N < NY \leq U$ erfüllender Normalteiler von G ist.

Fall 2: $P \leq N$.

In diesem Falle wird nach Voraussetzung $U' \leq P \leq N < U$; und U selbst leistet das ad (e) verlangte.

Damit haben wir aber gezeigt, daß U die Eigenschaft (e) hat. Aus der Definition von P folgt nun $U \leq P \leq U$ oder $U = P$, womit (f) voll bewiesen ist.

(g) P hat die Eigenschaft (e) und ist auflösbar.

Daß P die Eigenschaft (e) hat, folgt aus (f), wenn wir dort $P = U$ setzen. Um die Auflösbarkeit von P einzusehen, betrachten wir einen von P verschiedenen Normalteiler N von P und bilden das Produkt M aller in N enthaltenen Normalteiler von G . Dann ist M selbst ein in N enthaltener Normalteiler von G und also $M \leq N < P$. Da P die Eigenschaft (e) hat, so existiert ein Normalteiler R von G derart, daß $R' \leq M < R \leq P$ ist. Aus der Konstruktion von M folgt, daß der Normalteiler R nicht in N enthalten ist und daß also

$$R' \leq M \leq N < NR \leq P$$

ist. Also ist NR/N ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler von P/N , woraus die Auflösbarkeit von P (im Sinne der Definition 1) folgt.

Wir nehmen jetzt an, daß G der Bedingung (d) genügt. Aus (g) folgt, daß P eine auflösbare charakteristische Untergruppe von G ist. Angenommen, G/P wäre unendlich. Dann folgt aus (d) die Existenz eines unendlichen Normalteilers W/P von G/P , dessen Kommutatorgruppe PW'/P endlich ist. Der Zentralisator V/P von PW'/P ist ein Normalteiler von G/P , dessen Index $[G:V]$ endlich ist. Da $Z(PW'/P) = (V \cap PW')/P$ ein abelscher Normalteiler von G/P ist, so ist $V \cap PW'$ ein Normalteiler von G , der $(V \cap PW')' \leq P \leq V \cap PW'$ erfüllt. Aus (f) folgt nun

$$P = V \cap PW'.$$

Weiter ist $W \cap V$ ein Normalteiler von G , der den Ungleichungen

$$(W \cap V)' \leq W' \cap V \leq V \cap PW' = P \leq W \cap V$$

genügt; und wir folgern

$$P = W \cap V$$

aus (f). Aus der Endlichkeit von G/V folgt die von $W/(W \cap V) = W/P$; und dies widerspricht unserer Wahl von W . Damit sind wir zu einem Wider-

spruch geführt worden, aus dem sich die Endlichkeit von G/P ergibt. Also ist (a) eine Folge von (d), q.e.d.

Definition 2: $E(G)$ ist die Gesamtheit der Elemente in der Gruppe G , die in G nur endlich viele konjugierte besitzen.

Daß die Teilmenge $E(G)$ von G sogar eine charakteristische Untergruppe von G ist, haben wir an anderer Stelle gezeigt; siehe BAER [1; p. 1023, § 2, Proposition 1]. Die Wichtigkeit dieses Begriffs für unsere Zwecke erhellt aus folgender Tatsache.

Lemma 2: Besitzt die Gruppe G abelsche Untergruppen von endlichem Index, so ist $G/Z[E(G)]$ endlich.

Beweis: Ist U eine abelsche Untergruppe von endlichem Index $[G:U]$, so liegt U im Zentralisator eines jeden Elements aus U . Da also die Zentralisatoren von Elementen aus U in G endlichen Index haben, so besitzen Elemente aus G nur endlich viele konjugierte in G , gehören mithin zu $E(G)$. Folglich ist $U \leq E(G)$ und aus der Endlichkeit von $[G:U]$ folgt die von $[G:E(G)]$.

Da mit $[G:U]$ auch $[E(G):U]$ endlich ist, so existiert ein endliches Repräsentantensystem r_1, \dots, r_k von $E(G)$ modulo U ; und folglich ist $E(G) = \{U, r_1, \dots, r_k\}$. Da r_i zu $E(G)$ gehört, so hat r_i nur endlich viele konjugierte in G ; und der Zentralisator r_i^* von r_i hat endlichen Index in G . Der Zentralisator U^* von U in G enthält U ; und aus der Endlichkeit von $[G:U]$ folgt die von $[G:U^*]$. Ist $E(G)^*$ der Zentralisator von $E(G)$ in G , so folgt

$$E(G)^* = U^* \cap r_1^* \cap \dots \cap r_k^*$$

aus $E(G) = \{U, r_1, \dots, r_k\}$. Aus dem POINCARÉschen Satz und der Endlichkeit der endlich vielen Indices $[G:U^*]$, $[G:r_i^*]$ folgt nun die Endlichkeit von $[G:E(G)^*]$. Da aber $Z[E(G)] = E(G) \cap E(G)^*$ ist, so ist auch $E(G)/Z[E(G)]$ endlich; und das ergibt wegen der Endlichkeit von $G/E(G)$ auch die von $G/Z[E(G)]$, q.e.d.

Folgerung 1: Gruppen mit abelschen Untergruppen von endlichem Index besitzen auch abelsche charakteristische Untergruppen von endlichem Index.

Diese für uns besonders wichtige Tatsache ergibt sich ohne weiteres aus Lemma 2, wenn man nur bedenkt, daß das Zentrum einer charakteristischen Untergruppe ebenfalls eine charakteristische Untergruppe ist.

Folgerung 2: Ist M ein maximaler abelscher Normalteiler von G und induziert G in M eine endliche Automorphismengruppe, so ist $Z[E(G)] \leq M \leq E(G)$.

Beweis: Da G in M eine endliche Automorphismengruppe induziert, so hat jedes Element aus M in G nur endlich viele konjugierte, so daß $M \leq E(G)$ ist. Dann ist aber $MZ[E(G)]$ ein abelscher Normalteiler von G ; $M = MZ[E(G)]$ oder $Z[E(G)] \leq M$ folgt aus der Maximalität von M .

Folgerung 3: Es gibt nur endlich viele maximale abelsche Normalteiler von endlichem Index.

Beweis: Besitzt die Gruppe G keine maximalen abelschen Normalteiler von endlichem Index, so ist unsere Aussage trivialerweise erfüllt. Besitzt aber G maximale abelsche Normalteiler von endlichem Index, so liegen diese sämtlich zwischen $Z[E(G)]$ und $E(G)$ (Folgerung 2) und $G/Z[E(G)]$ ist endlich nach

Lemma 2, so daß zwischen $Z[E(G)]$ und $E(G)$ nur endlich viele Untergruppen liegen können, q.e.d.

Folgerung 4: *Dann und nur dann ist $G/Z(G)$ endlich, wenn G' endlich ist und G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt.*

Beweis: Die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt sofort aus einem bekannten Satz; siehe BAER [2; p. 163, Zusatz]. Sind umgekehrt unsere Bedingungen erfüllt, so folgt aus der Endlichkeit von G' , daß jedes Element in G nur endlich viele konjugierte besitzt, daß also $G = E(G)$ ist; und aus der Existenz einer abelschen Untergruppe von endlichem Index folgt wegen Lemma 2 die Endlichkeit von $E(G)/Z[E(G)] = G/Z(G)$, q.e.d.

Satz 2: *Dann und nur dann besitzt die Gruppe G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index, wenn*

(a) *jedes unendliche homomorphe Bild von G einen unendlichen abelschen Normalteiler besitzt und*

(b) *jeder Normalteiler von G einen maximalen abelschen Normalteiler besitzt, in dem er eine endliche Automorphismengruppe induziert.*

Für unsere Anwendungen dieses Satzes ist es wichtig, daß man die Bedingung (a) durch die folgende, offenbar schwächere, Bedingung (a') ersetzen kann.

(a') *Ist M ein maximaler abelscher Normalteiler von G , ist G/M unendlich, während G in M nur eine endliche Automorphismengruppe induziert, dann existiert ein unendlicher abelscher Normalteiler von G/M .*

Beweis: Existiert zunächst eine abelsche Untergruppe von endlichem Index in G , so existiert nach Folgerung 1 auch ein abelscher Normalteiler von endlichem Index in G ; und die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) kann nun mühelos hergeleitet werden. Daß (a') ein Spezialfall von (a) ist, ist offenbar.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a') und (b) an. Aus (b) folgt zunächst die Existenz eines maximalen abelschen Normalteilers M von G , in dem G eine endliche Automorphismengruppe induziert. Wir wollen die Endlichkeit von G/M zeigen und nehmen also an, daß G/M unendlich ist. Dann können wir aus (a') die Existenz eines M enthaltenden Normalteilers N von G erschließen derart, daß N/M abelsch und unendlich ist.

Wir bezeichnen mit M^* den Zentralisator von M in G . Dies ist ein M enthaltender Normalteiler von G ; und G/M^* ist endlich, da ja G in M nur eine endliche Automorphismengruppe induziert. Aus der Endlichkeit von G/M^* folgt natürlich auch die von $N/(N \cap M^*)$. Da M in dem Normalteiler $N \cap M^*$ von G enthalten ist, so folgt aus der Unendlichkeit von N/M auch die Unendlichkeit von $(N \cap M^*)/M$; und aus der Kommutativität von N/M folgt die Kommutativität von $(N \cap M^*)/M$.

Aus (b) folgt, daß der Normalteiler $N \cap M^*$ von G einen maximalen abelschen Normalteiler A besitzt, in dem $N \cap M^*$ eine endliche Automorphismengruppe induziert. Da A und M beide im Zentralisator M^* von M enthaltene abelsche Gruppen sind, so ist AM ein abelscher Normalteiler

von $N \cap M^*$; und aus der Maximalität von A folgt $A = AM$. Bedenken wir noch, daß $(N \cap M^*)/M$ abelsch ist, so ergibt sich schließlich

$$(N \cap M^*)' \leq M \leq A \leq N \cap M^*.$$

Der Zentralisator der abelschen Gruppe A enthält A . Ist z ein Element aus $N \cap M^*$, das dem Zentralisator von A angehört, so ist $\{A, z\}$ eine abelsche Untergruppe von $N \cap M^*$, die die Kommutatorgruppe $(N \cap M^*)'$ enthält und also ein Normalteiler von $N \cap M^*$ ist. Aus der Maximalität des abelschen Normalteilers A von $N \cap M^*$ erschließen wir nun $A = \{A, z\}$, so daß z zu A gehört; und damit ist gezeigt, daß A mit seinem Zentralisator in $N \cap M^*$ identisch ist. Da aber $N \cap M^*$ in A eine endliche Automorphismengruppe induziert, so haben wir damit die Endlichkeit von $(N \cap M^*)/A$ erwiesen.

Da also $N \cap M^*$ eine abelsche Untergruppe A von endlichem Index besitzt, so können wir aus Folgerung 1 die Existenz einer abelschen charakteristischen Untergruppe C von $N \cap M^*$ erschließen, deren Index $[N \cap M^* : C]$ endlich ist. Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G ist C selbst ein Normalteiler von G . Da die beiden abelschen Normalteiler M und C von G im Zentralisator M^* von M in G enthalten sind, so ist MC ein abelscher Normalteiler von G ; und aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von G folgt dann $M = MC$ oder $C \leq M$. Aus der Endlichkeit von $(N \cap M^*)/C$ folgt jetzt auch die von $(N \cap M^*)/M$, während wir weiter oben die Unendlichkeit von $(N \cap M^*)/M$ erwiesen hatten. Unsere Annahme der Unendlichkeit von G/M hat uns also zu einem Widerspruch geführt, aus dem die gewünschte Endlichkeit von G/M folgt. M ist also die gesuchte abelsche Untergruppe von endlichem Index in G , q.e.d.

Satz 3: *Dann und nur dann ist N/M endlich für jeden Normalteiler N der Gruppe G und jeden maximalen abelschen Normalteiler M von N , wenn*

(a) *G eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt und*

(b) *jeder Normalteiler von G in jedem seiner abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe induziert.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß N/M stets endlich ist, wenn N ein Normalteiler von G und M ein maximaler abelscher Normalteiler von N ist. Es existiert, wie immer, ein maximaler abelscher Normalteiler A von G ; und aus unserer Voraussetzung folgt die Endlichkeit von G/A . Damit ist bereits die Notwendigkeit der Bedingung (a) bewiesen. Ist weiter U ein abelscher Normalteiler des Normalteilers N von G , so ist U in einem maximalen abelschen Normalteiler V von N enthalten. Aus unserer Voraussetzung folgt die Endlichkeit von N/V . Da aber V offenbar im Zentralisator W von U in N enthalten ist, so ist auch $[N : W]$ endlich. Da U ein Normalteiler von N ist, so ist W ebenfalls ein Normalteiler von N und N/W ist im wesentlichen mit der von N in U induzierten Automorphismengruppe identisch, womit auch die Notwendigkeit der Bedingung (b) dargetan ist.

Wir nehmen jetzt umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a) und (b) an. Da jede Gruppe einen maximalen abelschen Normalteiler besitzt, folgt aus unserer Bedingung (b) sofort die Gültigkeit der Bedingung (b) des Satzes 2. Um auch die Gültigkeit der Bedingung (a') von Satz 2 darzutun, betrachten

wir einen maximalen abelschen Normalteiler M von G mit unendlicher Faktorgruppe G/M derart, daß G in M eine endliche Automorphismengruppe induziert. Aus der letzten Eigenschaft von M folgt, daß der Zentralisator M^* von M ein M enthaltender Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe G/M^* ist. Aus der Unendlichkeit des homomorphen Bildes G/M von G folgt wegen (a) und Satz 1 die Existenz eines M enthaltenden Normalteilers N von G derart, daß N/M unendlich, die Kommutatorgruppe MN'/M aber endlich ist.

Der Zentralisator Q/M des endlichen Normalteilers MN'/M in G/M ist ein Normalteiler von endlichem Index in G/M , so daß also Q ein M enthaltender Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe G/Q ist. Es folgt, daß $M^* \cap Q$ ein M enthaltender Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe $G/(M^* \cap Q)$ ist.

$D = MN' \cap M^* \cap Q$ ist ein M enthaltender Normalteiler von G ; und aus der Endlichkeit von MN'/M folgt die von D/M . Weiter ist

$$D/M \leq (MN' \cap Q)/M \leq Z(Q/M),$$

da ja Q/M der Zentralisator von MN'/M ist. Ist d ein Element in D , so ist $\{M, d\}$ abelsch, da ja d im Zentralisator M^* von M liegt. Da $\{M, d\}/M$ als Untergruppe des Zentrums von Q/M ein Normalteiler von Q/M ist, so ist $\{M, d\}$ ein abelscher Normalteiler des Normalteilers Q von G ; und aus (b) folgt, daß der Zentralisator von $\{M, d\}$ in Q endlichen Index in Q hat. Aus der Endlichkeit von G/Q folgern wir weiter, daß der Zentralisator d^* von $\{M, d\}$ in G endlichen Index $[G: d^*]$ hat. — Aus der Endlichkeit von D/M folgt die Existenz eines endlichen Repräsentantensystems d_1, \dots, d_k von D/M . Der Zentralisator D^* von D in G ist mit D ein Normalteiler von G ; und aus $D = \{M, d_1, \dots, d_k\}$ folgt sofort $D^* = d_1^* \cap \dots \cap d_k^*$. Aus der Endlichkeit der endlich vielen Indices $[G: d_i^*]$ ergibt sich schließlich nach dem POINCARÉschen Satze die Endlichkeit von G/D^* .

Aus $M \leq D \leq M^*$ ergibt sich $M \leq D^* \leq M^*$ und folglich wird $M \leq D \cap D^* = Z(D)$. Da $Z(D)$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers D von G ein abelscher Normalteiler von G ist, so folgern wir $M = Z(D) = D \cap D^*$ aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von G .

$P = N \cap D^* \cap Q$ ist ein zwischen M und N liegender Normalteiler von G . Aus der Endlichkeit von G/Q und G/D^* folgt die Endlichkeit von N/P , und aus der Unendlichkeit von N/M ergibt sich also die Unendlichkeit von P/M . Da $M = D \cap D^*$ und $D^* \leq M^*$ ist, so wird

$$P' \leq N' \cap D^* \cap Q \leq MN' \cap D^* \cap Q = MN' \cap M^* \cap Q \cap D^* = D \cap D^* = M,$$

so daß also P/M der gesuchte unendliche, abelsche Normalteiler von G/M ist.

Damit ist nun auch die Gültigkeit der Bedingung (a') von Satz 2 dargestellt. Es ergibt sich also aus Satz 2 die Existenz abelscher Untergruppen von endlichem Index in G . Ist schließlich N ein Normalteiler von G und M ein maximaler abelscher Normalteiler von N , so folgt aus unserer Bedingung (b), daß N in M eine endliche Automorphismengruppe induziert. Insbesondere hat also jedes Element aus M in N nur endlich viele konjugierte, so daß

$M \leq E(N)$ ist. Da G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt, gilt dasselbe von N ; und wir folgern aus Lemma 2 die Endlichkeit von $N/Z[E(N)]$. Aus $M \leq E(N)$ folgt aber, daß $MZ[E(N)]$ ein abelscher Normalteiler von N ist; und aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von N ergibt sich $M = MZ[E(N)]$ oder $Z[E(N)] \leq M$, womit dann auch die Endlichkeit von N/M dargetan ist, q.e.d.

Bemerkung 1: Die für unsere Anwendungen wichtigste Folgerung aus Satz 3 ist die Existenz abelscher Untergruppen von endlichem Index in Gruppen mit den Eigenschaften (a) und (b). Der Vorteil von Satz 3 gegenüber Satz 2 besteht darin, daß wegen Satz 1 die Bedingung (a) von Satz 3 schwächer ist als die Bedingung (a) von Satz 2.

Wir wollen an drei Beispielen zeigen, daß die Bedingungen des Satzes 3 keiner wesentlichen Abschwächung fähig sind.

Beispiel 1: Die Gruppe G werde von vier Elementen a, b, c, d erzeugt, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} ac &= ca, \quad bc = cb, \quad a^{-1}b^{-1}ab = c, \\ d^2 &= 1, \quad dad = b, \quad dbd = a, \quad dcd = c^{-1}. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß die Untergruppen von $C = \{c\}$ genau die abelschen Normalteiler von G sind, daß $C = Z(\{a, b\})$ ist, daß G auflösbar ist, (es ist sogar $G'' = 1$), und daß $\{a, b\}$ der Zentralisator der von 1 verschiedenen Untergruppen von C ist, so daß G in den von 1 verschiedenen abelschen Normalteilern endliche Automorphismengruppen induziert. Schließlich sind abelsche Torsionsuntergruppen von G endlich; aber es gibt sicher keine abelschen Untergruppen von endlichem Index.

Beispiel 2: Es sei A eine abzählbar unendliche abelsche Gruppe und $A^2 = 1$. Dann besitzt A eine Basis der Form $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$; und es existiert ein Automorphismus von A , der je die Elemente a_{2i-1} und a_{2i} vertauscht. Wir können also zu A ein Element b adjungieren, das den Bedingungen

$$b^2 = 1, \quad ba_{2i-1} = a_{2i}b$$

genügt. Dann bildet A einen abelschen Normalteiler vom Index 2 in der so entstehenden Gruppe $G = \{A, b\}$. Weiter erzeugen die Elemente b und $a_{2i-1}a_{2i}$ für $0 < i$ zusammen einen maximalen abelschen Normalteiler von G , dessen Index in G unendlich ist.

Beispiel 3: A sei eine unendliche torsionsfreie abelsche Gruppe; und G entstehe aus A durch Adjunktion eines Elements g , das den Bedingungen

$$g^2 = 1, \quad gag = a^{-1} \text{ für } a \text{ in } A$$

genügt. A ist dann der einzige maximale abelsche Normalteiler von G , $[G:A] = 2$, $Z(G) = 1$ und die unendlich vielen, nicht in A gelegenen Elemente aus G sind alle in G konjugiert.

Um eine interessante Folgerung aus unseren Resultaten bequem aussprechen zu können, sei an den von WIELANDT eingeführten Begriff der nachinvarianten Untergruppe erinnert. Die Untergruppe U von G ist eine *nachinvariante Untergruppe* von G , wenn es endlich viele Untergruppen U_i von G derart gibt, daß $U_0 = U$, U_i ein Normalteiler von U_{i+1} und $U_n = G$ ist.

Folgerung 5: *Dann und nur dann ist N/M endlich für jede nachinvariante Untergruppe N der Gruppe G und jeden maximalen abelschen Normalteiler M von N , wenn es*

- (a) *eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index in G gibt und*
- (b) *jede nachinvariante Untergruppe von G in jedem ihrer abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe induziert.*

Die sehr einfache Herleitung dieser Folgerung 5 aus dem Satz 3 sei dem Leser überlassen. Etwas tiefer liegt folgende Tatsache.

Zusatz 1: *Wenn N/M endlich ist für jeden Normalteiler N von G und jeden maximalen abelschen Normalteiler M von N , dann ist auch für jeden abelschen Normalteiler A eines Normalteilers von G der Index $[G : A^*]$ des Zentralisators A^* von A in G endlich.*

Beweis: Es sei A ein abelscher Normalteiler des Normalteilers N von G . Dann ist A in einem maximalen abelschen Normalteiler M von N enthalten. Ist A^* der Zentralisator von A in G und M^* der Zentralisator von M in G , so ist $A \leq M \leq M^* \leq A^*$; und es genügt also offenbar die Endlichkeit des Index $[G : M^*]$ zu erweisen.

Da jeder maximale abelsche Normalteiler von N endlichen Index in N hat, so gibt es nur endlich viele maximale abelsche Normalteiler von N [Folgerung 3]. Da jede zu M in G konjugierte Untergruppe von G in dem Normalteiler N von G enthalten ist, so ist jede zu M in G konjugierte Untergruppe von G ein maximaler abelscher Normalteiler von N ; und es gibt also nur endlich viele zu M in G konjugierte Untergruppen von G . Bezeichnen wir mit R den Normalisator von M in G , so ist auch $[G : R]$ endlich; und wir bemerken, daß $M \leq N \leq R$ ist. Aus der Endlichkeit von $[G : R]$ folgt, daß auch der Normalisator von R in G endlichen Index in G hat, und daß also R nur endlich viele konjugierte in G besitzt. Da jede zu R konjugierte Untergruppe ebenfalls endlichen Index, nämlich $[G : R]$, in G hat, so ist der Durchschnitt J der zu R in G konjugierten Untergruppen ein Normalteiler von G , dessen Index $[G : J]$ nach dem POINCARÉschen Satz endlich ist. Da der Normalteiler N von G in jeder der zu R konjugierten Untergruppen enthalten ist, so wird $M \leq N \leq J \leq R$. Insbesondere ist also M ein abelscher Normalteiler des Normalteilers J von G . Aus unserer Voraussetzung folgt, daß J in M eine endliche Automorphismengruppe induziert. Also hat der Zentralisator $J \cap M^*$ von M in J endlichen Index in J ; und aus der Endlichkeit von G/J folgt jetzt die von $[G : J \cap M^*]$, so daß insbesondere auch $[G : M^*]$ endlich ist, woraus schließlich, wie schon bemerkt, die Endlichkeit von $[G : A^*]$ folgt, q.e.d.

Zur Herleitung eines interessanten Endlichkeitskriteriums benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Lemma 3: *Ist ein maximaler abelscher Normalteiler von G endlich, so ist jeder abelsche Normalteiler von G endlich.*

Beweis: Ist der maximale abelsche Normalteiler M von G endlich, so ist der Zentralisator M^* von M in G ein M enthaltender Normalteiler von G .

dessen Index $[G: M^*]$ endlich ist. Sei nun A irgendein abelscher Normalteiler von G . Dann ist

$$A/(A \cap M^*) \cong AM^*/M^* \leq G/M^*,$$

woraus die Endlichkeit von $A/(A \cap M^*)$ folgt. Da $A \cap M^*$ im Zentralisator von M enthalten ist, so ist das Produkt der beiden abelschen Normalteiler M und $A \cap M^*$ von G selbst ein abelscher Normalteiler von G ; und aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von G folgt also $M = M(A \cap M^*)$ oder $A \cap M^* \leq M$. Da M endlich ist, ist auch $A \cap M^*$ endlich; und aus der Endlichkeit der Gruppen $A/(A \cap M^*)$ und $A \cap M^*$ folgt die von A , q.e.d.

Folgerung 6: Die Gruppe G ist endlich, wenn

- (a) G eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt und
- (b) jeder Normalteiler von G einen maximalen abelschen Normalteiler besitzt, der endlich ist.

Beweis: Ist A ein abelscher Normalteiler eines Normalteilers von G , so ist A wegen (b) und Lemma 3 endlich. Also induziert jeder Normalteiler von G in seinen abelschen Normalteilern endliche Automorphismengruppen; und es folgt aus Satz 3, daß jeder maximale abelsche Normalteiler von G endlichen Index in G hat. Da einer dieser maximalen abelschen Normalteiler endlich ist, so ist auch G endlich, q.e.d.

Für unsere Anwendungen im § 4 reicht Satz 3 völlig aus. Doch haben die semi-primitiven Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges die weitere Eigenschaft, daß ihre abelschen Torsionsuntergruppen endlich sind; und unter Benutzung entsprechender, meist schwächerer, Bedingungen wird sich eine wesentliche Abrundung der Resultate dieses § 3 erreichen lassen. Fundamental für diese Betrachtungen ist das folgende Resultat.

Lemma 4: Besitzt die Gruppe G einen maximalen abelschen Normalteiler, in dem sie eine Automorphismengruppe der endlichen Ordnung n induziert, und der nur endlich viele Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ enthält, so induziert G in jedem seiner abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe.

Beweis: Es sei M der nach Voraussetzung existierende maximale abelsche Normalteiler von G , in dem G eine Automorphismengruppe der endlichen Ordnung n induziert und der nur endlich viele Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ enthält. Die Gesamtheit T der in M enthaltenen Lösungen von $x^n = 1$ ist dann eine endliche charakteristische Untergruppe des abelschen Normalteilers M , so daß also T ein endlicher Normalteiler von G ist. Weiter ist der Zentralisator M^* von M in G ein M enthaltender Normalteiler von G , dessen Index $[G: M^*] = n$ ist, da ja G/M^* im wesentlichen mit der von G in M induzierten Automorphismengruppe identisch ist.

Ist N ein abelscher Normalteiler von G , so ist $N \cap M^*$ ein abelscher Normalteiler von G , dessen Elemente mit denen von M vertauschbar sind. Folglich ist $M(N \cap M^*)$ ein abelscher Normalteiler von G ; und aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von G folgt wegen $M \leq M^*$

$$M = M(N \cap M^*) \text{ oder } N \cap M^* \leq M \text{ oder } N \cap M^* = N \cap M,$$

$$N/(N \cap M) = N/(N \cap M^*) \cong M^*N/M^* \leq G/M^*,$$

so daß $[N: N \cap M]$ ein Teiler von $[G: M^*] = n$ ist.

Der Zentralisator $Q/(N \cap M)$ des endlichen Normalteilers $N/(N \cap M)$ von $G/(N \cap M)$ ist ein Normalteiler von $G/(N \cap M)$, dessen Index $[G:Q]$ endlich ist. Dann ist auch $M^* \cap Q$ ein $N \cap M$ enthaltender Normalteiler von G , dessen Index $[G:M^* \cap Q]$ endlich ist.

Sei nun σ ein Automorphismus der abelschen Gruppe N , der jedes Element in $N \cap M$ und jedes Element in $N/(N \cap M)$ invariant läßt. Dann ist $\sigma - 1$ ein Endomorphismus von N , der $N \cap M$ auf 1 und N in $N \cap M$ abbildet. $\sigma - 1$ induziert also einen Homomorphismus von $N/(N \cap M)$ in $N \cap M$; und da die endliche Ordnung von $N/(N \cap M)$ ein Teiler von N ist, so wird jedes Element aus N durch $\sigma - 1$ auf eine in $N \cap M$ enthaltene Lösung der Gleichung $x^n = 1$ abgebildet. Also ist $N^{\sigma-1} \leq N \cap M \cap T = N \cap T$. Aus der Endlichkeit von $N/(N \cap M)$ und T folgt nun aber, daß es nur endlich viele Homomorphismen von $N/(N \cap M)$ in $N \cap T$ gibt; und daraus folgt, daß es nur endlich viele Endomorphismen von N gibt, die N in $N \cap M$ und $N \cap M$ auf 1 abbilden. Also gibt es auch nur endlich viele Automorphismen von N , die jedes Element in $N \cap M$ und jedes Element in $N/(N \cap M)$ invariant lassen.

Ist weiter s ein Element in $M^* \cap Q$, so induziert s in dem Normalteiler N von G einen Automorphismus, der jedes Element in $N \cap M$ und jedes Element in $N/(N \cap M)$ invariant läßt. Da es nur endlich viele derartige Automorphismen von N gibt, so induziert $M^* \cap Q$ in N eine endliche Automorphismengruppe. Aus der Endlichkeit von $G/(M^* \cap Q)$ folgt dann schließlich, daß G in N eine endliche Automorphismengruppe induziert, q.e.d.

Satz 4: Wenn jede abelsche Torsionsuntergruppe von G nur endlich viele Elemente einer jeden vorgegebenen Ordnung enthält, so sind die folgenden Eigenschaften von G untereinander äquivalent:

- (a) G besitzt eine abelsche Untergruppe von endlichem Index.
- (b) G besitzt eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index; und die Normalisatoren abelscher Untergruppen von G induzieren in diesen endliche Automorphismengruppen.
- (c) Ist A ein maximaler abelscher Normalteiler der Untergruppe B von G , so ist B/A endlich.
- (d) G besitzt eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index; und jeder Normalteiler von G besitzt einen maximalen abelschen Normalteiler, in dem er eine endliche Automorphismengruppe induziert.

Beweis: Ist die Bedingung (a) erfüllt, so existieren a fortiori auflösbare Untergruppen von endlichem Index in G . Ist weiter U eine abelsche Untergruppe von G und V der Normalisator von U in G , so ist U ein abelscher Normalteiler von V . Weiter folgern wir aus (a) die Existenz einer abelschen Untergruppe von endlichem Index in V ; und aus Folgerung 1 ergibt sich die Existenz eines maximalen abelschen Normalteilers M von V mit endlicher Faktorgruppe V/M . Es ist klar, daß V in M eine endliche Automorphismengruppe induziert. Ist n die Ordnung dieser Automorphismengruppe, so enthält M nach Voraussetzung nur endlich viele Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ (nur endlich viele Elemente, deren Ordnung Teiler von n sind), da ja die Elemente endlicher Ordnung in der abelschen Gruppe M eine abelsche Torsionsunter-

gruppe von G bilden. Direkte Anwendung von Lemma 4 zeigt nun, daß V in seinem abelschen Normalteiler U eine endliche Automorphismengruppe induziert. Mithin ist (b) eine Folge von (a).

Wenn man bedenkt, daß Untergruppen auflösbarer Gruppen stets auflösbar sind, so erschließt man aus Satz 3, daß (c) eine Folge von (b) ist; und daß (d) eine Folge von (c) ist, ergibt sich aus der Existenz maximaler abelscher Normalteiler. Wird schließlich (d) von G erfüllt, so ergibt sich aus unserer Voraussetzung und Lemma 4, daß jeder Normalteiler in jedem seiner abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe induziert; und nun folgt aus Satz 3, daß jeder maximale abelsche Normalteiler von G endlichen Index in G hat. Also ist (a) eine Folge von (d), q.e.d.

Bemerkung 2: Die weiter oben angegebenen Beispiele zeigen, daß es unmöglich ist, Bedingung (d) von Satz 4 wesentlich abzuschwächen.

Bemerkung 3: Man überzeugt sich leicht, daß jede abelsche Torsionsuntergruppe von G nur endlich viele Elemente einer jeden vorgegebenen Ordnung besitzt, wenn es eine abelsche Untergruppe U von endlichem Index $[G : U]$ gibt, die nur endlich viele Elemente einer jeden vorgegebenen positiven Ordnung enthält.

Bemerkung 4: Es ist wohlbekannt, daß eine abelsche Torsionsgruppe dann und nur dann nur endlich viele Elemente einer jeden vorgegebenen Ordnung besitzt, wenn in jeder ihrer Primärkomponenten die Minimalbedingung gilt.

Lemma 5: Die Gruppe G induziert in ihrem Normalteiler N eine endliche Automorphismengruppe, wenn

- (1) G in $Z(N)$ eine endliche Automorphismengruppe induziert,
- (2) die Ordnung n von $N/Z(N)$ endlich ist und
- (3) $Z(N)$ nur endlich viele Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ enthält.

Beweis: Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers ist $Z(N)$ ein Normalteiler von G , so daß der Zentralisator C von $Z(N)$ in G ein $Z(N)$ enthaltender Normalteiler von G ist, dessen Faktorgruppe G/C wegen (1) endlich ist. Da N und $Z(N)$ Normalteiler von G sind, so induziert jedes Element aus G in $N/Z(N)$ einen Automorphismus. Aus (2) folgt, daß die von G in $N/Z(N)$ induzierte Automorphismengruppe endlich ist. Der Zentralisator $Q/Z(N)$ von $N/Z(N)$ in $G/Z(N)$ ist also ein Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe, so daß Q ein Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe G/Q ist. Folglich ist $C \cap Q$ ein Normalteiler von G , dessen Faktorgruppe $G/(C \cap Q)$ endlich ist.

Ist σ ein Automorphismus von N , der jedes Element in $Z(N)$ und in $N/Z(N)$ invariant läßt, so bildet $\sigma - 1$ jedes Element aus N auf ein Element in $Z(N)$ ab. Sind also x und y Elemente aus N , so wird

$$(xy)^{\sigma-1} = (xy)^{\sigma} (xy)^{-1} = x^{\sigma} y^{\sigma} y^{-1} x^{-1} = x^{\sigma} y^{\sigma-1} x^{-1} = x^{\sigma-1} y^{\sigma-1};$$

und $\sigma - 1$ ist also ein Homomorphismus von N in $Z(N)$, der jedes Element aus $Z(N)$ auf 1 abbildet. Folglich bewirkt $\sigma - 1$ einen Homomorphismus von $N/Z(N)$ in $Z(N)$. Da $[N : Z(N)] = n$ ist, so bildet $\sigma - 1$ jedes Element aus N und $N/Z(N)$ auf eine der nach (3) endlich vielen Lösungen der Gleichung

$z^n = 1$ in $Z(N)$ ab. Folglich gibt es nur endlich viele Automorphismen von N , die jedes Element in $Z(N)$ und jedes Element in $N/Z(N)$ invariant lassen.

Ist s ein Element aus $C \cap Q$, so induziert s in N einen Automorphismus σ , der jedes Element in $Z(N)$ und jedes Element in $N/Z(N)$ invariant läßt. Nach dem Resultat des vorigen Absatzes induzieren also Elemente aus $C \cap Q$ nur endlich viele Automorphismen in N . Aus der Endlichkeit von $G/(C \cap Q)$ folgt schließlich, daß G in N eine endliche Automorphismengruppe induziert, q.e.d.

Bemerkung 5: Die Notwendigkeit der Bedingungen (1) und (2) von Lemma 5 ist offenbar; doch kann man dies nicht von Bedingung (3) behaupten.

Folgerung 7: Wenn jede abelsche Torsionsuntergruppe von G nur endlich viele Elemente einer jeden vorgegebenen Ordnung enthält, und wenn G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt, dann induziert G in $E(G)$ eine endliche Automorphismengruppe; und $E(N) \leq E(G)$ für jede nachinvariante Untergruppe N von G .

Beweis: Aus unserer zweiten Voraussetzung und Lemma 2 folgt die Endlichkeit von $G/Z[E(G)]$, und dies ergibt die Endlichkeit der von G in seiner charakteristischen Untergruppe $E(G)$ induzierten Automorphismengruppe.

Sei nun eine endliche Kette von Untergruppen U_i von G derart gegeben, daß $U_0 = G$ und U_i ein Normalteiler von U_{i-1} ist. Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers ist $E(U_i)$ ein Normalteiler von U_{i-1} . Da mit G auch U_i eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt, so folgt aus Lemma 2 die Endlichkeit von $E(U_i)/Z[E(U_i)]$; und unter Benutzung unserer ersten Voraussetzung ergibt sich aus Lemma 5, daß U_{i-1} in $E(U_i)$ eine endliche Automorphismengruppe induziert. Dann ist aber sicher insbesondere $E(U_i) \leq E(U_{i-1})$, so daß

$$E(U_k) \leq \dots \leq E(U_i) \leq E(U_{i-1}) \leq \dots \leq E(U_0) = E(G)$$

ist, q.e.d.

Lemma 6: Ist jede abelsche Torsionsuntergruppe der Gruppe G endlich, so ist das Produkt aller endlichen Normalteiler von G endlich.

Beweis: Ist P das Produkt aller endlichen Normalteiler von G , so enthält P — wie jede Gruppe — eine maximale abelsche Untergruppe A . Mit P ist auch A eine Torsionsgruppe, so daß aus unserer Voraussetzung die Endlichkeit von A folgt. Aus der Definition von P und der Endlichkeit von A erschließt man mühelos die Existenz eines endlichen, A enthaltenden Normalteilers N von G . Der Zentralisator N^* von N in P ist ein Normalteiler von G und aus der Endlichkeit von N folgt die Endlichkeit von P/N^* (da ja P/N^* im wesentlichen mit einer Automorphismengruppe von N identisch ist). Ist x ein Element aus N^* , so ist $\{A, x\}$ eine abelsche Untergruppe von P , da A in N und x im Zentralisator von N liegt. Aus der Maximalität der abelschen Untergruppe A von P folgt $A = \{A, x\}$, so daß x zu A gehört und also $N^* \leq A \leq N$ ist. Aus der Endlichkeit von P/N^* folgt mithin die von P/N ; und aus der Endlichkeit von N folgt schließlich die von P , q.e.d.

Folgerung 8: Ist jede abelsche Torsionsuntergruppe von G endlich, so ist die von den endlichen nachinvarianten Untergruppen von G erzeugte charakteristische Untergruppe von G endlich.

Beweis: Das Produkt P aller endlichen Normalteiler von G ist nach Lemma 6 endlich. Weiter ist klar, daß P in der von den endlichen nachinvarianten Untergruppen von G erzeugten Untergruppe enthalten ist. Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir also zeigen, daß jede endliche nachinvariante Untergruppe von G in P enthalten ist. Um dies einzusehen, betrachten wir endlich viele Untergruppen U_i von G derart, daß U_i ein Normalteiler von U_{i-1} und $U_0 = G$ ist. Weiter bezeichnen wir mit $P(U_i)$ das Produkt aller endlichen Normalteiler von U_i . Da jede abelsche Torsionsuntergruppe von U_i nach Voraussetzung endlich ist, so ist $P(U_i)$ nach Lemma 6 eine endliche charakteristische Untergruppe von U_i . Charakteristische Untergruppen von Normalteilern sind Normalteiler; und mithin ist $P(U_i)$ ein endlicher Normalteiler von U_{i-1} . Folglich wird

$$P(U_i) \leq P(U_{i-1}) \text{ und } P(U_0) = P.$$

Man sieht sofort, daß jeder endliche Normalteiler von U_n in P enthalten ist; und daraus folgt, daß jede endliche nachinvariante Untergruppe von G in P liegt, q.e.d.

Folgerung 9: *Existiert eine abelsche Untergruppe von endlichem Index und ist jede charakteristische abelsche Torsionsuntergruppe endlich, so ist jede Torsionsuntergruppe endlich.*

Beweis: Wegen Folgerung 1 besitzt die betrachtete Gruppe G eine abelsche charakteristische Untergruppe C von endlichem Index $[G:C]$. Die Torsionsuntergruppe T von C ist dann eine abelsche charakteristische Torsionsuntergruppe von G und also endlich. — Ist U irgendeine Torsionsuntergruppe von G , so ist $C \cap U \leq T$ und also endlich, während $U/(U \cap C) \cong CU/C$ wegen der Endlichkeit von G/C endlich ist; und damit ist auch die Endlichkeit von U dar getan, q.e.d.

Satz 5: *Wenn (a) jeder auflösbare Normalteiler der Gruppe G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index besitzt, (b) G in jedem seiner abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe induziert und (c) das Produkt aller endlichen Normalteiler von G ebenfalls endlich ist, dann besitzt das Produkt aller eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzenden Normalteiler von G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index.*

Beweis: Es existiert ein maximaler abelscher Normalteiler M von G und der Zentralisator M^* von M in G ist ein M enthaltender Normalteiler mit [nach (b)] endlicher Faktorgruppe G/M^* . Das Produkt P aller endlichen Normalteiler von G ist eine endliche charakteristische Untergruppe von G [nach (c)], und der Durchschnitt $Q = M^* \cap P$ ist ein endlicher Normalteiler von G . Der Zentralisator Q^* von Q in G ist ein Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe G/Q^* , da ja G/Q^* im wesentlichen mit der in dem endlichen Normalteiler Q induzierten Automorphismengruppe identisch ist. Da Q im Zentralisator M^* von M liegt, so liegt M im Zentralisator Q^* von Q ; und $M^* \cap Q^*$ ist also ein M enthaltender Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe $G/(M^* \cap Q^*)$.

Enthält der Normalteiler N von G eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index, so folgt aus Satz 1 die Existenz einer auflösbaren charakteristi-

schen Untergruppe C von N mit endlichem Index $[N : C]$. Aus (a) folgt dann die Existenz einer abelschen Untergruppe von C mit endlichem Index in C ; und es ergibt sich aus Folgerung 1 die Existenz einer abelschen charakteristischen Untergruppe A von C mit endlichem Index $[C : A]$. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist A eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers N von G und also ein Normalteiler von G ; und der Index $[N : A] = [N : C][C : A]$ ist ebenfalls endlich. Aus der Endlichkeit von G/M^* ergibt sich die von $AM^*/M^* \cong A/(A \cap M^*)$; und folglich ist auch $[N : A \cap M^*] = [N : A][A : A \cap M^*]$ endlich. Da A ein abelscher Normalteiler von G ist, so ist $A \cap M^*$ ein im Zentralisator M^* von M enthaltener abelscher Normalteiler von G ; und $M(A \cap M^*)$ ist also ebenfalls ein abelscher Normalteiler von G . Aus der Maximalität des abelschen Normalteilers M von G ergibt sich nun $M = M(A \cap M^*)$ oder $A \cap M^* \leq M$ oder $A \cap M^* = A \cap M$, da ja $M \leq M^*$ ist; und damit ist die Endlichkeit von $N/(A \cap M)$ argetan, aus der a fortiori die Endlichkeit von

$$N/(N \cap M) \cong MN/M$$

folgt. — Ist umgekehrt N ein Normalteiler von G derart, daß MN/M endlich ist, dann ist $N \cap M$ eine abelsche Untergruppe von endlichem Index in N . Wir haben also gezeigt, daß der Normalteiler N von G dann und nur dann eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt, wenn MN/M endlich ist.

Wir bezeichnen mit T das Produkt aller Normalteiler X von G mit folgenden Eigenschaften:

(t) $M \leq X \leq M^* \cap Q^*$ und X/M ist endlich.

Ist X ein (t) erfüllender Normalteiler von G , so ist $M \leq Z(X)$, da ja X im Zentralisator M^* von M enthalten ist; und es ist also $X/Z(X)$ endlich. Daraus folgt aber die Endlichkeit der Kommutatorgruppe X' von X (siehe BAER [2], p. 163, Zusatz). Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers X von G ist X' ebenfalls ein Normalteiler von G , der wegen seiner Endlichkeit in P enthalten ist. Also ist

$$X' \leq X \cap P \leq M^* \cap Q^* \cap P = Q \cap Q^* = Z(Q) \leq M^*.$$

Da X' folglich ein abelscher, im Zentralisator M^* von M enthaltener Normalteiler von G ist, so ist MX' ein abelscher Normalteiler von G ; und aus der Maximalität von M folgt $M = MX'$ oder $X' \leq M$. — Da aber das Produkt endlich vieler (t) erfüllender Normalteiler von G offenbar ebenfalls ein (t) erfüllender Normalteiler von G ist, so folgt sogar $T' \leq M$; und $T'' = 1$ ergibt sich aus der Kommutativität von M . Mithin ist T ein auflösbarer Normalteiler von G ; und aus dem Resultat des vorhergehenden Abschnitts unseres Beweises folgt die Endlichkeit von $MT/M = T/M$.

Sei schließlich S das Produkt aller Normalteiler Y von G , die eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzen. Nach dem oben gezeigten gehört der Normalteiler Y dann und nur dann in diese Klasse Θ , wenn MY/M endlich ist. Daraus folgt, daß das Produkt endlich vieler Normalteiler in Θ ebenfalls zu Θ gehört.

Es ist klar, daß S eine M enthaltende charakteristische Untergruppe von G ist. Da jeder Normalteiler mit der Eigenschaft (t) auch zur Klasse Θ gehört, so gilt sicher

$$T \leq S \cap M^* \cap Q^*.$$

Ist weiter s ein Element aus $S \cap M^* \cap Q^*$, so gibt es nach einer früheren Bemerkung einen s enthaltenden Normalteiler Y in Θ . Dann ist MY/M endlich und daraus folgt a fortiori die Endlichkeit von $(MY \cap M^* \cap Q^*)/M$. Also ist $MY \cap M^* \cap Q^*$ ein s enthaltender Normalteiler mit der Eigenschaft (t), so daß s zu T gehört; und damit haben wir $S \cap M^* \cap Q^* \leq T$ gezeigt. Folglich ist sogar $T = S \cap M^* \cap Q^*$, womit die Endlichkeit von $T/M = (S \cap M^* \cap Q^*)/M$ erwiesen ist. Aus der Endlichkeit von $G/(M^* \cap Q^*)$ folgt aber die von $S/(S \cap M^* \cap Q^*)$; und damit ist der gewünschte Beweis der Endlichkeit von S/M erbracht.

Bemerkung 6: Die Voraussetzungen (a), (b), (c) des Satzes sind sicher erfüllt, wenn jeder Normalteiler eines Normalteilers von G in jedem seiner abelschen Normalteiler eine endliche Automorphismengruppe induziert und jede abelsche Torsionsuntergruppe von G endlich ist, wie sich aus Satz 3 und Lemma 6 ergibt. — Fügt man noch die Bedingung hinzu, daß die Gruppe G Produkt ihrer eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzenden Normalteiler ist, so erhält man offenbar ein weiteres Kriterium für die Existenz einer abelschen Untergruppe von endlichem Index.

4. Auflösbare Automorphismengruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges.

Wir beginnen damit, daß wir die Resultate der Abschnitte 2 und 3 kombinieren.

Hauptsatz 1: Ist Φ eine auflösbare semi-primitive Automorphismengruppe der torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges, so ist

- (a) jede Torsionsuntergruppe von Φ endlich;
- (b) ist A ein maximaler abelscher Normalteiler der Untergruppe Δ von Φ , so ist Δ/A endlich;
- (c) es existiert eine ganze Zahl n derart, daß $\Phi^{(n)} = 1$ ist.

Beweis: Da A eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so folgt aus § 2, Folgerung 3:

- (a') jede abelsche Torsionsuntergruppe von Φ ist endlich.

Weiter ist jeder Normalteiler von Φ semi-primitiv [§ 2, Lemma 6]; und es ergibt sich also aus § 2, Folgerung 2:

- (b') ist A ein abelscher Normalteiler des Normalteilers Δ von Φ , so hat der Zentralisator von A in Δ endlichen Index.

Damit ist gezeigt, daß Φ die Eigenschaft (b) von § 3, Satz 3 hat. Aus der Auflösbarkeit von Φ folgern wir nun folgendes:

- (b'') jeder maximale abelsche Normalteiler von Φ hat endlichen Index in Φ .

Damit ist insbesondere die Existenz abelscher Untergruppen von endlichem Index in Φ dargetan. Aus (a') und § 3, Satz 4 ergibt sich nun die Gültigkeit von (b); und aus (a') und § 3, Folgerung 9 ergibt sich die Gültigkeit von (a).

Es existiert ein maximaler abelscher Normalteiler Ξ von Φ ; und aus (b'') folgt die Endlichkeit von Φ/Ξ . Da Φ auflösbar ist, so ist Φ/Ξ eine endliche auflösbare Gruppe. Folglich existiert eine positive ganze Zahl n derart, daß $\Phi^{(n-1)} \leq \Xi$ ist. Aus der Kommutativität von Ξ folgt dann $\Phi^{(n)} = 1$, q.e.d.

Es scheint, daß die Aussagen (a)–(c) des Hauptsatzes 1 die Endlichkeits-eigenschaften auflösbarer semi-primitiver Automorphismengruppen weitgehend erschöpfen, wie aus folgendem einfachen Beispiel hervorgeht.

Es sei A die Additionsgruppe der rationalen Zahlen und Φ die Gruppe aller Automorphismen von A . Dann ist A eine torsionsfreie abelsche Gruppe vom Range 1; und Φ ist also eine primitive Automorphismengruppe von A . Natürlich ist Φ der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen rationalen Zahlen isomorph. Also ist Φ abelsch und das direkte Produkt einer Gruppe der Ordnung 2 und unendlich vieler unendlicher zyklischer Gruppen.

Den weiteren Untersuchungen auflösbarer Automorphismengruppen seien einige Hilfsbetrachtungen vorangestellt.

Hilfssatz 1: Wenn die Normalteiler N_i der Gruppe G den Bedingungen

$$1 = N_k, [N_{i-1}, G] \leq N_i \leq N_{i-1}, N_0 = G$$

genügen, wenn die Automorphismen σ in der Automorphismengruppe Θ von G den Bedingungen

$$g\sigma \equiv g \text{ modulo } N_i \text{ für jedes } g \text{ in } N_{i-1} \text{ und jedes } i$$

genügen, dann ist ${}^k\Theta = 1$.

Beweis: Es ist bequem, $N_{k+j} = 1$ für positives j zu setzen. Wir bemerken zunächst, daß Θ jeden der Normalteiler N_i auf sich abbildet und in jeder der Faktorgruppen N_{i-1}/N_i die Identität induziert. Wir wollen durch vollständige Induktion beweisen, daß ${}^n\Theta$ in jeder Faktorgruppe N_{i-1}/N_{i+n} die Identität induziert. Diese Aussage ist für $n = 0$ mit unserer Voraussetzung identisch. Wir nehmen also an, daß $0 < n$ und daß unsere Behauptung bereits für $n-1$ erwiesen ist. Sei nun x ein Element in N_{i-1} , σ ein Automorphismus in ${}^{n-1}\Theta$ und τ ein Automorphismus in Θ . Dann folgt aus der Induktionsannahme, daß $x(\sigma-1)$ zu $N_{i-1+n-1}$ gehört; und es folgt aus unserer Voraussetzung über Θ , daß $x(\sigma-1)(\tau-1)$ zu N_{i-1+n} gehört. Entsprechend sehen wir ein, daß $x(\tau-1)$ in N_i liegt und daß also $x(\tau-1)(\sigma-1)$ zu N_{i-1+n} gehört. Folglich wird

$$x\sigma\tau = x(\sigma-1)(\tau-1) + x(\sigma-1+\tau) \equiv x(\sigma-1+\tau) \text{ modulo } N_{i-1+n},$$

$$x\tau\sigma = x(\tau-1)(\sigma-1) + x(\tau-1+\sigma) \equiv x(\tau-1+\sigma) \text{ modulo } N_{i-1+n}.$$

Da $x(\sigma-1)$ zu $N_{i-1+n-1}$ gehört und da nach Voraussetzung

$$[G, N_{i-1+n-1}] \leq N_{i-1+n}$$

ist, so wird

$$x(\sigma-1) + g = g + x(\sigma-1) \text{ modulo } N_{i-1+n} \text{ für jedes } g \text{ in } G.$$

Folglich wird

$$x\sigma\tau = x(\sigma-1+\tau) \equiv x(\tau+\sigma-1) = x(\tau-1) + x + x(\sigma-1)$$

$$= x(\tau-1) + x(\sigma-1) + x \equiv x(\tau-1+\sigma) = x\tau\sigma \text{ modulo } N_{i-1+n};$$

und hieraus ergibt sich müheles, daß

$$y\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma = y \text{ modulo } N_{i-1+n} \text{ für jedes } y \text{ in } N_{i-1}$$

gilt. Also induziert ${}^*\theta$ in jeder Faktorgruppe N_{i-1}/N_{i-1+n} die Identität, womit unser Induktionsbeweis voll erbracht ist.

Es ergibt sich insbesondere, daß ${}^*\theta$ in $N_0/N_k = G$ die Identität induziert und daß also ${}^*\theta = 1$ ist, q.e.d.

Gibt es eine ganze Zahl n derart, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe der Gruppe G sich von n (oder weniger) Elementen erzeugen läßt, so nennt man G bekanntlich eine Gruppe endlichen Ranges. Es sei an die leicht beweisbare Tatsache erinnert, daß eine Erweiterung einer Gruppe endlichen Ranges durch eine Gruppe endlichen Ranges stets eine Gruppe endlichen Ranges ist.

Hilfssatz 2: Wenn die Normalteiler N_i der Gruppe G den Bedingungen

$$1 = N_k, [N_{i-1}, G] \leq N_i \leq N_{i-1}, N_0 = G$$

genügen, wenn jede Faktorgruppe N_{i-1}/N_i eine torsionsfreie [abelsche] Gruppe endlichen Ranges ist, und wenn jeder Automorphismus σ aus der Automorphismengruppe θ von G den Bedingungen

$$g\sigma = g \text{ modulo } N_i \text{ für jedes } g \text{ in } N_{i-1} \text{ und jedes } i$$

genügt, dann ist θ eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges.

Beweis: θ bildet jeden der Normalteiler N_i auf sich ab und induziert also in jeder der Faktorgruppen G/N_i eine Automorphismengruppe. Diese ist im wesentlichen mit θ/θ_i identisch, wenn wir mit θ_i die Gesamtheit der Automorphismen in θ bezeichnen, die in G/N_i die Identität induzieren. Da θ nach Voraussetzung in G/N_1 die Identität induziert, so ist $\theta = \theta_1$ oder $\theta/\theta_1 = 1$; und aus $N_k = 1$ folgt $\theta_k = 1$ oder $\theta/\theta_k = \theta$.

Wir werden nun durch vollständige Induktion bezüglich i beweisen, daß jede der Automorphismengruppen θ/θ_i eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges ist. Da dies sicher für $i = 1$ wahr ist, so können wir annehmen, daß $1 < i$ und θ/θ_{i-1} eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges ist. Wir setzen $H = G/N_i$ und $N = N_{i-1}/N_i$. Dann ist H [wie auch G] eine Gruppe endlichen Ranges, N ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges und $N \leq Z(H)$. Weiter bezeichnen wir mit A die von θ in H induzierte Automorphismengruppe, die ja im wesentlichen mit θ/θ_i identisch ist. Es folgt aus unserer Voraussetzung, daß die Automorphismen in A alle Elemente in N invariant lassen. Schließlich bezeichnen wir mit Δ die Gesamtheit der Automorphismen in A , die in H/N die Identität induzieren. Es ist klar, daß Δ ein Normalteiler von A ist. Da H/N im wesentlichen mit G/N_{i-1} identisch ist, so ist A/Δ im wesentlichen mit θ/θ_{i-1} identisch; und es folgt aus der Induktionsannahme, daß A/Δ eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges ist.

Die Faktorgruppe der abelschen Gruppe H/H' nach ihrer Torsionsuntergruppe bezeichnen wir mit H^* , so daß also H^* eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist. Ist nun σ ein Automorphismus in A , h ein Element in H , so ist $h(\sigma - 1)$ ein Element in N . Bedenken wir nun, daß $N \leq Z(H)$ ist, so wird

$$(x + y)(\sigma - 1) = x\sigma + y\sigma - y - x = x\sigma + y(\sigma - 1) - x = x(\sigma - 1) + y(\sigma - 1),$$

so daß also $\sigma - 1$ ein Homomorphismus von H in N ist. Da aber N eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, so induziert $\sigma - 1$ auch einen Homomorphismus von H^* in N ; und damit haben wir ein-ein-deutige Abbildung von Δ auf eine Menge von Homomorphismen von H^* in N erhalten. Sind σ und τ Automorphismen in Δ und ist h ein Element in H , so wird

$$h(\sigma\tau - 1) = h\sigma\tau - h\tau + h\tau - h = h(\sigma - 1)\tau + h(\tau - 1) = h(\sigma - 1) + h(\tau - 1),$$

da $h(\sigma - 1)$ zu N gehört und Elemente in N von Automorphismen in Δ invariant gelassen werden. Damit haben wir gezeigt, daß die Abbildung von σ auf $\sigma - 1$ einen Isomorphismus von Δ auf eine Gruppe von Homomorphismen von H^* in N bewirkt.

Ist nun \mathcal{E} irgendeine Gruppe von Homomorphismen von H^* in N , so erhalten wir für jedes x in H^* einen Homomorphismus von \mathcal{E} in N , indem wir σ in \mathcal{E} auf $x\sigma$ in N abbilden. Den Kern dieses Homomorphismus wollen wir mit $\mathcal{E}(x)$ bezeichnen. Da $\mathcal{E}/\mathcal{E}(x)$ mit der Untergruppe $x\mathcal{E}$ der torsionsfreien abelschen Gruppe N endlichen Ranges isomorph ist, so ist auch $\mathcal{E}/\mathcal{E}(x)$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Da H^* eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so existiert eine endliche Teilmenge E von H^* derart, daß $H^*/\{E\}$ eine Torsionsgruppe ist. Gehört nun der Endomorphismus σ in \mathcal{E} jedem der $\mathcal{E}(e)$ mit e in E an, so ist $E\sigma = 0$; und σ bildet also H^* auf eine Torsionsgruppe ab. Da aber N torsionsfrei ist, so wird $\sigma = 0$, so daß

$$0 = \bigcap_{e \in E} \mathcal{E}(e)$$

ist. Daraus folgt schließlich, daß \mathcal{E} einer Untergruppe der direkten Summe der endlich vielen $\mathcal{E}/\mathcal{E}(e)$ isomorph ist. Da aber jede dieser Faktorgruppen eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so ist auch \mathcal{E} eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges.

Da Δ einer Gruppe von Homomorphismen von H^* in N isomorph ist, so ist also auch Δ eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Da Δ/Δ ebenfalls eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges ist, so ist auch Δ und die isomorphe Gruppe Θ/Θ_i torsionsfrei und von endlichem Rang. Damit ist unser Induktionsbeweis beendet; und es folgt insbesondere, daß Θ selbst torsionsfrei und von endlichem Rang ist, q.e.d.

Hauptsatz 2: Ist Φ eine auflösbare Automorphismengruppe der ${}^nG = 1$ erfüllenden, torsionsfreien Gruppe G endlichen Ranges, so existiert ein Normalteiler Θ von Φ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Θ ist torsionsfrei; der Rang von Θ ist endlich und ${}^m\Theta = 1$ für geeignetes positives m .

(b) Φ/Θ besitzt eine abelsche charakteristische Untergruppe von endlichem Index und die Torsionsuntergruppen von Φ/Θ sind endlich.

Weiter ist $\Phi^{(k)} = 1$ für geeignetes positives k .

Beweis: Aus ${}^nG = 1$ folgt bekanntlich, daß die aufsteigende Zentrenkette von G nach n Schritten in G endet: $G = Z_n(G)$. Aus der Torsionsfreiheit von G folgt die aller Faktorgruppen $G/Z_i(G)$; siehe etwa BAER [3, p. 200, Corollary 1]. Aus der Endlichkeit des Ranges von G folgt, daß jede Faktor-

gruppe $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist. Da jedes $Z_i(G)$ als charakteristische Untergruppe Φ -zulässig ist, so folgt aus diesen Bemerkungen die Existenz einer längsten endlichen Kette von Normalteilern N_i von G mit folgenden Eigenschaften:

$$1 = N_m, \quad [N_{i-1}, G] \leq N_i \leq N_{i-1}, \quad N_0 = G,$$

jede Faktorgruppe N_{i-1}/N_i ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges,

jedes N_i ist Φ -zulässig.

Wir bezeichnen dann mit Θ die Gesamtheit der Automorphismen in Φ , die in jedem N_{i-1}/N_i die Identität induzieren. Es ist klar, daß Θ ein Normalteiler von Φ ist; und es folgt aus Hilfssätzen 1 und 2, daß Θ alle Eigenschaften (a) hat.

Wir bezeichnen mit Φ_i die Gesamtheit der Automorphismen in Φ , die in N_{i-1}/N_i die Identität induzieren. Dann ist Φ_i ein Normalteiler von Φ ; und Φ/Φ_i ist im wesentlichen mit der von Φ in N_{i-1}/N_i induzierten Automorphismengruppe identisch. Aus der Definition von Θ und der der Φ_i folgt

$$\Theta = \Phi_1 \cap \cdots \cap \Phi_m,$$

so daß also Φ/Θ einer Untergruppe des direkten Produkts der Φ/Φ_i isomorph ist.

Ist U eine zwischen N_i und N_{i-1} liegende, Φ -zulässige Untergruppe von G , so ist U ein Normalteiler von G (da ja N_{i-1}/N_i im Zentrum von G/N_i enthalten ist); und es folgt aus der Maximalität der Länge m der Kette N_i , daß entweder $U = N_i$ oder N_{i-1} ist oder aber N_{i-1}/U nicht torsionsfrei ist. Folglich induziert Φ in N_{i-1}/N_i eine primitive Automorphismengruppe Φ/Φ_i . Aus Hauptsatz 1 und § 2, Folgerung 3 folgt nun leicht, daß Φ/Φ_i eine abelsche charakteristische Untergruppe von endlichem Index besitzt und daß Torsionsuntergruppen von Φ/Φ_i endlich sind, wenn wir nur bedenken, daß aus der vorausgesetzten Auflösbarkeit von Φ die von Φ/Φ_i folgt. Da aber Φ/Θ einer Untergruppe des direkten Produkts der Φ/Φ_i isomorph ist, so hat Φ/Θ die Eigenschaften (b) [§ 3, Folgerung 1].

Aus (a) und (b) und der Auflösbarkeit von Φ erschließt man mühelos die Existenz einer positiven ganzen Zahl k derart, daß $\Phi^{(k)} = 1$ ist.

5. Noethersche auflösbare Gruppen.

Wir wollen eine Gruppe *noethersch* nennen, wenn alle ihre Untergruppen endlich erzeugbar sind; und diese Eigenschaft ist äquivalent mit der Maximalbedingung für Untergruppen. Ist eine Gruppe noethersch, so sind insbesondere ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar, während die Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist, wie man aus dem Beispiel der nicht-abelschen freien Gruppen ersieht. Zu beweisen, daß auflösbare Gruppen noethersch sind, wenn ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind, ist das Thema dieses Paragraphen.

Lemma 1: *Ist die Additionsgruppe des Integritätsbereichs R eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges, so ist die Einheitengruppe von R endlich erzeugbar.*

Beweis: Ist r ein Element in R , so betrachten wir die folgende aufsteigende Kette von Untergruppen der Additionsgruppe R_+ :

$$\{1\} \leq \{1, r\} \leq \dots \leq \{1, r, \dots, r^i\} \leq \dots$$

Da R_+ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, die so gilt die Maximalbedingung in R_+ und aufsteigende Untergruppenketten brechen nach endlich vielen Schritten ab. Also gibt es eine positive ganze Zahl n derart, daß r^n in der Untergruppe $\{1, r, \dots, r^{n-1}\}$ von R_+ liegt; und folglich gibt es ganze Zahlen c_i derart, daß $r^n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i r^i$ ist. Jedes Element in dem Integritäts-

bereich R ist also eine ganze algebraische Zahl. Da R_+ endlich erzeugbar ist, so ist R also ein Integritätsbereich ganzer algebraischer Zahlen aus einer endlichen Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen. Wir können also den Dirichletschen Einheitensatz anwenden, um zu sehen, daß die Einheitsgruppe von R als Untergruppe einer endlich erzeugbaren Gruppe (nämlich der Einheitsgruppe des Ringes aller algebraischen Zahlen in einem endlichen Zahlkörper) selbst endlich erzeugbar ist.

Hilfssatz 1: Wenn N ein endlich erzeugbarer abelscher Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G ist, und wenn die Automorphismengruppe Θ von G in N und in G/N die Identität induziert, dann ist Θ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe.

Beweis: Ist g in G und sind σ, τ in Θ , so ist $g(\sigma - 1)$ in N und $g(\sigma - 1)(\tau - 1) = 0$. Aus der Kommutativität von N folgt dann

$$g(\sigma\tau - 1) = g(\sigma - 1) + g(\tau - 1) = g(\tau - 1) + g(\sigma - 1) = g(\tau\sigma - 1),$$

so daß insbesondere Θ abelsch ist. Weiter erhalten wir für jedes Element g in G einen Homomorphismus von Θ in N , wenn wir das Element σ in Θ auf das Element $g(\sigma - 1)$ in N abbilden. Der Kern $\Theta(g)$ dieses Homomorphismus besteht aus allen g invariant lassenden Automorphismen in Θ ; und $\Theta/\Theta(g)$ ist eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, da ja $\Theta/\Theta(g)$ der Untergruppe $g(\Theta - 1)$ der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe N isomorph ist.

Sei E ein endliches Erzeugendensystem von G . Dann ist klar, daß

$$1 = \bigcap_{e \in E} \Theta(e)$$

ist; und daraus folgt, daß Θ einer Untergruppe des direkten Produkts der endlich vielen Faktorgruppen $\Theta/\Theta(e)$ für e in E isomorph ist. Da aber jede der Faktorgruppen $\Theta/\Theta(e)$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, so gilt dasselbe von dem direkten Produkt der endlich vielen Faktorgruppen $\Theta/\Theta(e)$; und die Untergruppen dieses direkten Produkts sind also auch endlich erzeugbare abelsche Gruppen. Also ist Θ selbst eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, q.e.d.

Satz 1: Abelsche Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen sind endlich erzeugbar.

Beweis: Ist Φ eine abelsche Automorphismengruppe der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe A , so gibt es Φ -zulässige Untergruppen X von A ,

in denen Φ eine endlich erzeugbare abelsche Automorphismengruppe induziert, z. B. $X = 1$. Da die Maximalbedingung von den Untergruppen der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe A erfüllt wird, so existiert eine maximale, Φ -zulässige Untergruppe M von A , in der Φ eine endlich erzeugbare Automorphismengruppe induziert. Wir wollen zeigen, daß $M = A$ ist; und nehmen also an, daß $M < A$ ist.

Ist A/M nicht torsionsfrei, so bildet die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in A/M eine endliche, charakteristische Untergruppe B/M von A/M . Es ist klar, daß B ebenfalls Φ -zulässig ist und daß Φ in $B/M \neq 1$ eine endliche Automorphismengruppe induziert. — Ist aber A/M torsionsfrei, so ist A/M eine freie abelsche Gruppe endlichen positiven Ranges. Unter den Φ -zulässigen Untergruppen von A/M gibt es eine B/M von kleinstem positivem Range. Φ induziert in B/M eine primitive Automorphismengruppe (nach § 2, Lemma 3). Der von dieser Automorphismengruppe von B/M erzeugte Endomorphismenring E ist ein Integritätsbereich, dessen Additionsgruppe E_+ einer Untergruppe von B/M isomorph ist (nach § 2, Lemma 4). Da B/M eine freie abelsche Gruppe endlichen positiven Ranges ist, so ist auch E_+ eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Es folgt aus Lemma 1 (Dirichletscher Einheitsatz), daß die Einheitengruppe von E endlich erzeugbar ist. Da die von Φ in B/M induzierte Automorphismengruppe eine Gruppe von Einheiten in E ist, so ist auch diese Gruppe endlich erzeugbar. In beiden Fällen haben wir also folgendes gezeigt:

Es gibt eine Φ -zulässige Untergruppe B von A derart, daß $M < B$ ist und derart, daß Φ in B/M eine endlich erzeugbare Automorphismengruppe induziert.

Wir bezeichnen mit Θ die von Φ in B induzierte Automorphismengruppe. Weiter sei Θ^* die Gesamtheit der Automorphismen, die in B/M die Identität induzieren; und Θ^{**} bezeichne die Gesamtheit der Automorphismen, die jedes Element in M invariant lassen. Dann ist Θ/Θ^* im wesentlichen mit der von Φ in B/M induzierten Automorphismengruppe identisch; und es folgt aus unserer Wahl von B , daß Θ/Θ^* endlich erzeugbar ist. Weiter ist Θ/Θ^{**} im wesentlichen mit der von Φ in M induzierten Automorphismengruppe identisch; und es folgt aus unserer Wahl von M , daß Θ/Θ^{**} endlich erzeugbar ist. Dann ist aber auch $\Theta/(\Theta^* \cap \Theta^{**})$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe. Da B und M als Untergruppen der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe A selbst endlich erzeugbar sind und da die Automorphismen in $\Theta^* \cap \Theta^{**}$ in M und B/M die Identität induzieren, so folgt aus Hilfssatz 1, daß $\Theta^* \cap \Theta^{**}$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist. Mithin ist auch Θ endlich erzeugbar. Damit ist gezeigt, daß Φ in B die endlich erzeugbare Automorphismengruppe Θ induziert. Da aber $M < B$ ist, so widerspricht dies unserer maximalen Wahl von M . Aus diesem Widerspruch folgt $M = A$ und die endliche Erzeugbarkeit von Φ .

Der Kürze halber wollen wir eine Gruppe *fast-noethersch* nennen, wenn alle ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind. Es ist eine Folge von Satz 1, daß Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher

Gruppen fast-noethersch sind. Bemerken wir weiter, daß die Vereinigungsmengen aufsteigender Folgen abelscher Untergruppen ebenfalls abelsche Untergruppen sind, so sehen wir, daß eine Gruppe G dann und nur dann fast-noethersch ist, wenn die Maximalbedingung von ihren abelschen Untergruppen erfüllt wird.

Lemma 2: *Ist N ein abelscher Normalteiler der fast-noetherschen Gruppe G , so ist auch G/N fast-noethersch.*

Beweis: Jede abelsche Untergruppe von G/N hat die Form U/N ; und es ist klar, daß mit G auch U fast-noethersch ist. Da N abelsch ist, so existiert eine maximale, N enthaltende, abelsche Untergruppe V von U ; und da U/N abelsch ist, so ist V ein Normalteiler von U . Da U fast-noethersch ist, so ist die abelsche Untergruppe V von U endlich erzeugbar. Da V eine maximale abelsche Untergruppe von U ist, so ist V seinem Zentralisator in U gleich. Da V ein Normalteiler von U ist, so ist also U/V im wesentlichen mit der von U in V induzierten Automorphismengruppe identisch. Da U/V als homomorphes Bild von U/N abelsch ist, so können wir Satz 1 anwenden. Die abelsche Automorphismengruppe U/V der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe V ist also selbst endlich erzeugbar. Da U/V und V endlich erzeugbar sind, so ist auch U endlich erzeugbar; und daraus folgt die endliche Erzeugbarkeit von U/N , q.e.d.

Folgerung 1: *Ist G fast-noethersch und $G^{(\infty)} = 1$, so ist G noethersch.*

Dies folgt durch ein naheliegendes induktives Argument aus Lemma 2, wenn man nur bedenkt, daß endlich erzeugbare abelsche Gruppen noethersch sind.

Satz 2: *Auflösbare Automorphismengruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen sind noethersch.*

Beweis: Es sei Φ eine auflösbare Automorphismengruppe der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe A . Ist T die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in A , so ist T eine endliche charakteristische Untergruppe von A , die natürlich auch Φ -zulässig ist. Bezeichnen wir mit Θ die Gesamtheit der Automorphismen aus Φ , die jedes Element in T invariant lassen, so ist Θ ein Normalteiler von Φ und Φ/Θ ist im wesentlichen mit der von Φ in T induzierten Automorphismengruppe identisch, die natürlich endlich ist.

Bezeichnen wir mit A die Gesamtheit der Automorphismen aus Φ , die in A/T die Identität induzieren, so ist A ein Normalteiler von Φ und Φ/A ist im wesentlichen mit der von Φ in A/T induzierten Automorphismengruppe identisch. Da T die Torsionsuntergruppe der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe A ist, so ist A/T eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges; und Φ/A ist eine auflösbare Automorphismengruppe dieser freien abelschen Gruppe endlichen Ranges. Φ/A ist fast-noethersch (Satz 1); und aus § 4, Hauptsatz 2 folgt die Existenz einer positiven ganzen Zahl n derart, daß $[\Phi/A]^{(n)} = 1$ ist. Wir können also Folgerung 1 anwenden, um zu sehen, daß Φ/A noethersch ist.

Da Θ und A Normalteiler von Φ sind, so ist auch $\Theta \cap A$ ein Normalteiler von Φ . Da Φ/Θ endlich und Φ/A noethersch ist, so ist auch $\Phi/[\Theta \cap A]$ noethersch.

Automorphismen aus $\Theta \cap A$ induzieren die Identität in T und A/T . Da A endlich erzeugbar und T eine endliche abelsche Gruppe ist, so können wir Hilfssatz 1 anwenden, um zu zeigen, daß $\Theta \cap A$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist — man könnte sogar die Endlichkeit von $\Theta \cap A$ herleiten. Also sind $\Theta \cap A$ und $\Phi/[\Theta \cap A]$ beide noethersch, so daß Φ selbst noethersch ist, q.e.d.

Bemerkung: Beim Beweise der Sätze 1 und 2 könnte man auch SIEGELS tiefliegende Verallgemeinerung des Dirichletschen Einheitensatzes heranziehen.

Hauptsatz 3: *Auflösbare Automorphismengruppen auflösbarer noetherscher Gruppen sind noethersch.*

Dieses Resultat enthält offenbar die Sätze 1 und 2 als Spezialfälle.

Beweis: Wäre Hauptsatz 3 falsch, so gäbe es eine nicht-noethersche auflösbare Automorphismengruppe Φ einer noetherschen auflösbaren Gruppe G . Diese Gruppe G enthält Φ -zulässige Normalteiler X derart, daß Φ in G/X eine nicht-noethersche Automorphismengruppe induziert, z. B. $X = 1$; und unter diesen Normalteilern X gibt es einen maximalen M , da ja G noethersch ist.

In $H = G/M$ induziert Φ eine Automorphismengruppe Θ , die als homomorphes Bild von Φ auflösbar ist. Aus der Wahl von M folgt, daß Θ nicht-noethersch ist und daß Θ in H/Y eine noethersche Automorphismengruppe induziert, wenn nur Y ein von 0 verschiedener, Θ -zulässiger Normalteiler von H ist. Natürlich ist $H \neq 0$.

Mit G ist auch H auflösbar und noethersch. Also existiert eine positive ganze Zahl n derart, daß $H^{(n)} = 0 < H^{(n-1)}$ ist. Dann haben wir in $H^{(n-1)}$ eine von 0 verschiedene, abelsche, charakteristische Untergruppe W von H gefunden, die natürlich auch Θ -zulässig ist.

Wir bezeichnen mit Θ^* die Gesamtheit der Automorphismen aus Θ , die in H/W die Identität induzieren. Dann ist Θ^* ein Normalteiler von Θ und Θ/Θ^* ist im wesentlichen mit der von Θ in H/W induzierten Automorphismengruppe identisch. Daß diese noethersch ist [als Folge der maximalen Wahl von M], haben wir schon früher bemerkt.

Wir bezeichnen mit Θ^{**} die Gesamtheit der Automorphismen aus Θ , die jedes Element in W invariant lassen. Dann ist Θ^{**} ein Normalteiler von Θ und Θ/Θ^{**} ist im wesentlichen mit der von Θ in W induzierten Automorphismengruppe identisch. W ist endlich erzeugbar als Untergruppe der noetherschen Gruppe H ; und W ist seiner Wahl nach abelsch. Θ/Θ^{**} ist mit Θ [und Φ] auflösbar. Anwendung von Satz 2 zeigt, daß Θ/Θ^{**} noethersch ist.

$\Theta^* \cap \Theta^{**}$ ist ein Normalteiler von Θ und $\Theta/[\Theta^* \cap \Theta^{**}]$ ist noethersch, da Θ/Θ^* und Θ/Θ^{**} ja beide noethersch sind. Jeder Automorphismus in $\Theta^* \cap \Theta^{**}$ induziert die Identität in W und H/W . Da H noethersch und W abelsch ist, so können wir Hilfssatz 1 anwenden. Es folgt, daß $\Theta^* \cap \Theta^{**}$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist. Da also $\Theta^* \cap \Theta^{**}$ und $\Theta/[\Theta^* \cap \Theta^{**}]$ beide noethersch sind, so ist auch Θ noethersch; und damit sind wir zu dem gesuchten Widerspruch gelangt, q.e.d.

Hauptsatz 4: *Auflösbare fast-noethersche Gruppen sind noethersch.*

Beweis: Wäre die auflösbare fast-noethersche Gruppe G nicht noethersch, so könnten wir eine unendliche aufsteigende Folge von Normalteilern N_i von G derart konstruieren, daß

$$1 = N_0 < \dots < N_{i-1} < N_i < \dots \text{ und } N_i/N_{i-1} \text{ abelsch}$$

ist. Die Vereinigungsmenge N der N_i ist ein Normalteiler von G . Es existiert eine maximale abelsche Untergruppe W von N . Da G fast-noethersch ist, so ist W endlich erzeugbar; und da W in der Vereinigung N der N_i enthalten ist, so existiert ein Index k derart, daß $W \leq N_k$ ist. Bezeichnen wir mit K den Zentralisator von N_k in N , so folgt $K \leq W$ aus der Maximalität der abelschen Untergruppe W von N . Da $N_k^{(k)} = 1$ und G , und also auch N_k , fast-noethersch ist, so schließen wir aus Folgerung 1, daß N_k eine noethersche auflösbare Gruppe ist. Weiter ist K ein Normalteiler von N und N/K ist im wesentlichen mit der von N in N_k induzierten Automorphismengruppe identisch. Da N auflösbar ist, so ist N/K eine auflösbare Gruppe von Automorphismen der noetherschen und auflösbaren Gruppe N_k . Es folgt aus Hauptsatz 3, daß N/K noethersch ist. Da $K \leq W \leq N_k$ ist, so ist auch N/N_k noethersch und die aufsteigende Kette der N_i muß nach endlich vielen Schritten abbrechen. Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt und Hauptsatz 4 ist bewiesen.

Folgerung 2: *Das Produkt aller auflösbaren Normalteiler einer fast-noetherschen Gruppe ist auflösbar und noethersch.*

Beweis: Ist N ein auflösbarer Normalteiler der fast-noetherschen Gruppe G , so ist N noethersch [nach Hauptsatz 4] und es existiert also eine positive Zahl n derart, daß $N^{(n)} = 1$ ist. Nun überzeugt man sich ohne Mühe davon, daß das Produkt aller auflösbaren Normalteiler von G auflösbar ist, und aus Hauptsatz 4 folgt wieder, daß dieses Produkt noethersch ist.

University of Illinois Urbana, Illinois (USA).

Literatur.

- BAER, REINHOLD: [1] Finiteness properties of groups. *Duke Math. J.* 15, 1021—1032 (1948). — [2] Endlichkeitakriterien für Kommutatorgruppen. *Math. Ann.* 124, 161—177 (1952). — [3] The hypercenter of a group. *Acta math.* 89, 165—208 (1953). — MAL'ZEV, I. A.: [1] Über einige Klassen von unendlichen auflösbaren Gruppen (russisch). *Mat. Sbornik, N.S.* 28, 567—588 (1951). — SIEGEL, C. L.: [1] Discontinuous groups. *Ann. of Math.* 44, 674—689 (1943). — SMIRNOW, D. M.: [1] Automorphismen auflösbarer Gruppen (russ.). *Doklady Akad. Nauk SSSR, N.S.* 84, 891—894 (1952). — [2] Über die Automorphismen der abelschen Gruppen (russ.). *Mat. Sbornik, N.S.* 32, 365—384 (1953).

(Eingegangen am 6. August 1954.)

The Iteration of Entire Transcendental Functions and the Solution of the Functional Equation $f\{f(z)\} = F(z)$.

By

I. N. BAKER in Adelaide.

1. Introduction.

Let $F(z)$ be an entire analytic function. Define the n -th iterate of $F(z)$:

$$(1) \quad F_0(z) = z, \quad F_{n+1}(z) = F\{F_n(z)\} = F_n\{F(z)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

These iterates of positive integral order are entire functions satisfying the functional equations

$$(2) \quad F_m\{F_n(z)\} = F_n\{F_m(z)\} = F_{m+n}(z)$$

where m and n are positive integers. One may also introduce the iterates of negative integral order by writing $F_{-m}(z)$ for the inverse function of $F_m(z)$. Thereby many-valued functions are introduced but the equations (2) remain valid for a suitable choice of branches.

SCHRÖDER [1], [2] originally studied the "natural" iterates (i. e. those of integral order) with a view to finding for $F_n(z)$ a closed analytic expression containing n as a parameter. The iterates of non-integral order then appeared simply by assigning non-integral values to this parameter. A modern work which treats iterates of "complex order" is that of TÖPPER [3]. JULIA [4] and FAROU [5], [6] have made a thorough investigation of the natural iteration of rational and entire functions, relying on MONTEL's theory of normal sequences of analytic functions.

In the following we shall be interested in (analytic) solutions $f(z)$ of the functional equation

$$(3) \quad f\{f(z)\} = F(z), \quad F(z) \text{ entire.}$$

The problem which forms the basis of this paper is:

What restrictions must be placed on $F(z)$ if there are to be entire solutions $f(z)$?

The main theorem 1 bears directly upon this point, and in section 3 we discuss some cases not covered by the theorem. In the final section some applications of theorem 1 are made, in particular to discussing further KNESER's [7] treatment of the case $F(z) = e^z$.

2. The Case Where $F(z)$ is of Finite Order and Bounded on a Curve Leading to Infinity.

Theorem 1. If $F(z)$ is an entire function of finite order bounded on some continuous curve Γ which extends to infinity, then the functional equation

$$(3) \quad f\{f(z)\} = F(z)$$

has no entire solution.

Proof: If $f(z)$ is an entire solution of (3) it must be of zero order, as follows from the following result of FATOU [6, p. 343]:

Let $E(z)$, $F(z)$ be two entire transcendental functions. On $|z| = r$ the maximum modulus of $E(z)$ is $M(r)$, that of $E\{F(z)\}$ is $M_1(r)$. Then however large we choose the positive constant q , we have for certain arbitrarily large values of r :

$$M_1(r) > M(r^q).$$

It follows that if $a > 0$ be the order of $f(z)$, the order of $F(z)$ is greater than $q(a - \varepsilon)$ however large q and however small ε ; i. e. $F(z)$ is of infinite order, against assumption.

Now consider the behaviour of $f(z)$ on Γ . Either $f(z)$ is bounded on Γ or it maps Γ on to a continuous curve χ which extends to infinity. But $F(z) = f\{f(z)\}$ is bounded on Γ so that in the latter case $f(z)$ is bounded on χ , and in either event $f(z)$ is bounded on a continuous curve extending to infinity, which is impossible for an entire function whose order is less than $\frac{1}{2}$ — one recalls the result [8, p. 274] that for a function $g(z)$ with this property there is a sequence of values of r tending to infinity through which

$$\min_{|z|=r} |g(z)| \rightarrow \infty.$$

Corollary. If $F(z)$ is of finite order and there is an exceptional value A which $F(z)$ takes at most a finite number of times, then (3) has no entire solution. For such an exceptional value is an asymptotic value [9, p. 34] and on the curve extending to infinity along which $F(z)$ tends to A , $F(z)$ will be bounded.

3. Cases not Treated in the Last Section.

It is obvious that there are functions $F(z)$ such that $f(z)$ may be entire: $\exp(\exp z)$ is such a function, but its order is infinite. The question arises as to whether this is possible when $F(z)$ is of finite order, and this is answered by the provision of examples which demonstrate the possibility. In fact we can prove the

Theorem 2. There exist entire functions $f_1(z)$, $f_2(z)$ and $f_3(z)$ of zero order such that

- (i) $f_1\{f_1(z)\}$ is of zero order
- (ii) $f_2\{f_2(z)\}$ is of infinite order
- (iii) $f_3\{f_3(z)\}$ is of finite non-zero order.

Remarks: Where it is necessary to check the order of the functions introduced below one uses the result that if ρ is the order of the function $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, one has [10, p. 40]

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n}.$$

Use is made of the notations with respect to $f(z) = \sum a_n z^n$:

$\mu(r)$: the maximum term of the sequence $|a_n| r^n$.

$\nu(r)$: the central index, the index of the maximum term.

$M(r)$: the maximum for $|z| = r$ of $|f(z)|$.

$M'(r)$: the maximum for $|z| = r$ of $|f'(z)|$.

It is to be noted that these four functions are monotone increasing.

We reserve square brackets to have the meaning: $[A]$ is the greatest integer not exceeding A .

The discussion depends on the lemma:

$$(4) \quad \mu(r) < M(r) < \mu(r) \left\{ 1 + 2 \nu \left(r + \frac{r}{\nu(r)} \right) \right\},$$

proved in [9, p. 32] and the fact that we deal with functions for which the coefficients a_n are real and positive, so that

$$M(r) = f(r), \quad M'(r) = f\{f(r)\} = M\{M(r)\}.$$

Proof of Theorem 2.

$$(i) \quad \text{Take } f_1(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\exp(n^2)}$$

For $r > 1$: $\nu(r) = \left[\frac{1 + \log r}{2} \right]$

$$\mu(r) = \frac{r^{\left[\frac{1 + \log r}{2} \right]}}{\exp \left\{ \left[\frac{1 + \log r}{2} \right]^2 \right\}} \leq \frac{r^{\frac{1 + \log r}{2}}}{\exp \left\{ \left(\frac{\log r - 1}{2} \right)^2 \right\}}.$$

A simple consideration of (4) shows that for all large enough r

$$M(r) < \exp \left\{ \frac{1}{2} (\log r)^2 \right\}$$

and

$$M'(r) < \exp \left\{ \frac{1}{8} (\log r)^4 \right\},$$

so that the order of $f_1\{f_1(r)\}$ is 0.

$$(ii) \quad \text{Take } f_2(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{\exp \{n(\log n)^2\}}.$$

Now for continuous n , $\exp \{n \log r - n(\log n)^2\}$ has its maximum where $n = n(r) = \exp \left(-1 + \sqrt{1 + \log r} \right) > \exp \left(\frac{1}{2} \sqrt{\log r} \right)$ for $r > e^{1/2}$.

Certainly

$$\begin{aligned} \mu(r) &\geq \exp \{[n(r)] \log r - [n(r)] (\log [n(r)])^2\} \\ &\geq \exp \{(n(r) - 1) (\log r - \log n(r) \cdot \log n(r))\} \\ &> \exp \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \sqrt{\log r} \right) \right\} \text{ for sufficiently large } r. \end{aligned}$$

From (4)

$$M'(r) > \mu\{\mu(r)\} > \exp \left\{ \exp \frac{1}{2} \sqrt{\exp \sqrt{\frac{1}{4} \log r}} \right\}$$

which is not bounded by any expression of the form $\exp(r^A)$ and shows that $f_2\{f_2(z)\}$ is of infinite order.

(iii) We deal now with the comparatively intricate problem of constructing such an $f_3(z)$ that $f_3\{f_3(z)\}$ has finite non-zero order. The first step here is to

produce a suitable real (nonanalytic) function $\Phi(r)$ satisfying $\Phi\{\Phi(r)\} = e^r$. By taking a series with positive coefficients, for which $\mu(r)$ is fairly close to $\Phi(r)$, a satisfactory $f_3(z)$ is obtained as is suggested by (4). Firstly then we prove the

Lemma: There is a continuously differentiable function $\Phi(r)$ such that $\Phi(\Phi(r)) = e^r$ and the four functions $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$, $\frac{\Phi(r)}{r}$ and $\frac{r\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ all tend monotonely (for $r > 1$) to infinity with r . We introduce the notation: I_0 is the interval $0 \leq r \leq 1$. In general I_n is defined inductively: I_{n+1} is the image of I_n under the mapping $x \rightarrow e^x$. $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ covers the positive real line. We assert that the conditions of the lemma are satisfied by the function defined in I_0 by

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= r + \frac{1}{2} & 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ &= \exp(r - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq r \leq 1\end{aligned}$$

and defined in I_n generally by repeated application of the relation

$$(5) \quad \Phi(e^r) = \exp\{\Phi(r)\}.$$

Thus, for example, in I_1 :

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= e^{1/2} r, & 1 \leq r \leq e^{1/2} \\ &= \exp(e^{-1/2} r), & e^{1/2} \leq r \leq e\end{aligned}$$

Obviously in I_0 : $\Phi\{\Phi(r)\} = e^r$, and it then follows from (5) that this is so in every I_n .

Now the four functions mentioned in the lemma are all continuous and monotone increasing in I_1 . Using the method of induction, suppose this is true in any I_n . Differentiating (5) gives

$$\frac{e^r \Phi'(e^r)}{\Phi(e^r)} = \Phi'(r),$$

so that $\frac{r\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ is continuous and monotone increasing in I_{n+1} . A similar result follows for the other functions from the identities

$$\frac{\Phi(e^r)}{e^r} = \exp\{\Phi(r) - r\}$$

and $\Phi'(e^r) = \Phi'(r) \exp\{\Phi(r) - r\}$. Since the functions increase monotonely with r , they either tend to infinity or are bounded and tend to a finite limit. In each case the latter supposition conflicts with the fact that $\Phi\{\Phi(r)\} = e^r$.

Thus for example if $\frac{r\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ tends to l as r tends to infinity:

$$r = \frac{r \frac{d}{dr}(e^r)}{e^r} = r \frac{\Phi'\{\Phi(r)\}}{\Phi\{\Phi(r)\}} \Phi(r) \frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)} \rightarrow l^2$$

as $r \rightarrow \infty$, since $\Phi(r) \rightarrow \infty$ monotonely with r ; but this is obviously false.

If $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$ or $\frac{\Phi(r)}{r}$ are bounded then certainly there is a K such that $\Phi(r) < Kr$ and $e^r = \Phi\{\Phi(r)\} < K^2 r$ which is impossible. This completes the proof of the lemma.

The function $f_3(z)$. The functions $\mu(r)$, $\nu(r)$ defined above are connected by the relation

$$(6) \quad \log \mu(r) = \log |a_0| + \int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx$$

where $a_0 \neq 0$ is the constant term in the expansion of the relevant entire function. $\nu(r)$ is a (monotonely increasing) step function with a denumerably infinite set of isolated discontinuities $r_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, at each of which $\nu(r)$ increases by an integer. As VALIRON [10, p. 28—30] shows, to any such $\nu(r)$ given in advance one can construct a number of entire functions which have $\nu(r)$ as their central index function. For a given choice of $|a_0| \neq 0$, it is possible to find one of these whose coefficients are real and positive and which is in fact a majorant of all similar functions. Having chosen $\nu(r)$ and a_0 it is this function which, for definiteness, we shall use for $f_3(z)$.

We choose for $\nu(r)$:

$$\nu(r) = 1 + \left[\frac{r\Phi'(r)}{\Phi(r)} \right], \quad r \geq 1 \\ = 0, \quad 0 \leq r < 0.1 \\ = 2, \quad 0.1 \leq r < 1$$

Then

$$\int_0^e \frac{\nu(x)}{x} dx > \int_0^e \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx$$

and

$$\int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx > \int_0^r \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx, \quad r > e.$$

When one makes $a_0 = \frac{1}{2}$, (6) becomes

$$\log \mu(r) = \log \frac{1}{2} + \int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx > \log \frac{1}{2} + \int_0^r \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx > \log \Phi(r), \quad r > e.$$

Then $M'(r) > \mu\{\mu(r)\} > \Phi\{\Phi(r)\} = e^r$. But on the other hand

$$\log \mu(r) < \log \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\nu(x)}{x} dx + \int_1^r \left\{ \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} + \frac{1}{x} \right\} dx,$$

so that for some positive K

$$\mu(r) < K r \Phi(r).$$

For all $r > 0.1$, $\nu(r) > 1$, so that from (4) and the line above:

$$M(r) < K r \Phi(r) \left\{ 1 + 2 + 2(r+1) \frac{\Phi'(r+1)}{\Phi(r+1)} \right\} < 3 K r^2 \frac{\Phi'(r+1)}{\Phi(r+1)} \Phi(r)$$

for large enough r .

$$\text{Now } \Phi\{\Phi(r)\} = e^r = \frac{d}{dr}(e^r) = \Phi'\{\Phi(r)\} \cdot \Phi'(r)$$

from which one sees that $\Phi'(r) < \Phi(r)$ for all $r > 1$; so that:

$$(7) \quad M(r) < 3K r^2 \Phi(r).$$

However small $\delta > 0$ may be,

$$r \frac{d}{dr} \left\{ \log \frac{\Phi(r^{1+\delta})}{\Phi(r)} \right\} = (1+\delta) r^{1+\delta} \frac{\Phi'(r^{1+\delta})}{\Phi(r^{1+\delta})} - \frac{r \Phi(r)}{\Phi(r)}$$

tends to infinity with r , and so remains greater than arbitrarily large N for $r > r(N)$. A simple integration shows that there exists a positive real C such that

$$\Phi(r^{1+\delta}) > C r^N \Phi(r), \quad r > r(N).$$

With this result (7) becomes

$$(8) \quad M(r) < \Phi(r^{1+\delta})$$

Since $r \frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)} \rightarrow \infty$ with r it follows that for large r ,

$$r < \{\Phi(r)\}^\alpha$$

however small $\alpha > 0$ is chosen, and replacing r by $\Phi(r)$:

$$\Phi(r) < e^{\alpha r}.$$

From this result, (7) and (8) it follows that

$$\begin{aligned} M'(r) &= M \{M(r)\} < 3K \{\Phi(r^{1+\delta})\}^2 \Phi \{\Phi(r^{1+\delta})\} \\ &< 3K \exp \{r^{1+\delta} + 2\alpha r^{1+\delta}\}. \end{aligned}$$

But α and δ may be chosen arbitrarily small, so that the order of $f_3\{f_3(z)\}$ is exactly 1. The order of $f_3(z)$ can only be zero.

4. Consequences of Theorem 1.

We now apply the main theorem to derive a property of analytic solutions of (3).

In the iteration of an entire function $F(z)$ there arises a set $\mathfrak{F}(F)$ which is of great importance: $\mathfrak{F}(F)$ is the set of points z where the iterates $F_n(z)$ of positive integral order do not form a normal family in the sense of MONTEL.

The term "Fatou exceptional point" is used to denote a point α such that the equation $F(z) = \alpha$ has no solution in z , except possibly $z = \alpha$. There can be at most one such point.

FATOU [6] has investigated the set $\mathfrak{F}(F)$ thoroughly and has proved the following result:

Let c be a small circle surrounding $z_0 \in \mathfrak{F}(F)$, and c_n its image under the transformation $z \rightarrow F_n(z)$. If Δ is any bounded region of the plane excluding a small circle d about the Fatou exceptional point if this exists, then for sufficiently large n , c_n will cover Δ .

From this follows

Theorem 3. If $f(z)$ is an analytic solution of (3), where $F(z)$ is bounded on some curve extending to infinity and $f(z)$ is analytic at any one point of $\mathfrak{F}(F)$ and also at the Fatou exceptional point if this exists, then $f(z)$ cannot be single-valued.

Proof: Suppose $f(z)$ single-valued and analytic at $z_0 \in \mathfrak{F}(F)$. Take for c a circle surrounding z_0 in which the expansion of $f(z)$ about z_0 converges. Then $f(z)$ may be continued into any c_n by repeated application of the relation

$$f\{F(z)\} = f[\{f(z)\}] = F\{f(z)\}.$$

If a Fatou exceptional point α exists, take a circle d about α in which $f(z)$ is analytic. Then if D is any bounded region, of the plane our procedure of continuation shows that $f(z)$ is analytic in $D - \alpha$, and hence in D ; that is $f(z)$ is entire, against theorem 1. q.e.d.

The instance of $F(z) = e^z$ is of particular interest and has been treated by KNESER [7], who has constructed a solution $f(z)$ of (3) which on the whole real axis is analytic and real. e^z has the exceptional value 0, and TÖFFER [11] has shown that every point of the real axis belongs to $\mathfrak{F}(e^z)$. It follows that KNESER's solution is not single-valued.

References.

- [1] SCHRÖDER, E.: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann.* **2**, 317—365 (1870). — [2] SCHRÖDER, E.: Über iterierte Funktionen. *Math. Ann.* **3**, 296—322 (1871). — [3] TÖFFER, H.: Komplexe Iterationsindizes ganzer und rationaler Funktionen. *Math. Ann.* **121**, 191—222 (1949). — [4] JULIA, G.: Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. Math.* **8**, 1 (1918). — [5] FATOU, P.: Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. de France* **47**, 161—271 (1919); **48**, 33—94, 208—314 (1920). — [6] FATOU, P.: Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math.* **47**, 337—370 (1926). — [7] KNESER, H.: Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\Phi\{\Phi(x)\} = e^x$ und verwandte Funktionalgleichungen. *J. reine angew. Math.* **187**, 56—67 (1950). — [8] TITCHMARSH, E.: *The theory of functions*. 2nd ed. Oxford 1939. — [9] PÓLYA, G., and G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2. Band, 4. Abschn. Berlin 1925. — [10] VALIRON, G.: *Lectures on the general theory of integral functions*. Toulouse 1923. — [11] TÖFFER, H.: Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen insbesondere von $\sin z$ und $\cos z$. *Math. Ann.* **117**, 65—84 (1941).

(Eingegangen am 6. September 1954.)

Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg-Lahn.

Das Problem der dünnsten Kreisüberdeckung der Kugel besteht darin, zu gegebener Zahl N den kleinsten Radius r zu bestimmen, so daß die Einheitskugel durch N Kreisscheiben vom Radius r überdeckt wird¹⁾. Für $N = 1$ bzw. 2 ist offenbar $r = \pi$ bzw. $\frac{\pi}{2}$. Für $N \geq 3$ erhält man nach FEJES TÓTH²⁾ in folgender Weise eine Ungleichung. Zu jeder gegebenen Überdeckung läßt sich ein auf die Kreismittelpunkte aufgespanntes Dreiecksnetz finden, so daß die Dreieckssumkreise keine Ecken des Netzes im Innern enthalten. Jedes Dreieck hat einen Umkreisradius $\leq r$, denn sonst würde der Umkreismittelpunkt von der Überdeckung nicht erfaßt werden. Folglich ist der Inhalt eines jeden dieser $2(N-2)$ Dreiecke höchstens gleich dem Inhalt Δ des regulären Dreiecks mit Umkreisradius r . Aus

$$\Delta = 6 \arccot(\sqrt{3} \cos r) - \pi \text{ und } 2(N-2)\Delta \geq 4\pi$$

folgt die Ungleichung

$$(1) \quad r \geq \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cotg \frac{N\pi}{6(N-2)} \right).$$

Gleichheit besteht nur dann, wenn sich die Kugeloberfläche in $2(N-2)$ reguläre Dreiecke zerlegen läßt, also bei $N = 3, 4, 6$ und 12 . Bei $N = 3$ ist (ebenso wie bei $N = 2$) $r = \frac{\pi}{2}$. Bei $N = 4, 6$ und 12 ergibt sich die dünnste Überdeckung, wenn die Kreismittelpunkte die Ecken eines Tetraeders, Oktaeders bzw. Ikosaeders bilden.

Im folgenden werden die Lösungen für $N = 5$ und $N = 7$ gegeben. Für $N = 8$, wo die dünnste Überdeckung nur bei einer ziemlich unregelmäßigen Lagerung der Kreisscheiben zustande kommt, wird eine Abschätzung gebracht.

Zu einer vorausgesetzten dünnsten Überdeckung mit N Kreisscheiben vom Radius r bilden wir ein Dreiecksnetz nach FEJES TÓTH. Die Eckpunkte dieses Netzes sind die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise. Jedes Dreieck hat einen Umkreisradius $\leq r$, also Seiten $\leq 2r$. Als Grad eines Eckpunktes

¹⁾ Für dieses Problem gibt FEJES TÓTH in seinem Buch „Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum“ (Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953) S. 170 einen Lösungsansatz mit Hilfe eines Graphen, wie er in ähnlicher Weise von HABICHT, VAN DER WAERDEN und dem Verfasser für das duale Problem der kleinsten Kugel mit N Punkten vom Mindestabstand Eins benutzt wurde. Math. Ann. 123, 96—124, 223—234 (1951); 125, 325—334 (1953).

²⁾ Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 111—114 (1953).

bezeichnen wir die Anzahl der in ihm zusammenstoßenden Dreiecke. Es kommen nur die Grade 3 bis $N-1$ in Betracht.

Ein Punkt vom Grad $N-1$ kann nur bei $N < 6$ auftreten. Von einem solchen Punkt P haben nämlich alle Mittelpunkte der überdeckenden Kreisscheiben Abstände $\leq 2r$. Der Gegenpunkt von P , der ja auch auf einer überdeckenden Kreisscheibe liegt, hat einen Abstand $\leq 3r$ von P . Daraus folgt $r \geq \frac{\pi}{3}$, was nur bei $N < 6$ zutrifft.

Um für $N = 7$ und 8 auch die Punkte 3. Grades auszuschließen, benötigen wir die Abschätzungen

$$(2) \quad r < 52^\circ \quad \text{für } N = 7,$$

$$(3) \quad r < 48,5^\circ \quad \text{für } N = 8,$$

die wir später bestätigen werden. Tritt ein Punkt 3. Grades auf, so setzen sich 3 Dreiecke des Netzes zu einem Dreieck mit Seiten $\leq 2r$ zusammen. Ihr Gesamthalt ist höchstens gleich dem Inhalt D des regulären Dreiecks mit Seiten $2r$. Jedes der übrigen Dreiecke hat einen Inhalt $\leq \triangle$. Man hat also in diesem Falle

$$(4) \quad (2N - 7) \triangle + D \geq 4\pi.$$

Für $N = 7$ erhält man mit (2) die Abschätzung

$$\triangle = 6 \arccot(\sqrt{3} \cos r) - \pi < 80^\circ,$$

$$D = 6 \arcsin\left(\frac{1}{2 \cos r}\right) - \pi < 150^\circ,$$

also

$$7\triangle + D < 710^\circ.$$

Die Ungleichung (3) für $N = 8$ liefert

$$\triangle < 67^\circ, \quad D < 115^\circ,$$

$$9\triangle + D < 718^\circ.$$

Bei $N = 7$ und 8 ist also (4) nicht erfüllt, folglich kein Punkt 3. Grades möglich. Man sieht zugleich, daß in diesen Fällen auch kein geschlossener Streckenzug aus 3 Seiten des Dreiecksnetzes Eckpunkte des Netzes im Innern (d. h. auf der Seite des kleinsten Inhalts) enthält. Sonst würden nämlich mindestens 3 Netzdreiecke in einem Dreieck mit Inhalt $\leq D$ liegen, und (4) müßte gelten.

Wir fassen zusammen: Bei $N = 5$ treten nur Punkte 3. und 4. Grades auf, bei $N = 7$ nur Punkte 4. und 5. Grades. Ist n_k die Anzahl der Punkte k -ten Grades, so hat man in beiden Fällen $n_4 + n_{N-2} = N$. Aus der EULERSCHEN Polyederformel folgt leicht, daß die Anzahl der Dreiecke $2(N-2)$ und die Anzahl der Kanten $3(N-2)$ ist. Andererseits ist die doppelte Kantenzahl $4n_4 + (N-2)n_{N-2}$. Also ist

$$4n_4 + (N-2)n_{N-2} = 6(N-2).$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$(5) \quad n_{N-2} = 2, \quad n_4 = N - 2.$$

Man erkennt leicht, daß dann nur die in Fig. 1 und 2 dargestellten Netze möglich sind. P' ist in den Figuren, die als stereographische Projektionen aufzufassen sind, als unendlich ferner Punkt zu denken. Dann sind P, P' die Punkte vom Grad $N-2$ und Q_1, \dots, Q_{N-2} die Punkte 4. Grades.

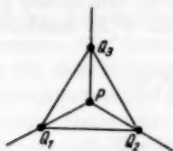


Fig. 1.

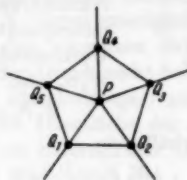


Fig. 2.

Im Falle $N = 8$ haben wir

$$n_4 + n_5 + n_6 = 8, \quad 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 36.$$

Berücksichtigt man, daß kein geschlossener Zug von 3 Strecken des Netzes Eckpunkte im Innern enthält, so erhält man nur die in Fig. 3 und 4 dar-

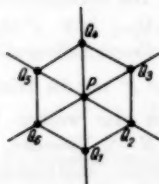


Fig. 3.

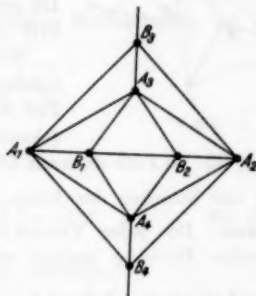


Fig. 4.

gestellten Dreiecksnetze. Das Netz der Fig. 3 fällt unter (5). Das andere Netz enthält 4 Punkte 5. Grades A_1, \dots, A_4 und 4 Punkte 4. Grades B_1, \dots, B_4 . Hierbei sollen B_3, B_4 miteinander verbunden sein.

Um die Abmessungen der Netze zu bestimmen, bilden wir zu jedem Dreiecksnetz einen Graphen, indem wir die Eckpunkte eines jeden Dreiecks (schwarze Punkte) mit den Mittelpunkten der zugehörigen Dreiecksumkreise (weißen Punkten) verbinden³⁾. Diese Mittelpunkte brauchen nicht im Innern der betreffenden Dreiecke zu liegen. Alle Strecken des Graphen sind $\leq r$.

³⁾ Dieser Graph entspricht dem von FEJES TÓTH vorgeschlagenen Graphen, unterscheidet sich jedoch von diesem dadurch, daß hier auch Streckenlängen $< r$ zugelassen werden. Dabei müssen wir auf die Möglichkeit verzichten, den Graphen durch Verschiebung einzelner Punkte aufzulösen, haben aber den Vorteil, daß der Graph nur aus Vierecken aufgebaut ist.

Die Strecken des Graphen schneiden sich nicht. Beweis: Die Strecken $W_1 S_1, W_2 S_2$ mit den weißen Endpunkten W_1, W_2 und schwarzen Endpunkten S_1, S_2 mögen sich in P schneiden (Fig. 5). Das Dreiecksnetz war so gewählt, daß kein Eckpunkt im Innern eines Dreiecksumkreises liegt. Folglich ist der Abstand vom Umkreis-mittelpunkt W_1 zum Netzkpunkt S_2 mindestens gleich dem Umkreisradius $W_1 S_1$, und ebenso $W_2 S_1$ mindestens gleich $W_2 S_2$, also:

$$(6) \quad W_1 S_1 \leq W_1 S_2, \quad W_2 S_2 \leq W_2 S_1.$$

Hiermit erhält man

$$(W_1 P + P S_2) + (W_2 P + P S_1) \leq W_1 S_2 + W_2 S_1,$$

was nur möglich ist, wenn die 4 Punkte kollinear sind. Aber auch in diesem Falle haben gemäß (6) zwei verschiedene Strecken keine inneren Punkte gemeinsam.

Zu je zwei aneinanderliegenden Dreiecken ABC und ABC' des Netzes gehört ein Viereck $AWBW'$ des Graphen (Fig. 6). Das Viereck wird durch

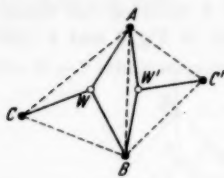


Fig. 6.

WW' in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, da $AW = BW$ und $AW' = BW'$ ist. Hierbei kann auch $W = W'$ sein, also das Viereck den Inhalt 0 haben. Die gesamte Kugeloberfläche setzt sich aus solchen $3(N-2)$ Vierecken zusammen.

Wir betrachten die Graphen, die zu den Dreiecksnetzen der Fig. 1—3 gehören. In Fig. 7 ist der Fall $N = 7$ dargestellt. Die Mittelpunkte der Dreiecksumkreise von $PQ_i Q_{i+1}$ bzw. $P'Q_i Q_{i+1}$ seien

W_i bzw. W'_i . Im Falle dünnster Überdeckung ist der Graph halbgeregulär⁴⁾, d. h. er besitzt nur Strecken der Länge r und bei P und P' nur die Winkel $\frac{2\pi}{N-2}$.

Beweis: Da jedes Viereck durch Verbinden der weißen Punkte in kongruente Dreiecke zerlegt wird, haben die $N-2$ Vierecke, die in P

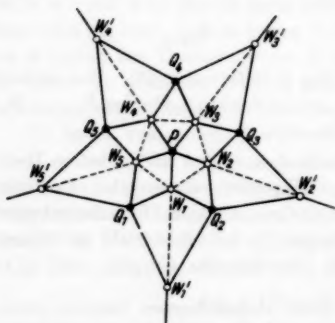


Fig. 7.

zusammenstoßen, zusammen doppelt so großen Inhalt wie das $(N-2)$ -Eck $W_1 \dots W_{N-2}$. Dieses liegt in einem Kreis vom Radius r um P . Es hat maximalen Inhalt, wenn alle $PW_i = r$ sind und alle Winkel bei P übereinstimmen. Entsprechendes gilt für die in P' zusammenstoßenden Vierecke. Die übrigen Vierecke $Q_i W_i Q_{i+1} W'_i$ haben an ihren schwarzen Eckpunkten eine Winkelsumme $2(N-4)\pi$, da von den $N-2$ Vollwinkeln je ein Vollwinkel für die in P und in P' zusammenstoßenden Vierecke abzuziehen ist. Wir zerlegen die

⁴⁾ Die konvexe Hülle der schwarzen Eckpunkte ist ein halbgereguläres Polyeder (mit kongruenten Flächen und regulären Ecken).

Vierecke $Q_i W_i Q_{i+1} W'_i$ durch Verbinden der weißen Punkte und ersetzen die so entstandenen Dreiecke durch Dreiecke, die an den schwarzen Eckpunkten dieselben Winkel, aber die genaue Schenkellänge r besitzen. Hierdurch werden die Inhalte nicht verkleinert. Die neuen Dreiecke lassen sich an ihren schwarzen Eckpunkten so aneinanderlegen, daß sie ein $2(N-2)$ -Eck bilden, das den Umkreisradius r besitzt und seinen Mittelpunkt $N-4$ mal umschließt. Dieses hat maximalen Inhalt, wenn alle Winkel an den schwarzen Eckpunkten übereinstimmen. Wir fassen zusammen: Wäre der Graph nicht halbberegulär, so würden die zum halbberegulären Graphen der Streckenlänge r gehörenden Vierecke zusammen einen größeren Inhalt als die Oberfläche der Einheitskugel besitzen. Dann würde zur Einheitskugel ein halbberegulärer Graph mit kleinerer Streckenlänge gehören, was gegen die Minimalität von r verstößt. Folglich ist der Graph halbberegulär.

Hiermit sind die dünnsten Überdeckungen für $N = 5$ und $N = 7$ gefunden. Bei diesen haben die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise (ebenso wie bei $N = 6$) folgende Lage: Zwei Punkte liegen sich diametral gegenüber. Die übrigen Punkte liegen in gleichen Abständen auf der zugehörigen Polaren. Das entsprechende Dreiecksnetz besteht aus gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundlinie $\frac{2\pi}{N-2}$ und den Schenkeln $\frac{\pi}{2}$. Der Umkreisradius r dieses Dreiecks, der zugleich Radius der überdeckenden Kreisscheiben ist, ergibt sich demnach zu

$$r = \operatorname{arc} \cotg \left(\cos \frac{\pi}{N-2} \right).$$

Man erhält

$$r = \operatorname{arc} \cotg \frac{1}{2} \approx 63^\circ 26' \quad \text{für } N = 5,$$

$$r = \operatorname{arc} \cotg \left(\cos \frac{\pi}{5} \right) \approx 51^\circ 2' \quad \text{für } N = 7.$$

Hiermit ist die vorausgesetzte Ungleichung (2) bestätigt.

Das Dreiecksnetz der Fig. 4 liefert für $N = 8$ im Falle, daß alle Dreiecke kongruent sind, eine Lagerung der Kreismittelpunkte, die sich in Polarkoordinaten folgendermaßen beschreiben läßt: Vier Punkte auf dem Äquator $\varphi = 0^\circ$ bei $\lambda = \pm 30^\circ, \pm 90^\circ$, vier Punkte auf dem Meridian $\lambda = 180^\circ$ bei $\varphi = \pm 30^\circ, \pm 90^\circ$. Diese Lagerung geht in die halbbereguläre Lagerung der Fig. 3 über, wenn etwa die beiden Punkte $\varphi = \pm 30^\circ, \lambda = 180^\circ$ auf die Stellen $\varphi = 0^\circ, \lambda = \pm 150^\circ$ verlegt werden. Die Netzdreiecke bleiben dabei unverändert. Zur günstigsten Lagerung gemäß Fig. 3 gehört also derselbe Radius r wie zur halbberegulären Lagerung gemäß Fig. 4. Es gibt jedoch irreguläre Dreiecksnetze vom Typ der Fig. 4 mit kleinerem r . Diese kommen allein für die dünnste Überdeckung mit acht Kreisscheiben in Betracht.

Die Vierecke des zugehörigen Graphen lassen sich in 4 Klassen einteilen (I–IV in Fig. 8), so daß Vierecke derselben Klasse durch einen topologischen Automorphismus des Graphen ineinander übergehen. Nur folgende zwei Fälle sind zu berücksichtigen:

a) Alle Strecken des Graphen haben die Länge r , und alle Vierecke derselben Klasse sind zueinander kongruent.

b) Es treten Strecken $< r$ auf.

Beweis: Angenommen, alle Strecken haben die Länge r . Dann ersetzen wir jedes Viereck durch ein Viereck mit Seiten r , dessen Winkel am schwarzen Eckpunkt das arithmetische Mittel aller entsprechenden Winkel derselben

Viereckklasse ist. Hierdurch werden die Inhaltssummen der einzelnen Klassen nicht verkleinert. Die Winkelsumme bleibt an jedem schwarzen Punkt 2π und wird an jedem weißen Punkt $\geq 2\pi$. Ist sie dort überall gleich 2π , so liegt Fall a) vor. Andernfalls lassen sich einzelne Strecken verkleinern.

Im Fall a) besitzt der Graph nur noch einen Freiheitsgrad. Den kleinsten Radius erhält man hier durch Auflösung eines Systems transzendenter Gleichungen, wobei sich der Näherungswert

$$(7) \quad r \approx 48^\circ 9'$$

ergibt, der die Voraussetzung (3) bestätigt. Der Graph setzt sich dann aus 8 kongruenten Teilen zusammen, von denen einer in Fig. 9 mit den abgerundeten Maßen der Extremallage angedeutet ist. Der

Wert (7) ist jedoch nur als obere Schranke von r gesichert, da Fall b) nicht ausgeschlossen ist. Auf jeden Fall ist die dünnste Überdeckung bei $N = 8$ wenig symmetrisch.

In der abschließenden Übersicht ist r_0 die untere Schranke von r gemäß (1), $d = \frac{N}{2} (1 - \cos r)$ die minimale Dichte (Quotient aus Inhaltssumme alle

überdeckenden Kreise und Kugeloberfläche) und $d_0 = \frac{N}{2} (1 - \cos r_0)$ untere Schranke von d .

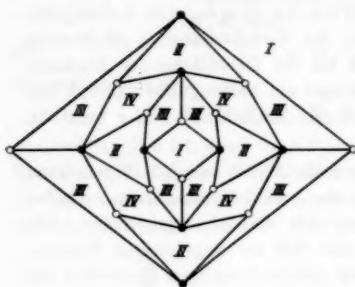


Fig. 8.

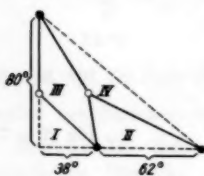


Fig. 9.

N	r	r_0	d	d_0
2	90°	—	1	—
3	90°	90°	1,5	1,5
4	$70^\circ 32'$	$70^\circ 32'$	1,333	1,333
5	$63^\circ 26'$	$61^\circ 1'$	1,382	1,289
6	$54^\circ 44'$	$54^\circ 44'$	1,268	1,268
7	$51^\circ 2'$	$50^\circ 7'$	1,299	1,256
8	$\leq 48^\circ 9'$	$46^\circ 31'$	$\leq 1,331$	1,248

(Eingegangen am 14. Oktober 1954.)

Poincarésche Reihen zur hermitischen Modulgruppe¹⁾.

Von

HUGO BECKER in Heidelberg.

Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen sind Poincarésche Reihen zu gewissen diskontinuierlichen Untergruppen $G^{(n)}$ der hermitisch-symplektischen Gruppe n -ten Grades [2]²⁾. Die Betrachtungen spielen sich demgemäß im Raum $\mathcal{G}^{(n)}$ der komplexen n -reihigen Matrizen Z ab, für die $\frac{Z - \bar{Z}'}{2i}$ eine positive hermitische Matrix ist. Von den in Verbindung mit Modulformen auftretenden Gruppen $G^{(n)}$ hermitisch-symplektischer Matrizen ist zu verlangen, daß der Modul M der (hermitischen) Matrizen $H = H^{(n)}$, für die $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}$ in $G^{(n)}$ liegt, eine Basis aus n^2 reell-unabhängigen Matrizen H_ν besitzt. Zur Gruppe $G^{(n)}$ werden Multiplikatoren $v(\sigma)$ vom Betrag 1 zugelassen. Modulformen $g(Z)$ von der (ganz-rationalen) Dimension $-k$ zur Gruppe $G^{(n)}$ und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ besitzen die folgenden charakteristischen Eigenschaften: sie sind in $\mathcal{G}^{(n)}$ reguläre Funktionen, befriedigen die Transformationsgleichung

$$(1) \quad g(\sigma(Z)) = v(\sigma) |CZ + D|^{-k} g(Z) \quad \text{für } \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^{(n)}$$

und lassen sich in Fourierreihen der Art

$$(2) \quad g(Z) = \sum_{\substack{F \in K_*(N) \\ F \geq 0}} a(F) e^{2\pi i \operatorname{Sp}(FZ)}$$

entwickeln. Die als Exponentenmodul von $G^{(n)}$ bezeichnete additive Gruppe N besteht aus allen n -reihigen hermitischen Matrizen F , für die $\operatorname{Sp}(FH)$ ganz-rational wird für alle $H \in M$. Eine Basis von N liefern die durch die Gleichungen $\operatorname{Sp}(F_\nu H_\nu) = \delta_{\nu\mu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n^2$) eindeutig bestimmten hermitischen Matrizen F_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n^2$). Die Verzweigungsmatrix K_* des Systems $v(\sigma)$ ist definiert durch

$$(3) \quad K_* = \sum_{\mu=1}^{n^2} \kappa_\mu F_\mu$$

mit reellen Zahlen κ_ν , für die

$$v(\sigma_\nu) = e^{2\pi i \kappa_\nu} \quad \text{mit } \sigma_\nu = \begin{pmatrix} E & H_\nu \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n^2)$$

gilt; K_* ist bis auf eine Matrix aus N eindeutig bestimmt. Gemäß der Summationsvorschrift ist in (2) über alle nicht-negativen hermitischen Matrizen F

¹⁾ Diese Arbeit wurde von der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Heidelberg als Dissertation angenommen.

²⁾ Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

zu summieren, für die $F - K_v$ dem Modul N angehört; solche Matrizen werden Exponentenmatrizen zur Gruppe $G^{(n)}$ und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ genannt. Die Existenz einer Fourierentwicklung für $g(Z)$ ergibt sich sofort aus der geforderten Regularität und der Transformationsgleichung (1), wenn man Z als Linearkombination der n^2 reell-unabhängigen Matrizen H_i darstellt mit komplexen variablen Koeffizienten ζ_v ($v = 1, 2, \dots, n^2$) und beachtet, daß $e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(KZ)} g(Z)$, aufgefaßt als Funktion dieser ζ_v , in jeder der n^2 Variablen die Periode 1 besitzt. Falls es sich bei $G^{(n)}$ um eine Kongruenzgruppe modulo q über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K handelt und $n > 1$ ist, folgt bereits aus der Regularität von $g(Z)$, daß in der nach (1) existierenden Fourierentwicklung nur solche Glieder wirklich auftreten, die zu nicht-negativen Exponentenmatrizen F gehören [3]. Hierbei ist $v(\sigma) = 1$ für alle σ der Hauptkongruenzgruppe $H_q^{(n)}$ der Stufe q vorausgesetzt.

Die Konstruktion von Modulformen wird durch Aufstellung Poincaréscher Reihen durchgeführt. Man erhält diese, wenn man auf den Entwicklungstypus (2) das Verfahren der Quersummation anwendet:

$$(4) \quad g_{-k}(Z, F) = \sum_{\sigma} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} v(\sigma)^{-1} |CZ + D|^{-k} \quad (F \equiv K_v(N), F \geq 0);$$

hierbei ist über alle $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^{(n)}$ zu summieren, die verschiedene Reihenglieder ergeben. Wir beschränken uns auf Kongruenzgruppen $G^{(n)}$ modulo q mit geeignetem Multiplikatorsystem und haben dann im Falle $n > 1$ außer der Transformationseigenschaft (1) nur die Regularität von $g_{-k}(Z, F)$ im Bereich $\mathfrak{B}^{(n)}$ nachzuweisen.

Die Konvergenz von Reihen der Art (4) wird mit Hilfsmitteln der hermitisch-symplektischen Geometrie untersucht. Man gelangt mit Hilfe der in [2] eingeführten Metrik zu Ergebnissen, die den in [5] und [11] gewonnenen entsprechen. Deshalb kann das von H. MAASS im Falle der Siegelschen Modulgruppe angewandte Verfahren [6] auch hier zum Konvergenzbeweis für die Poincaréschen Reihen benutzt werden. Die über $G^{(n)}$ zu machenden Voraussetzungen betreffen insbesondere die Gestalt des Fundamentalbereichs der Gruppe aller Elemente von $G^{(n)}$, die das allgemeine Glied der Reihe un geändert lassen. Die genauen Voraussetzungen sind in § 2 angegeben. Sind diese erfüllt, und ist s der Rang von F , so konvergiert die Reihe $g_{-k}(Z, F)$ absolut und in jedem kompakten Teilbereich von $\mathfrak{B}^{(n)}$ gleichmäßig, wenn

$$(5) \quad k > \operatorname{Min}(4n - 2, 2(n + s))$$

gewählt wird. Dann ist also $g_{-k}(Z, F)$ eine in $\mathfrak{B}^{(n)}$ reguläre Funktion. Die an $G^{(n)}$ gestellten Forderungen werden insbesondere von den Kongruenzgruppen modulo q über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K erfüllt. Unter den Voraussetzungen, daß $v(\sigma) = 1$ für $\sigma \in H_q^{(n)}$ und für alle $\sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \in G^{(n)}$ gilt, und daß die natürliche Zahl k der Bedingung (5) genügt sowie ein Vielfaches der Anzahl der Einheitswurzeln von K ist, handelt es sich bei den Poincaréschen Reihen (4) um Modulformen von der Dimension $-k$ zur Kongruenzgruppe $G^{(n)}$ modulo q und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$.

Der Funktionaloperator Φ^z , definiert durch

$$(6) \quad g(Z) | \Phi^z = \lim_{y \rightarrow \infty} g(Z) \text{ mit } Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & z E^{(n)} \end{pmatrix}, Z_1 \in \mathfrak{B}^{(n-s)}, z = x + i y \in \mathfrak{B}^{(1)},$$

führt — wie im Fall der rationalen Modulgruppe [10] — Modulformen $g(Z)$ zur Gruppe $H_q^{(n)}$ in solche zur Gruppe $H_q^{(n-s)}$ über, wenn die Dimension von $g(Z)$ ein ganz-rationales Vielfaches der Anzahl der Einheitswurzeln von K ist. Auf Poincarésche Reihen $g_{-k}(Z, F)$ zur Gruppe $H_q^{(n)}$ kann Φ^z gliedweise ausgeübt werden, was ähnlich wie in [6] einzusehen ist. Ist F durch eine unimodulare Matrix $U = \varepsilon E(q)$ (ε = Einheitswurzel von K) auf die spezielle Gestalt

$$(7) \quad \bar{U}' F U = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } |F_1| \neq 0$$

transformierbar, so wird $g_{-k}(Z, F)$ durch Φ^z wieder in eine Poincarésche Reihe oder in 0 übergeführt, je nachdem ob $\alpha \leq n - s$ oder $\alpha > n - s$ ist. Mit Hilfe dieser Tatsache gewinnt man durch Anwendung von Φ^{n-1} eine untere Abschätzung für die Anzahl der linear unabhängigen Modulformen fester Dimension zur hermiteschen Modulgruppe $H^{(n)}$.

Zum Beweis eines Satzes von der Art, daß sich jede Modulform zur hermiteschen Modulgruppe als Linearkombination gewisser endlich vieler Poincaréscher Reihen darstellen läßt, reichen die bisher verwendeten Methoden (für $n \geq 2$) anscheinend nicht aus. H. MAASS gelang es, für die lineare Schar der Modulformen zur Siegelschen Modulgruppe diesen Darstellungssatz mit Hilfe des Metrisierungsprinzips und vollständiger Induktion nach n zu beweisen [6]. Zwar läßt sich die Metrisierung der Modulformen zur hermiteschen Modulgruppe $H^{(n)}$ ebenfalls durchführen, doch sind Modulformen, deren Fourierkoeffizienten $a(F) = 0$ sind für $|F| = 0$, nicht mehr wie im rationalen Fall durch $g(Z) | \Phi = 0$ allein charakterisiert. In [6] wird ferner verwendet, daß alle Poincaréschen Reihen zur Siegelschen Modulgruppe $(n-1)$ -ten Grades aus denen zur Gruppe n -ten Grades durch Anwendung des Funktionaloperators Φ hervorgehen. Ob im Falle der hermiteschen Modulgruppe ein entsprechender Sachverhalt vorliegt, konnte bisher nicht entschieden werden, da sich für eine hermitesche Matrix F über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper im allgemeinen nicht die Darstellung (7) erreichen läßt.

Die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Hinweise verdanke ich Herrn Professor MAASS. Von Frau Professor BRAUN wurde mir freundlicherweise ein Teil des Manuskriptes [3] zur Einsichtnahme überlassen.

§ 1. Hilfsmittel.

A. Die hermitisch-symplektische Geometrie. Es sei $Z = Z^{(n)}$ eine komplexe variable Matrix. Mit \tilde{Z} werde die konjugiert-komplexe der transponierten Matrix bezeichnet: $\tilde{Z} = \bar{Z}'$. Die Matrix Z läßt sich in der Form

$$Z = X + i Y \quad \text{mit} \quad \tilde{X} = X, \quad \tilde{Y} = Y$$

schreiben; die Zerlegung ist eindeutig, und es gilt

$$X = \frac{Z + \tilde{Z}}{2}, \quad Y = \frac{Z - \tilde{Z}}{2i}.$$

Der Bereich der komplexen n -reihigen Matrizen $Z = X + iY$, für die $Y > 0$ ist, soll mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(n)}$ bezeichnet werden. Dieser Bereich \mathcal{B} wird durch jede hermitisch-symplektische Substitution

$$(8) \quad \sigma(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

umkehrbar eindeutig auf sich abgebildet. Eine Substitution (8) heißt hermitisch-symplektisch, wenn die zugehörige komplexe Matrix

$$\sigma^{(2n)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

hermitisch-symplektisch ist, d. h. wenn

$$\tilde{\sigma} \iota \sigma = \iota \quad \text{mit} \quad \iota = \begin{pmatrix} 0 & E^{(n)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Die hermitisch-symplektischen Matrizen bilden die homogene, die hermitisch-symplektischen Substitutionen die inhomogene hermitische Gruppe. Wir wollen im folgenden nicht von der homogenen und inhomogenen, sondern nur von der hermitischen Gruppe schlechthin sprechen und diese mit $C = C^{(n)}$ bezeichnen. Verwechslungen sind nicht zu befürchten. Wie man leicht bestätigt, sind zwei mit verschiedenen hermitisch-symplektischen Matrizen σ, σ_1 gebildete Substitutionen (8) genau dann identisch: $\sigma(Z) = \sigma_1(Z)$ für alle $Z \in \mathcal{B}$, wenn $\sigma = \alpha \sigma_1$ gilt mit einer komplexen Zahl α vom Betrag 1.

Durch die quadratische Differentialform

$$(9) \quad ds^2 = \text{Sp}(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\tilde{Z}) \quad (dZ = (dz_{\mu\nu}))$$

wird in \mathcal{B} eine positiv-definite Metrik definiert; das Linienelement ds ist invariant gegenüber hermitisch-symplektischen Substitutionen [2]. Ähnlich wie in [5], [11] läßt sich zeigen, daß zu je zwei Punkten Z, \hat{Z} des Raumes \mathcal{B} genau eine Geodätische existiert. Bezeichnet man den hermitisch-symplektischen Abstand der beiden Punkte Z, \hat{Z} mit $h(Z, \hat{Z})$, so folgt wie in [6]

Hilfssatz 1: Es seien $Z, \hat{Z} \in \mathcal{B}^{(n)}$ und $Z_1 = X_1 + iY_1, \hat{Z}_1 = \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1$ die Matrizen, die entstehen, wenn man in Z, \hat{Z} die letzten $n-s$ Zeilen und Spalten streicht. Dann ist

$$h(Z, \hat{Z}) \geq h(Z_1, \hat{Z}_1).$$

Ferner gibt es zu jeder positiven Zahl r zwei positive Konstanten m_1, m_2 , die nur von r und n abhängen, so daß

$$\frac{1}{m_1} \leq \frac{\text{Sp}(\hat{Y}_1)}{\text{Sp}(Y_1)} \leq m_1, \quad \frac{1}{m_2} \leq \frac{|\hat{Y}_1|}{|Y_1|} \leq m_2$$

gilt, sofern nur $h(Z, \hat{Z}) \leq r$ ist.

Bevor wir das zur Metrik (9) gehörende Volumenelement angeben, führen wir in \mathcal{B} Koordinaten ein, die für die folgenden Betrachtungen geeignet sind. Es sei ω eine komplexe Zahl mit positivem Imaginärteil und $Z = X + iY$ eine komplexe variable Matrix. Die hermitischen Matrizen X, Y stellen wir in der Form

$$(10) \quad X = \dot{X} + \omega \ddot{X}, \quad Y = \dot{Y} + \omega \ddot{Y}$$

dar mit eindeutig bestimmten reellen Matrizen

$$\dot{X} = (\dot{x}_{\mu\nu}), \quad \ddot{X} = (\ddot{x}_{\mu\nu}), \quad \dot{Y} = (\dot{y}_{\mu\nu}), \quad \ddot{Y} = (\ddot{y}_{\mu\nu}).$$

Offenbar ist

$$(11) \quad \ddot{Y}' = -\ddot{Y}, \quad \dot{Y}' = \dot{Y} + (\omega + \bar{\omega}) \ddot{Y};$$

analoge Formeln gelten auch für \dot{X}, \ddot{X} . Man setze

$$\dot{Z} = (\dot{z}_{\mu\nu}) = \dot{X} + i \dot{Y}, \quad \ddot{Z} = (\ddot{z}_{\mu\nu}) = \ddot{X} + i \ddot{Y}.$$

Dann wird

$$(12) \quad Z = \dot{Z} + \omega \ddot{Z},$$

und es bestehen die Beziehungen

$$(13) \quad \begin{aligned} \ddot{Z}' &= -\ddot{Z}, \quad \dot{Z}' = \dot{Z} + (\omega + \bar{\omega}) \ddot{Z}, \\ \dot{Z} &= \frac{\omega Z' - \bar{\omega} Z}{\omega - \bar{\omega}}, \quad \ddot{Z} = \frac{Z - Z'}{\omega - \bar{\omega}}. \end{aligned}$$

Nach (12) und (13) ist $\mathfrak{S}^{(n)}$ Teilraum des n^2 -dimensionalen komplexen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $\dot{z}_{\mu\nu} (1 \leq \mu \leq \nu \leq n)$, $\ddot{z}_{\mu\nu} (1 \leq \mu < \nu \leq n)$.

Später ist $\omega = \frac{\delta + \sqrt{\delta}}{2}$ zu setzen, wobei δ die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers K bedeutet. Dann bilden $1, \omega$ eine Minimalbasis von K , und es gilt $\omega + \bar{\omega} = \delta, \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} = \frac{\sqrt{-\delta}}{2}$.

Man betrachte nun ds^2 als quadratische Form in den Variablen $d\dot{x}_{\mu\nu}, d\dot{y}_{\mu\nu} (\mu \leq \nu), d\ddot{x}_{\mu\nu}, d\ddot{y}_{\mu\nu} (\mu < \nu)$. Diese hat die Determinante $(\omega - \bar{\omega})^{2n(n-1)} |Y|^{-4n}$. Also lautet das hermitisch-symplektische Volumenelement

$$(14) \quad dv = \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{i} \right)^{n(n-1)} |Y|^{-2n} dX dY;$$

dabei ist zur Abkürzung

$$(15) \quad dX = \prod_{\mu \leq \nu} d\dot{x}_{\mu\nu} \prod_{\mu < \nu} d\ddot{x}_{\mu\nu}, \quad dY = \prod_{\mu \leq \nu} d\dot{y}_{\mu\nu} \prod_{\mu < \nu} d\ddot{y}_{\mu\nu}$$

gesetzt. dv ist invariant gegenüber hermitisch-symplektischen Transformationen.

B. Bewegungsgruppen. Eine Gruppe hermitisch-symplektischer Matrizen ist genau dann diskontinuierlich, wenn sie diskret ist, d. h. wenn jede unendliche Folge verschiedener Matrizen dieser Gruppe divergiert. Ähnlich wie in [11] läßt sich für jede diskontinuierliche Untergruppe G der hermitisch-symplektischen Gruppe C die Existenz eines Fundamentalbereichs \mathfrak{E} in \mathfrak{S} beweisen mit folgenden speziellen Eigenschaften:

1) \mathfrak{E} wird von analytischen Flächenstücken berandet, von denen in jeden kompakten Teilbereich von \mathfrak{S} nur endlich viele hineinragen.

2) Jeder kompakte Bereich in \mathfrak{S} wird von endlich vielen Bildern von \mathfrak{E} bezüglich G überdeckt.

Es sei nun K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und q eine natürliche Zahl. Unter der Hauptkongruenzgruppe $H_q = H_q^{(n)}$ (über K) zur Stufe q versteht man nach [3] die Gesamtheit aller $2n$ -reihigen hermitisch-symplektischen ganzen Matrizen σ über K , die der Kongruenz $\sigma \equiv \varepsilon E(q)$ genügen mit einer Einheit $\varepsilon \in K$. Eine Gruppe hermitisch-symplektischer Matrizen über K , in der H_q als Untergruppe von endlichem Index enthalten ist, wird Kongruenzgruppe modulo q genannt. Speziell heißt $H_1^{(n)} = H^{(n)}$ die hermitische Modulgruppe (n -ten Grades über K).

Der Modul M der Matrizen H , für die $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix} \in H^{(n)}$ ist, besteht aus den n -reihigen ganzen hermiteschen Matrizen über K ; demnach wird, wie man sich leicht überlegt, der Exponentenmodul N zu $H^{(n)}$, also die durch die Forderung

$$\text{Sp}(F H) = \text{ganz-rational für alle } H \in M$$

bestimmte Menge hermitescher Matrizen F , von der Gesamtheit der n -reihigen halbganzen Matrizen über K gebildet. Halbganz heißt nach [1] eine hermitesche Matrix $F = (f_{\mu\nu})$ dann, wenn $f_{\mu\mu}$ ganz-rational und $\delta^{\frac{1}{2}} f_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ ganze Zahlen des imaginär-quadratischen Zahlkörpers K mit der Diskriminante δ sind. Offenbar besteht der Exponentenmodul der Hauptkongruenzgruppe $H_q^{(n)}$ zur Stufe q aus allen n -reihigen Matrizen F , für die qF halbganz ist.

Weil eine Kongruenzgruppe $G^{(n)}$ modulo q über $H_q^{(n)}$ einen endlichen Index hat, besitzt auch der Modul der Matrizen H , für die $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}$ in $G^{(n)}$ liegt, eine Basis aus n^2 reell-unabhängigen Matrizen H_ν . Der Exponentenmodul zu $G^{(n)}$ ist im Exponentenmodul zu $H_q^{(n)}$ enthalten.

Nun sei zur Kongruenzgruppe $G^{(n)}$ modulo q ein Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ vorgelegt mit den Eigenschaften

$$|v(\sigma)| = 1 \text{ für } \sigma \in G^{(n)} \text{ und } v(\sigma) = 1 \text{ für } \sigma \in H_q^{(n)}.$$

$K = K_q$ sei die durch (3) definierte Verzweigungsmatrix des Systems $v(\sigma)$. Evident gilt

$$v(\sigma) = e^{2\pi i \text{Sp}(KH)} \text{ für } \sigma = \begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix} \in G^{(n)}.$$

Nach Voraussetzung muß also $\text{Sp}(KH)$ ganz-rational sein für $H \equiv 0 \pmod{q}$; d. h. qK_q ist halbganz. Die Exponentenmatrizen zu $G^{(n)}$ und zum System $v(\sigma)$ sind also diejenigen nicht-negativen Matrizen F des Exponentenmoduls zu $H_q^{(n)}$, die der Restklasse von K_q nach dem Exponentenmodul zu $G^{(n)}$ angehören.

C. *Hilfssätze.* Hier und im folgenden verwenden wir die Abkürzungen $A[B] = \tilde{B}AB$ und $\Re(A) = |A\tilde{A}|$ für beliebige komplexe Matrizen $A^{(n)}$, $B^{(n,s)}$.

In diesem Abschnitt sollen einige uneigentliche Integrale untersucht werden. Als Integrationsbereiche treten Teilbereiche des Raumes $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^{(n)}$ aller hermiteschen Matrizen $Y^{(n)} > 0$ auf. Zuzufolge (10), (11) kann \mathfrak{Y} als Teilraum eines reellen n^2 -dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $\dot{y}_{\mu\nu}$ ($\mu \leq \nu$), $\ddot{y}_{\mu\nu}$ ($\mu < \nu$) aufgefaßt werden. Bekanntlich läßt sich jede Matrix $Y \in \mathfrak{Y}$ eindeutig in der Form

$$(16) \quad Y = T[R]$$

darstellen mit einer reellen positiven Diagonalmatrix T und einer komplexen Dreiecksmatrix R :

$$T = (t_\mu \delta_{\mu\nu}), \quad t_\mu > 0; \quad R = (r_{\mu\nu}), \quad r_{\mu\mu} = 1, \quad r_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu > \nu.$$

Falls γ eine positive reelle Zahl ist, wird durch

$$0 < t_\mu \leq \gamma t_{\mu+1}, \quad r_{\mu\nu} \bar{r}_{\mu\nu} \leq \gamma^2 \quad (1 \leq \mu < \nu \leq n)$$

ein Teilbereich $\mathfrak{Y}(\gamma) = \mathfrak{Y}^{(n)}(\gamma)$ von $\mathfrak{Y}^{(n)}$ definiert. Liegt Y in $\mathfrak{Y}(\gamma)$, so ist auch $\lambda Y \in \mathfrak{Y}(\gamma)$ für alle $\lambda > 0$. d Y sei wie in (15) erklärt. Wir behaupten

Hilfssatz 2: Für beliebige reelle positive Zahlen γ, y ist

$$\int_{\substack{Y \in \mathfrak{H}^{(n)}(\gamma) \\ |Y| \leq y}} dY = v_n(\gamma) y^n$$

mit einer nur von n und γ abhängigen positiven Konstanten $v_n(\gamma)$.

Beweis: Es genügt offenbar, die Behauptung für $y = 1$ zu beweisen. Wir zerlegen die Matrix R der Darstellung (16) in Real- und Imaginärteil:

$$R = \overset{*}{R} + i \overset{**}{R}, \quad \overset{*}{R} = (\overset{*}{r}_{\mu\nu}), \quad \overset{**}{R} = (\overset{**}{r}_{\mu\nu})$$

und führen an Stelle von $y_{\mu\nu} (\mu \leq \nu)$, $\ddot{y}_{\mu\nu} (\mu < \nu)$ die neuen Variablen $t_\mu (1 \leq \mu \leq n)$; $\overset{*}{r}_{\mu\nu}$, $\overset{**}{r}_{\mu\nu} (\mu < \nu)$ ein, die wir wieder als Koordinaten eines n^2 -dimensionalen euklidischen Raumes deuten. Mit $\mathfrak{E}_n(\gamma)$ bezeichnen wir denjenigen Teil dieses Raumes, in dem

$0 < t_\mu \leq \gamma t_{\mu+1}$, $-\gamma \leq \overset{*}{r}_{\mu\nu} \leq \gamma$, $-\gamma \leq \overset{**}{r}_{\mu\nu} \leq \gamma$ ($1 \leq \mu < \nu \leq n$), $t_1 t_2 \cdots t_n \leq 1$ gilt. Man setze

$$dT = dT_n = \prod_{\mu=1}^n dt_\mu, \quad d\overset{*}{R} d\overset{**}{R} = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} d\overset{*}{r}_{\mu\nu} d\overset{**}{r}_{\mu\nu}.$$

Die Funktionaldeterminante bei der vorgenommenen Variablentransformation ist

$$\frac{\partial(\overset{*}{Y}, \overset{**}{Y})}{\partial(\overset{*}{T}, \overset{**}{T})} = \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} \right)^{\frac{n(1-n)}{2}} t_1^{2(n-1)} t_2^{2(n-2)} \cdots t_{n-1}^2.$$

Hilfssatz 2 ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$S_n(\gamma) = \int_{\mathfrak{E}_n(\gamma)} t_1^{2(n-1)} t_2^{2(n-2)} \cdots t_{n-1}^2 dT d\overset{*}{R} d\overset{**}{R}$$

existiert. Wie man leicht bestätigt, unterscheidet sich $S_n(\gamma)$ von $S_n(1)$ nur um eine Potenz von γ . $S_n(1)$ wiederum unterscheidet sich nur um einen konstanten Faktor von $\tau_n = \tau_n(1)$, wobei allgemein

$$\tau_n(a) = \int_{\mathfrak{E}_n(a)} t_1^{2(n-1)} t_2^{2(n-2)} \cdots t_{n-1}^2 dT_n$$

gesetzt und der Integrationsbereich $\mathfrak{E}_n(a)$ durch

$$0 < t_\mu \leq t_{\mu+1} (1 \leq \mu < n), \quad t_1 t_2 \cdots t_n \leq a \quad (a > 0)$$

definiert ist. Offenbar gilt $\tau_n(a) = a^n \tau_n$ und $\tau_1 = 1$. Nun sei $n > 1$, und es existiere τ_{n-1} . Dann wird

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\mathfrak{E}_n(1) \\ r \leq t_n \leq R}} \prod_{\mu=1}^n t_\mu^{2(n-\mu)} dT_n &= \int_r^R \left\{ \int_{\substack{\mathfrak{E}_{n-1}\left(\frac{1}{t_n}\right) \\ t_{n-1} \leq t_n}} \prod_{\mu=1}^{n-1} t_\mu^{2(n-\mu)} dT_{n-1} \right\} dt_n \\ &\leq \int_r^R \left\{ \int_{\mathfrak{E}_{n-1}\left(\frac{1}{t_n}\right)} \prod_{\mu=1}^{n-1} t_\mu^{2(n-\mu)} dT_{n-1} \right\} dt_n \leq \int_r^R t_n^{-2} \left\{ \int_{\mathfrak{E}_{n-1}\left(\frac{1}{t_n}\right)} \prod_{\mu=1}^{n-1} t_\mu^{2((n-1)-\mu)} dT_{n-1} \right\} dt_n \\ &= \tau_{n-1} \int_r^R t_n^{-n-1} dt_n \leq \frac{1}{n} \tau_{n-1} \frac{1}{r^n} < \varepsilon \text{ für } r, R > r_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

d. h. τ_n existiert ebenfalls; Hilfssatz 2 ist somit bewiesen.

Unter $\mathfrak{B}[P]$ soll allgemein die Menge der Matrizen $Y[P]$ mit $Y \in \mathfrak{B}$ verstanden werden.

Hilfssatz 3: Es sei $f(y)$ für $y \geq 0$ reell und stetig. Dann ist

$$(17) \quad \int_{\substack{Y \in \mathfrak{B}^{(m)}(Y)[P] \\ |Y| \leq y}} f(|Y|) |Y|^r dY = m v_m(\gamma) \int_0^y f(t) t^{r+m-1} dt$$

für $r + m > 0$ und alle nicht-singulären m -reihigen Matrizen P .

Zum Beweis setze man $Y_1 = \sqrt[m]{\Re(P)} Y [P^{-1}]$ und führe an Stelle der durch \dot{Y}, \ddot{Y} gegebenen Variablen die entsprechenden Variablen aus den Matrizen \dot{Y}_1, \ddot{Y}_1 ein; die Funktionaldeterminante hat den Wert 1, und es ist $|Y| = |Y_1|$. Folglich ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung (17) von der Matrix P unabhängig. Nun schließe man weiter wie in [6].

Wegen späterer Anwendung werde noch der Spezialfall $f(y) = 1$ notiert:

$$(18) \quad \int_{\substack{Y \in \mathfrak{B}^{(m)}(Y)[P] \\ |Y| \leq y}} |Y|^r dY = m v_m(\gamma) \int_0^y t^{r+m-1} dt \\ = \frac{m}{r+m} v_m(\gamma) y^{r+m} \text{ für } r + m > 0.$$

D. Von der *Humbertschen Reduktionstheorie* [4] verwenden wir folgende Tatsachen: Im Raume $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^{(n)}$ der positiven hermiteschen Matrizen $Y^{(n)}$ gibt es einen Fundamentalbereich $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(n)}$ bezüglich der Gruppe aller mit unimodularen Matrizen U über dem imaginär-quadratischen Zahlkörper K gebildeten Selbstabbildungen $Y \rightarrow Y[U]$ von \mathfrak{Y} . Der Bereich \mathfrak{R} setzt sich aus endlich vielen Teilbereichen \mathfrak{R}_κ zusammen: $\mathfrak{R} = \bigcup_{\kappa=1}^h \mathfrak{R}_\kappa$, deren jeder mit

Hilfe einer gewissen n -reihigen ganzen nicht-singulären Matrix A_κ über K definiert wird. \mathfrak{R} ist eine abgeschlossene Punktmenge und wird von endlich vielen Hyperebenen berandet. Besonders wichtig für unsere Betrachtungen ist

Hilfssatz 4 (HUMBERT): Es gibt eine positive, nur von n und K abhängige Konstante c , so daß folgendes zutrifft: ist $Y \in \mathfrak{R}^{(n)}$, also etwa $Y \in \mathfrak{R}_\kappa$, so gilt

$$Y[A_\kappa] \in \mathfrak{Y}^{(n)}(c).$$

E. *Hermitesche Matrizenpaare.* Zwei n -reihige komplexe Matrizen C, D bilden ein hermitesches Matrizenpaar, wenn $C \tilde{D} = D \tilde{C}$ gilt und die zusammengesetzte Matrix (C, D) den Rang n besitzt. Ist s der Rang von C , so läßt sich das Paar C, D mit Hilfe zweier geeigneter nicht-singulärer Matrizen P, Q in der Form

$$C = P \begin{pmatrix} E^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad D = P \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1}$$

darstellen. Für $s > 0$, $Z_\lambda = X + i \lambda Y \in \mathfrak{B}$ mit $\lambda > 0$ und $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ mit $Q_1 = Q_1^{(s,n)}$ ergibt sich

$$\Re(C Z_\lambda + D) = \Re(P \tilde{Q}^{-1}) \Re(Z_\lambda [\tilde{Q}_1] + D_1).$$

Durch geeignete Wahl der Matrix M läßt sich

$$Y[\tilde{Q}_1 M] = E \text{ und } (X[\tilde{Q}_1] + D_1)[M] = (d_\mu \delta_{\mu\nu})$$

erreichen; also wird

$$(19) \quad \Re(CZ_1 + D) = \Re(P \tilde{Q}^{-1}) \Re(Y[\tilde{Q}_1]) \prod_{\mu=1}^s (d_\mu^2 + \lambda^2).$$

Zwei n -reihige hermitesche Matrizenpaare C, D und C_0, D_0 heißen assoziiert, wenn $(C, D) = P_0(C_0, D_0)$ gilt mit einer komplexen Matrix P_0 . Die Gesamtheit der zu C, D assoziierten hermiteschen Matrizenpaare bildet eine Klasse.

Für hermitesche Matrizenpaare über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K ist in [1] folgendes bewiesen worden: In jeder Klasse assoziierter hermitescher Matrizenpaare C, D über K gibt es teilerfremde Paare. Jeder solchen Klasse $\{C, D\}$ entspricht umkehrbar eindeutig eine Klasse Ω von Matrizenpaaren und bei festem $O \in \Omega$ eine hermitesche Matrix L über K , für die $OL = L$ gilt. Ω ist die Klasse der Rechteinheiten von C . Zwischen den Repräsentanten C, D und O, L bestehen die Beziehungen

$$(20) \quad C = P \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = P \begin{pmatrix} GL\tilde{G} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1} \text{ mit } Q = \begin{pmatrix} G \\ W \end{pmatrix}, \quad G = G^{(s, n)},$$

wobei P eine gewisse nicht-singuläre Matrix und Q eine nicht-singuläre ganze Matrix über K ist mit der Eigenschaft

$$QOQ^{-1} = \begin{pmatrix} E^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } s = \text{Rang } C = \text{Rang } O.$$

Es sei nun C, D ein teilerfremdes hermitesches Matrizenpaar über K , das wir uns in der Gestalt (20) vorgelegt denken. Dann wird für $Z = X + iY \in \mathcal{B}$

$$\Re(CZ + D) = \Re(P \tilde{Q}^{-1}) \Re(Y[\tilde{G}]) \prod_{\mu=1}^s (d_\mu^2 + 1).$$

Mit $t(G)$ bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler aller s -reihigen Unterdeterminanten von G und mit $\Re(t(G))$ die Norm des Ideals $t(G)$. Da nach [1] (Lemma 7) der Ausdruck $\Re(P \tilde{Q}^{-1}) \Re(t(G))^2$ eine natürliche Zahl ist, so folgt

$$(21) \quad \Re(CZ + D) \geq \left(\frac{|Y[\tilde{G}]|}{\Re(t(G))} \right)^2.$$

Ist U eine s -reihige unimodulare Matrix über K , so dürfen wir in der Darstellung (20) P und Q durch

$$P^* = P \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad Q^* = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} Q$$

ersetzen; dabei geht G in UG über. Das heißt, wir können annehmen, daß $Y[\tilde{G}]$ reduziert ist. Wir wenden Hilfssatz 4 an, schreiben also

$$Y[\tilde{G}A_n^{(s)}] = T[R]$$

mit

$$(22) \quad \begin{aligned} &0 < t_\mu \leq c t_{\mu+1} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, s-1, \\ &r_{\mu\mu} = 1, \quad r_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu > \nu; \quad r_{\mu\nu}, \overline{r_{\mu\nu}} \leq c^2 \text{ für } 1 \leq \mu < \nu \leq s; \quad c = c(s, K). \end{aligned}$$

Den μ -ten Spaltenvektor der Matrix $A_n^{(s)}$ bezeichnen wir mit $a_\mu^{(s)}$. Wegen der speziellen Gestalt von T und R ist

$$Y[\tilde{G} a_\mu^{(s)}] = t_1 |r_{1\mu}|^2 + t_2 |r_{2\mu}|^2 + \dots + t_{\mu-1} |r_{\mu-1\mu}|^2 + t_\mu.$$

Berücksichtigt man die Ungleichungen (22), so ergibt sich

$$(23) \quad t_\mu \geq c^{(\mu)} Y[\tilde{G} a_\mu^{(s)}] \quad (\mu = 1, 2, \dots, s)$$

mit Konstanten $c^{(\mu)}$, die nur von K , s und μ abhängen. Folglich gilt mit einer gewissen, nur von n und K abhängigen positiven Konstanten c die Ungleichung

$$(24) \quad |Y[\tilde{G}]| \geq c \prod_{\mu=1}^s Y[\tilde{G} a_\mu^{(s)}].$$

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz 5: Es sei C_0, D_0 ein n -reihiges hermitesches Matrizenpaar über K und

$$(25) \quad Z^{(n)} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & zE^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Besitzt die mit dieser Matrix gebildete Determinante $|C_0 Z + D_0|$ als Polynom in z den Grad 0, so gibt es ein $(n - \alpha)$ -reihiges hermitesches Matrizenpaar C_1, D_1 über K derart, daß das Paar

$$(26) \quad C^{(n)} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(n)} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu C_0, D_0 assoziiert ist. Insbesondere gilt also

$$|CZ + D| = |C_1 Z_1 + D_1|.$$

Beweis: Da es in jeder Klasse assoziierter hermitescher Matrizenpaare über K teilerfremde gibt, dürfen wir annehmen, daß das Paar C_0, D_0 teilerfremd ist. Die Matrix C_0 besitze den Rang s . Im Falle $s = 0$ ist nichts zu beweisen. Es sei also $s > 0$. Der Klasse der zu C_0, D_0 assoziierten hermiteschen Matrizenpaare möge die Einheitenklasse \mathcal{Q} und bei festem $O_0 \in \mathcal{Q}$ die hermitesche Matrix L_0 mit der Eigenschaft $O_0 L_0 = L_0$ entsprechen. Die zwischen C_0, D_0 und O_0, L_0 bestehende Beziehung sei entsprechend (20) durch

$$C_0 = P_0 \begin{pmatrix} G_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_0 = P_0 \begin{pmatrix} G_0 L_0 \tilde{G}_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{Q}_0^{-1}$$

mit

$$Q_0 O_0 Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} E^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ W_0 \end{pmatrix}, \quad G_0 = G_0^{(s, n)}$$

gegeben. Wir zerlegen die in (25) auftretenden Matrizen in ihre hermiteschen Bestandteile:

$$Z = X + iY, \quad Z_1 = X_1 + iY_1, \quad z = x + iy$$

und setzen $G_0 = (G_{01}, G_{02})$ mit $G_{01} = G_{01}^{(s, n-\alpha)}$. In der bisherigen Bezeichnung gelten nach (21) und (24) für $Z \in \mathcal{B}^{(n)}$ die Ungleichungen

$$\Re(C_0 Z + D_0) \geq \left(\frac{|Y[\tilde{G}_0]|}{\Re(L_0)} \right)^2, \quad |Y[\tilde{G}_0]| \geq c \prod_{\mu=1}^s Y[\tilde{G}_0 a_\mu^{(s)}].$$

Wegen der besonderen Gestalt der Matrix (25) ergibt sich

$$|Y[\tilde{G}_0]| \geq \epsilon \prod_{\mu=1}^s (Y_1 [\tilde{G}_{01} a_{\mu}^{(s)}] + y \tilde{a}_{\mu}^{(s)} G_{02} \tilde{G}_{02} a_{\mu}^{(s)}) \text{ für } Y_1 > 0, y > 0.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist genau dann von y unabhängig, wenn $\tilde{A}_s G_{02} = 0$, also $G_{02} = 0$ ist. Da

$$|Y[\tilde{G}_0]| \rightarrow \infty \text{ für } y \rightarrow \infty \text{ im Falle } G_{02} \neq 0,$$

so ist $|C_0 Z + D_0|$ nur dann von z unabhängig, wenn $G_{02} = 0$ ist. Weil G_0 den Rang s besitzt, ist $G_{02} = 0$ nur möglich, wenn $s \leq n - \alpha$ zutrifft.

Es sei nun $G_{02} = 0$ und O_1 Rechtseinheit von G_{01} ; dann ist $O^{(n)} = \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rechtseinheit von G_0 ; d. h. O und O_0 liegen in derselben Klasse Ω . Wir ersetzen den Repräsentanten O_0 von Ω durch die Matrix O . Dann geht L_0 über in

$$L = O L_0 \tilde{O} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\tilde{L} = L$ und $O L = L$ ist die $(n - \alpha)$ -reihige Matrix L_1 hermitisch, und es gilt $O_1 L_1 = L_1$. Mit einer nicht-singulären ganzen Matrix $Q_1^{(n-\alpha)} = \begin{pmatrix} G_1 \\ W_1 \end{pmatrix}$, $G_1 = G_1^{(s, n-\alpha)}$, für die

$$Q_1 O_1 Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} E^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird, und einer nicht-singulären Matrix $P_1^{(n-\alpha)}$ bilde man

$$C_1 = P_1 \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = P_1 \begin{pmatrix} G_1 L_1 \tilde{G}_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1}.$$

Nun werde

$$Q^{(n)} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} G \\ W \end{pmatrix} \text{ mit } G^{(s, n)} = (G_1, 0), \quad P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

gesetzt. Dann folgt

$$Q O Q^{-1} = \begin{pmatrix} E^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und das durch

$$C = P \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = P \begin{pmatrix} G L \tilde{G} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

definierte n -reihige hermitesche Matrizenpaar C, D besitzt die Gestalt (26) und ist zu C_0, D_0 assoziiert.

Die Behauptung von Hilfssatz 5 läßt sich auch so aussprechen: Ist $|C_0 Z + D_0|$ von z unabhängig, so gibt es in Ω eine Matrix O der Gestalt

$$O = \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } O_1 = O_1^{(n-\alpha)}.$$

Die zugehörige Matrix L hat dann wegen $O L \tilde{O} = L$ notwendig die Form

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei C_0, D_0 ein teilerfremdes hermitesches Matrizenpaar, das die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 erfüllt, und für das $(C_0, D_0) \equiv (0, \epsilon E^{(n)}) (g)$ gilt. Man

wähle eine unimodulare Matrix U , so daß $U(C_0, D_0)$ die Gestalt (26) besitzt. Die Determinante von D_1 genügt dann der Kongruenz $|D_1| \equiv \varepsilon_1(q)$ mit einer gewissen Einheit $\varepsilon_1 \in K$. Darum gibt es nach [9], Hilfssatz 7 über K eine unimodulare Matrix $U_1 \equiv D_1(q)$. Also kann man zu C_0, D_0 ein assoziiertes teilerfremdes Paar C, D der Gestalt (26) angeben, welches der Kongruenz $(C, D) \equiv (0, E^{(n)})(q)$ genügt.

Anmerkung: Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen folgt aus (23)

$$t_\mu \geq c^{(\mu)} \beta \tilde{a}_\mu^{(s)} G \tilde{G} a_\mu^{(s)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, s),$$

wobei β das Minimum der hermiteschen Form $Y[\beta]$ auf der Einheitskugel und die $c^{(\mu)}$ Konstanten bedeuten, die nur von K, s und μ abhängen. Die Matrix $G \tilde{G}$ ist positiv; deshalb gilt die Abschätzung

$$t_1 t_2 \cdots t_s \geq c_1 \prod_{\mu=1}^s (\tilde{a}_\mu^{(s)} G \tilde{G} a_\mu^{(s)}) \geq c_1 |G \tilde{G}| \Re(A_\alpha^{(s)}) \text{ mit } c_1 = c_1(Y^{(n)}, s, K).$$

Wegen $1 \leq s \leq n$ gibt es also eine Konstante $c_2 (< 1)$, die außer von $Y^{(n)}$ nur noch von K abhängt, so daß

$$(27) \quad |Y[\tilde{G}]| \geq c_2 |G \tilde{G}|$$

wird. Eine Rechtseinheit O von G ist Linkseinheit von $O \tilde{O}$, also ist \tilde{O} Rechtseinheit von $O \tilde{O}$ und Linkseinheit von \tilde{G} . Deshalb ([9] Hilfssatz 16) besteht die Beziehung

$$t(G \tilde{G}) = t(G) t(O \tilde{O}) t(\tilde{G}).$$

(27) geht damit über in

$$|Y[\tilde{G}]| \geq c_2 \Re(t(G)) \text{ mit } c_2 = c_2(Y^{(n)}, K), c_2 < 1.$$

Wählt man $\lambda_0 = c_2^{-1}$, so folgt

$$(28) \quad \frac{\Re(\lambda_0 Y[\tilde{G}])}{\Re(t(G))^2} \geq 1.$$

(19), (21) und (28) liefern nun den Satz:

Mit $Z = X + iY$ liegen auch alle Punkte $Z_\lambda = X + i\lambda Y$ für $\lambda > 1$ in dem in [2] angegebenen Fundamentalbereich \mathfrak{F} der hermiteschen Modulgruppe.

Zu jeder Matrix $Y^{-1} \in \mathfrak{R}$ gibt es eine reelle Zahl λ_0 , so daß $Z_\lambda = X + i\lambda Y$ in \mathfrak{F} liegt, wenn $\lambda \geq \lambda_0$ gewählt wird und X die Bedingungen erfüllt: $-\frac{1}{2} \leq \dot{x}_{\mu\nu} \leq \frac{1}{2}$ ($\mu \leq \nu$), $-\frac{1}{2} \leq \ddot{x}_{\mu\nu} \leq \frac{1}{2}$ ($\mu < \nu$).

§ 2. Konvergenz Poincaréscher Reihen.

Es sei F eine nicht-negative n -reihige hermitesche Matrix vom Range s und G eine Untergruppe der hermitisch-symplektischen Gruppe $C^{(n)}$ mit Multiplikatoren $v(\sigma)$ vom Betrag 1. Mit $G(F)$ bezeichnen wir die Untergruppe von G , die aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & H\tilde{A}^{-1} \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \in G \text{ und } F[A] = F$$

besteht. Wir nehmen die Zerlegung von G in Linksklassen nach $G(F)$ vor:

$$G = \sum G(F) \sigma;$$

das volle System der Klassenrepräsentanten σ nennen wir $V(F)$. Nun bilden wir die Poincarésche Reihe

$$(29) \quad g_{-k}(Z, F, V(F)) = \sum_{\sigma \in V(F)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} v(\sigma)^{-1} |CZ + D|^{-k};$$

hierbei bedeutet (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ und k eine natürliche Zahl. Die Reihe (29) hängt im allgemeinen von der Auswahl des Vertretersystems $V(F)$ ab. Unter speziellen Voraussetzungen über G läßt sich zeigen, daß die Poincarésche Reihe (29) absolut und in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes von \mathfrak{B} gleichmäßig konvergiert. Es genügt, dies für die zugehörige Betragreihe zu beweisen, die wir noch mit dem Faktor $|Y|^{\frac{k}{2}}$ multiplizieren:

$$(30) \quad f_{-k}(Z, F, V(F)) = \sum_{\sigma \in V(F)} e^{-2\pi \operatorname{Sp}(FY_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}} \quad (\sigma(Z) = Z_\sigma = X_\sigma + iY_\sigma).$$

Zunächst wollen wir uns F in der speziellen Gestalt

$$(31) \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = F_1^{(s)}$$

vorgelegt denken, so daß also $F_1 > 0$ ist. Beim Konvergenzbeweis verwendet man dann zweckmäßig die Parameterdarstellung

$$(32) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & V \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

mit s -reihigem Y_1 und rechteckigem komplexen $V = V^{(s, n-s)}$. $Y > 0$ ist gleichbedeutend mit $Y_1 > 0$, $Y_s > 0$. Wir nehmen die Zerlegung

$$V = \dot{V} + \omega \ddot{V}$$

vor in reelle Matrizen $\dot{V} = (\dot{v}_{\mu\nu})$, $\ddot{V} = (v_{\mu\nu})$.

Über G machen wir jetzt folgende Voraussetzungen:

1) G ist eine diskontinuierliche Untergruppe der hermitisch-symplektischen Gruppe.

2) Unter den zu einem beliebigen Punkt von \mathfrak{B} bezüglich G äquivalenten Punkten gibt es einen höchsten, d. h. es gibt ein $\tau \in G$, so daß $|Y_\tau| \geq |Y_\sigma|$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

3) In $G(F)$ gibt es eine Untergruppe $\hat{G}(F)$ von endlichem Index η mit einem Fundamentalbereich \mathfrak{T} der auf S. 191 genannten Art, welcher in einer Punktmenge der Gestalt

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\gamma \leq \dot{x}_{\mu\nu} \leq \gamma \quad (\mu \leq \nu), \quad -\gamma \leq \ddot{x}_{\mu\nu} \leq \gamma \quad (\mu < \nu), \\ -\gamma \leq \dot{v}_{\mu\nu} \leq \gamma, \quad -\gamma \leq \ddot{v}_{\mu\nu} \leq \gamma \quad (\mu = 1, 2, \dots, s; \nu = 1, 2, \dots, n-s), \\ Y_1 > 0, \quad Y_s \subset \mathfrak{P} = \bigcup_{\nu=1}^p \mathfrak{P}^{(n-s)}(\gamma) [P_\nu] \end{array} \right.$$

enthalten ist; hierbei ist $\gamma > 0$ und $|P_\nu| \neq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$).

Aus der Voraussetzung 2) folgt $\Re(A) = 1$ für $\begin{pmatrix} A & H\tilde{A}^{-1} \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \in G$. Demnach ist die Reihe (30) jetzt von der Auswahl des Vertretersystems $V(F)$ unabhängig; wir bezeichnen sie deshalb künftig mit $f_{-k}(Z, F)$.

Ein volles Repräsentantensystem der Linksklassen von G nach der Untergruppe $\hat{G}(F)$ sei $\hat{V}(F)$. Die Reihe (30) erscheint dann in der Gestalt

$$(34) \quad f_{-k}(Z, F) = \frac{1}{\eta} \sum_{\sigma \in \hat{V}(F)} e^{-2\pi \operatorname{Sp}(F Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}}.$$

Wir beweisen die Konvergenz von (34) unter den Voraussetzungen 1), 2), 3).

Es sei Z_0 ein fest vorgegebener Punkt des Bereichs $\mathfrak{B}^{(n)}$. Da die hermitisch-symplektischen Abstände $h(Z_0, \sigma(Z_0)) \rightarrow \infty$ streben, wenn σ in irgendeiner Anordnung alle Elemente der diskontinuierlichen Gruppe G durchläuft, gibt es nur endlich viele $\sigma \in G$, so daß $Z_0 = \sigma(Z_0)$ ist; e_0 sei die Anzahl dieser σ . Die Menge der Zahlen

$$h(Z_0, \sigma(Z_0)) > 0, \quad \sigma \in G$$

besitzt ein positives Minimum r_0 . Wir wählen $r < r_0$ und bestimmen um Z_0 die hermitisch-symplektische Kugel \mathfrak{R}_0 mit dem hermitisch-symplektischen Radius $\frac{r}{2}$. \mathfrak{R}_0 und $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ haben offenbar nur dann Punkte gemeinsam, wenn $Z_0 = \sigma(Z_0)$ ist.

Wir setzen

$$\gamma_1 = \min_{\substack{\beta \geq 1}} F_1[\beta] \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \max_{\substack{\beta \geq 1}} F_1[\beta].$$

Wegen der speziellen Gestalt von F ist

$$\operatorname{Sp}(F Y) = \operatorname{Sp}(F_1 Y^{(s)}) \quad \text{für} \quad Y = \begin{pmatrix} Y^{(s)} & * \\ * & * \end{pmatrix};$$

also gilt für beliebiges $Y > 0$

$$(35) \quad \gamma_1 \operatorname{Sp}(Y^{(s)}) \leq \operatorname{Sp}(F Y) \leq \gamma_2 \operatorname{Sp}(Y^{(s)}).$$

Nun seien Z, \hat{Z} beliebige Punkte aus $\mathfrak{B}^{(n)}$ und $h(Z, \hat{Z}) \leq r$; dann ist auch $h(Z_0, \hat{Z}_0) \leq r$. Nach (35) und Hilfssatz 1 wird

$$\frac{\operatorname{Sp}(F \hat{Y}_\sigma)}{\operatorname{Sp}(F Y_\sigma)} \geq \frac{\gamma_1 \operatorname{Sp}(\hat{Y}_\sigma^{(s)})}{\gamma_2 \operatorname{Sp}(Y_\sigma^{(s)})} \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2 m_1} = m$$

sowie

$$|\hat{Y}_\sigma|^{\frac{k}{2}} \leq M |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}}$$

mit einer gewissen Konstanten M . Ist \hat{Z} ein Punkt aus \mathfrak{R}_0 , so gilt demnach

$$e^{-2\pi \operatorname{Sp}(F \hat{Y}_\sigma)} |\hat{Y}_\sigma|^{\frac{k}{2}} \leq M e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(F Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}} \quad \text{für alle } Z \in \mathfrak{R}_0$$

und deshalb auch

$$\begin{aligned} e^{-2\pi \operatorname{Sp}(F \hat{Y}_\sigma)} |\hat{Y}_\sigma|^{\frac{k}{2}} &\leq \frac{M}{J} \int_{\mathfrak{R}_0} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(F Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}} dv \\ &= \frac{M}{J} \int_{\sigma(\mathfrak{R}_0)} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(F Y)} |Y|^{\frac{k}{2}} dv, \end{aligned}$$

wobei dv das durch (14) in \mathfrak{B} definierte Volumenelement bezeichnet und J den hermitisch-symplektischen Inhalt von \mathfrak{R}_0 . Damit ist die für $\hat{Z} \subset \mathfrak{R}_0$ gültige Abschätzung

$$(36) \quad f_{-k}(\hat{Z}, F) \leq \frac{M}{J\eta} \sum_{\sigma \in \hat{V}(F)} \int_{\sigma(\mathfrak{R}_0)} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(FY)} |Y|^{\frac{k}{2}} dv$$

gewonnen. Jeder der Bereiche $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ ist kompakt, wird also von endlich vielen Bildbereichen von \mathfrak{T} bezüglich $\hat{G}(F)$ überdeckt. Die Durchschnitte dieser Bildbereiche mit $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}_\sigma^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots, m_\sigma$). Bei festem σ sind die $\mathfrak{D}_\sigma^{(v)}$ zueinander punktfremd. Alle $\mathfrak{D}_\sigma^{(v)}$ sind meßbar. Wir bestimmen noch die zu $\mathfrak{D}_\sigma^{(v)}$ bezüglich $\hat{G}(F)$ äquivalenten Bereiche $\mathfrak{T}_\sigma^{(v)}$ in \mathfrak{T} und erhalten, da der Integrand in (36) bei allen Substitutionen der Gruppe $\hat{G}(F)$ ungeändert bleibt,

$$(37) \quad f_{-k}(\hat{Z}, F) \leq \frac{M}{J\eta} \sum_{\sigma \in \hat{V}(F)} \sum_{v=1}^{m_\sigma} \int_{\mathfrak{T}_\sigma^{(v)}} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(FY)} |Y|^{\frac{k}{2}} dv \text{ für } \hat{Z} \subset \mathfrak{R}_0.$$

Wie sich aus der Forderung 2) unter Verwendung von Hilfssatz 1 ergibt, existiert eine Konstante y , so daß alle $\mathfrak{T}_\sigma^{(v)}$ von dem Bereich $Z \subset \mathfrak{T}$, $|Y| \leq y$ überdeckt werden. Jeder Punkt dieses Bereichs gehört aber, wie man sich überlegt, höchstens e_0^2 verschiedenen $\mathfrak{T}_\sigma^{(v)}$ ($\sigma \in \hat{V}(F)$, $v = 1, 2, \dots, m_\sigma$) an. Somit folgt aus (37)

$$f_{-k}(\hat{Z}, F) \leq \frac{M e_0^2}{J\eta} \int_{\substack{\mathfrak{T} \\ |Y| \leq y}} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(FY)} |Y|^{\frac{k}{2}} dv \text{ für } \hat{Z} \subset \mathfrak{R}_0.$$

Wir haben jetzt zu untersuchen, für welche k das Integral

$$(38) \quad S_k(m F_1, y) = \int_{\substack{Z \subset \mathfrak{T}, \\ |Y| \leq y}} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(FY)} |Y|^{\frac{k}{2} - 2n} dX dY$$

existiert. Wegen Voraussetzung 3) existiert dieses Integral sicher dann, wenn das über den Teil der Punktmenge (33) erstreckte Integral vorhanden ist, für den $|Y| \leq y$ bleibt. Falls $0 < s < n$ ist, greifen wir auf die Parameterdarstellung (32) zurück und führen an Stelle der Koordinaten $\dot{y}_{\mu\nu}$ ($\mu \leq \nu$), $\ddot{y}_{\mu\nu}$ ($\mu < \nu$) des Raumes $\mathfrak{Y}^{(n)}$ die entsprechenden Koordinaten der Räume $\mathfrak{Y}^{(s)}$, $\mathfrak{Y}^{(n-s)}$, sowie die $2s(n-s)$ reellen Koordinaten $\dot{v}_{\mu\nu}$, $\ddot{v}_{\mu\nu}$ der variablen Matrix $V^{(s, n-s)} = (\dot{v}_{\mu\nu}) + \omega(\ddot{v}_{\mu\nu})$ ein. Die Funktionaldeterminante dieser Variablentransformation ist $|Y_1|^{2(n-s)}$. Wegen der besonderen Gestalt des Integrationsbereichs (33) genügt es, das Integral

$$J_k(m F_1, y) = \sum_{v=1}^g \int_{\substack{Y_1 > 0 \\ Y_1 \in \mathfrak{Y}^{(n-s)}(v) \cap [P_v] \\ |Y_1|, |Y_2| \leq y}} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(F_1 Y_1)} |Y_1|^{\frac{k}{2} - 2s} |Y_2|^{\frac{k}{2} - 2n} dY_1 dY_2$$

zu betrachten. Unter Verwendung von (18) können wir die Integration über Y_2 ausführen; so erhalten wir

$$J_k(m F_1, y) = \frac{2p(n-s)}{k-2(n+s)} v_{n-s}(\gamma) y^{\frac{k}{2}-n-s} \int_{Y_1 > 0} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(F_1 Y_1)} |Y_1|^{n-s} dY_1 \quad \text{für } k > 2(n+s).$$

Mit Hilfe der Formel

$$\int_{Y_1 > 0} e^{-\operatorname{Sp}(HY_1)} |Y_1|^{\alpha-s} dY_1 = \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} \right)^{\frac{s(1-s)}{2}} \pi^{\frac{s(s-1)}{2}} |H|^{-\alpha} \Gamma(\alpha-s+1) \Gamma(\alpha-s+2) \cdots \Gamma(\alpha) \\ \text{für } \tilde{H} = H, H = H^{(s)} > 0, \alpha > s-1,$$

die man durch vollständige Induktion leicht beweist, ergibt sich schließlich

$$J_k(m F_1, y) = \frac{2p(n-s)}{k-2(n+s)} \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} \right)^{\frac{s(1-s)}{2}} (2m)^{-n-s} v_{n-s}(\gamma) y^{\frac{k}{2}-n-s} \pi^{\frac{s(s-1)}{2}-n-s} |F_1|^{-n} \times \\ \times \Gamma(n-s+1) \Gamma(n-s+2) \cdots \Gamma(n) \\ \text{für } k > 2(n+s), 0 < s < n.$$

In den hiervon noch nicht erfaßten Fällen $s=0$ oder n wird man, ausgehend von (38), auf folgende Integrale geführt:

$$J_k(0, y) = \sum_{r=1}^p \int_{Y \subset \mathfrak{H}^{(n)}(\gamma) [P_r], |Y| \leq y} |Y|^{\frac{k}{2}-2n} dY \\ = \frac{2pn}{k-2n} v_n(\gamma) y^{\frac{k}{2}-n} \quad \text{für } s=0, k > 2n; \\ J_k(m F, y) \leq \int_{Y > 0} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(FY)} |Y|^{\frac{k}{2}-2n} dY \\ = \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} \right)^{\frac{n(1-n)}{2}} (2m)^{-n(\frac{k}{2}-n)} \pi^{\frac{n(n-1)}{2}-n(\frac{k}{2}-n)} |F|^{n-\frac{k}{2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{k}{2}-2n+1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}-2n+2\right) \cdots \Gamma\left(\frac{k}{2}-n\right) \\ \text{für } s=n, k > 4n-2.$$

Falls F die Gestalt (31) hat, konvergiert die Reihe $g_{-k}(Z, F, \vee(F))$ also absolut und in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes von \mathfrak{B} gleichmäßig, wenn $k > \operatorname{Min}(4n-2, 2(n+s))$ vorausgesetzt wird.

Falls F nicht die Gestalt (31) besitzt, können wir eine Matrix Q so bestimmen, daß

$$F^* = F[Q^{-1}] = \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von der Form (31) ist. Wir bilden dann die hermitisch-symplektische Matrix

$$\varrho = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q}^{-1} \end{pmatrix}$$

und setzen

$$\varrho(Z) = QZ\tilde{Q} = Z^*, \\ G^* = \varrho G \varrho^{-1}, \quad G^*(F^*) = \varrho G(F) \varrho^{-1}.$$

Durchläuft σ das Repräsentantensystem $V(F)$, so stellen die Matrizen $\sigma^* = \varrho \sigma \varrho^{-1}$ ein volles System $V^*(F^*)$ der Linksklassen von G^* nach $G^*(F^*)$ dar. Die Reihe (29) können wir also auf die Form

$$g_{-k}(Z, F, V(F)) \\ = \sum_{\sigma^* \in V^*(F^*)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F^* \sigma^*(Z^*))} v^*(\sigma^*)^{-1} |C^* Z^* + D^*|^{-k} = g_{-k}(Z^*, F^*, V^*(F^*))$$

bringen, wobei (C^*, D^*) die zweite Matrizenzeile von σ^* bezeichnet und $v^*(\sigma^*) = v(\sigma)$ gesetzt ist. Die durchgeführten Betrachtungen ergeben

Satz 1: Die zur Gruppe G und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ gebildete Poincarésche Reihe $g_{-k}(Z, F, V(F))$ konvergiert für $k > \operatorname{Min}(4n - 2, 2(n + s))$ absolut und stellt eine in \mathfrak{B} reguläre Funktion unter folgenden Voraussetzungen dar: Bei geeigneter Wahl der Matrix Q , für die

$$F[Q^{-1}] = \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^* = F^{*(s)} > 0$$

gilt, sind für

$$G^* = \varrho G \varrho^{-1} \text{ mit } \varrho = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } F^* = F[Q^{-1}]$$

die Bedingungen 1)–3) von Seite 199 an Stelle von G, F erfüllt.

§ 3. Poincarésche Reihen als Modulformen.

Es sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, q eine natürliche Zahl und $G^{(n)}$ eine Kongruenzgruppe modulo q über K . Da $G^{(n)}$ die Hauptkongruenzgruppe $H_q^{(n)}$ als Untergruppe von endlichem Index enthält, gilt $|A| = \varepsilon$ mit einer Einheit $\varepsilon \in K$ für alle $\begin{pmatrix} A & H\tilde{A}^{-1} \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \in G^{(n)}$. Zur Gruppe $G^{(n)}$ sei ein Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ vorgelegt mit den Eigenschaften

$$(39) \quad |v(\sigma)| = 1; \quad v(\sigma) = 1 \text{ für } \sigma \in H_q^{(n)} \text{ und für } \sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{-1} \end{pmatrix} \in G^{(n)}.$$

F sei eine zugehörige Exponentenmatrix vom Range s . Die natürliche Zahl k erfülle die Forderungen

$$k > \operatorname{Min}(4n - 2, 2(n + s)), \quad k \equiv 0(w),$$

wobei w die Anzahl der Einheitswurzeln in K bedeutet. Mit (C_σ, D_σ) bezeichnen wir die zweite Matrizenzeile der hermitisch-symplektischen Matrix σ . Im übrigen behalten wir die Bezeichnungen von § 2 bei. Wir werden zeigen, daß unter den eben angegebenen Voraussetzungen die Poincarésche Reihe

$$(40) \quad g_{-k}(Z, F) = \sum_{\sigma \in V(F)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} v(\sigma)^{-1} |C_\sigma Z + D_\sigma|^{-k}$$

eine Modulform ist von der Dimension $-k$ zur Kongruenzgruppe $G = G^{(n)}$ modulo q und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$.

Zunächst erkennt man leicht, daß für $\varrho \in G(F)$ die Gleichung

$$e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\varrho\sigma(Z))} v(\varrho\sigma)^{-1} |C_{\varrho\sigma}Z + D_{\varrho\sigma}|^{-k} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} v(\sigma)^{-1} |C_{\sigma}Z + D_{\sigma}|^{-k}$$

besteht; d. h. $g_{-k}(Z, F)$ ist unabhängig von der Auswahl des Vertretersystems $V(F)$. Da für $\tau \in G$ mit σ auch $\sigma\tau$ ein vollständiges Vertretersystem der Linksklassen von G nach $G(F)$ durchläuft, so folgt

$$g_{-k}(\tau(Z), F) = v(\tau) |C_{\tau}Z + D_{\tau}|^k g_{-k}(Z, F).$$

Die Transformationsgleichung (1) ist also formal erfüllt.

Die Regularität von $g_{-k}(Z, F)$ in $\mathcal{G}^{(n)}$ werden wir mit Hilfe von Satz 1 nachweisen. Die Bedingungen 1) und 2) von S. 199 sind erfüllt, da $G^{(n)}$ über $H_q^{(n)}$ einen endlichen Index besitzt. Um (3) zu prüfen, bestimmen wir eine nicht-singuläre ganze Matrix Q über K , so daß

$$F^* = F[Q^{-1}] = \begin{pmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } F_1^* > 0$$

wird. Es werde $\varrho = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^{-1} \end{pmatrix}$ gesetzt und die Gruppen G^* , $G^*(F^*)$ wie im vorigen Paragraphen definiert. Ferner sei

$$H_q(F) = G(F) \cap H_q \text{ und } H_q^*(F^*) = \varrho H_q(F) \varrho^{-1}.$$

Wir zeigen, daß es in der Gruppe $G^*(F^*)$ eine Untergruppe von endlichem Index gibt mit einem Fundamentalbereich der auf S. 191 genannten Art, welcher in einer Punktmenge von der Gestalt (33) enthalten ist. Evident ist $H_q^*(F^*)$ Untergruppe von $G^*(F^*)$ von endlichem Index. Die Gruppe $H_q^*(F^*)$ besteht aus allen Matrizen

$$\begin{pmatrix} U^* & QH\tilde{Q}\tilde{U}^{*-1} \\ 0 & \tilde{U}^{*-1} \end{pmatrix},$$

wobei U^*, H den Bedingungen

$$(41) \quad U^* = QUQ^{-1}, U \equiv \varepsilon E(q), U^{(n)} \text{ unimodular,}$$

$$(42) \quad F^*[U^*] = F^*,$$

$$(43) \quad \tilde{H} = H^{(n)} \text{ ganz, } H \equiv 0(q)$$

genügen. Wir beachten nun:

a) Die Gruppe der ganzen $U^* = QUQ^{-1}$, U unimodular, $U \equiv \varepsilon E(q)$ besitzt in der Gruppe aller durch (41) gegebenen Matrizen U^* einen endlichen Index.

b) Spaltet man U^* , der Matrix F^* entsprechend, in Kästchen auf:

$$U^* = \begin{pmatrix} U_1^* & U_2^* \\ U_3^* & U_4^* \end{pmatrix},$$

so ist

$$F^*[U^*] = F^* \text{ gleichwertig mit } F_1^*[U_1^*] = F_1^*, U_2^* = 0.$$

Es gibt nur endlich viele unimodulare U_1^* über K , für die $F_1^*[U_1^*] = F_1^*$ erfüllt ist.

c) Es sei $U^* = \begin{pmatrix} E & 0 \\ U_3^* & U_4^* \end{pmatrix}$ unimodular und $U^* \equiv E(q)$, wobei $g = \Re(Q)$ gesetzt ist. Dann ist auch $Q^{-1}U^*Q$ unimodular, und es gilt $Q^{-1}U^*Q \equiv E(q)$.

d) Erfüllt die ganze hermitesche Matrix H^* die Kongruenz $H^* \equiv 0 (g, q)$ so ist $H = Q^{-1} H^* Q^{-1}$ ebenfalls ganz und $H \equiv 0 (q)$.

Allgemein bezeichne $H_{m,r} = H_{m,r}^{(n)}$ für natürliche Zahlen m und nichtnegative ganze Zahlen r ($0 \leq r \leq n$) die Gruppe der Matrizen über K von der Gestalt $\begin{pmatrix} U & H \tilde{U}^{-1} \\ 0 & \tilde{U}^{-1} \end{pmatrix}$ mit $\tilde{H} = H^{(n)}$ ganz, $H \equiv 0 (m)$, $U = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$, $U^{(n)}$ unimodular, $U \equiv E (m)$. Insgesamt ist nun zu sehen: Die Gruppe $H_{gq,s}$ besitzt einen endlichen Index sowohl in $G^*(F^*)$ als auch in der Gruppe $H_{1,s}$. Eine Substitution σ der Gruppe $H_{1,s}$ führt $Z \in \mathcal{S}$ über in

$$\sigma(Z) = Z[\tilde{U}] + H.$$

Es werde wieder $Z = X + iY$ gesetzt und für Y die Parameterdarstellung (32) verwendet. Dann gehen also bei Anwendung von σ die Matrizen X, Y über in

$$X[\tilde{U}] + H \text{ bzw. } Y[\tilde{U}] = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2[\tilde{U}_1] \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & \tilde{U}_2 + v\tilde{U}_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right].$$

Ein Fundamentalbereich zu $H_{1,s}$ wird offenbar durch die Punktmenge (33) geliefert mit $\gamma = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}^{(n-s)}$. Da $H_{gq,s}$ in $H_{1,s}$ einen endlichen Index hat, besitzt also $H_{gq,s}$ einen Fundamentalbereich der auf S. 191 genannten Art, welcher in einer Punktmenge der Gestalt (33) enthalten ist; man erkennt dies sofort, wenn man § 1, D beachtet.

Daß im Falle $n = 1$ für die Poincaréschen Reihen (40) Fourierentwicklungen der Art (2) existieren, ist den Untersuchungen [8] zu entnehmen. Damit ist nun bewiesen:

Satz 2: Es sei $G^{(n)}$ eine Kongruenzgruppe modulo q über dem imaginär-quadratischen Zahlkörper K , $v(\sigma)$ ein Multiplikatorsystem zu $G^{(n)}$ mit den Eigenschaften (39) und F eine zugehörige Exponentenmatrix vom Range s . Genügt die natürliche Zahl k den Forderungen

$$k > \min(4n - 2, 2(n + s)), \quad k \equiv 0 (w),$$

so stellt die Poincarésche Reihe

$$g_{-k}(Z, F) = \sum_{\sigma \in V(F)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} v(\sigma)^{-1} |C_\sigma Z + D_\sigma|^{-k}$$

eine Modulform dar von der Dimension $-k$, zur Gruppe $G^{(n)}$ und zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$.

Es sei wieder $H_q = H_q^{(n)}$ die Hauptkongruenzgruppe zur Stufe q (mit Multiplikatorsystem 1). Die Menge der zugehörigen Exponentenmatrizen besteht aus allen nicht-negativen n -reihigen hermiteschen Matrizen F über K , für die qF halbganz ist. Wir wollen die zu $H_q^{(n)}$ gebildeten Poincaréschen Reihen

$$(44) \quad g_{-k}(Z, F) = \sum_{\sigma \in V(F)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}$$

der in (6) erklärten funktionalen Operation Φ^x unterwerfen. Daß Φ^x auf (44) gliedweise ausgeübt werden darf, ist ähnlich wie im rationalen Fall [6] festzustellen. Um die Wirkung von Φ^x auf Poincarésche Reihen $g_{-k}(Z, F)$ zu Exponentenmatrizen F von der Gestalt

$$(45) \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } F_1 = F_1^{(s)} > 0$$

überblicken zu können, ist es zweckmäßig, an Stelle von $V(F)$ das folgende Vertretersystem zu verwenden. Für $0 \leq s \leq n$ seien die Gruppen $H_{q,s}$ wie auf S. 205 definiert. $H_{q,s}$ besitzt in der Gruppe $H_q(F)$ einen endlichen Index $\eta_q(F_1)$; er ist gleich der Anzahl der unimodularen Matrizen $U_1 = \varepsilon E(q)$ über K , für die $F_1[U_1] = F_1$ zutrifft. Ein volles Vertretersystem der Linksklassen von H_q nach $H_{q,s}$ wird durch die Produkte $\tau\sigma$ geliefert, wobei unabhängig voneinander σ ein volles Repräsentantensystem der Linksklassen von H_q nach der Untergruppe $H_{q,0}$ und τ ein volles Linksklassenvertretersystem von $H_{q,0}$ nach $H_{q,s}$ durchlaufen. Mit $\{V^{(s,n)}\}$ bezeichnen wir die Menge aller primitiven Matrizen $V^{(s,n)} = (\varepsilon E^{(s)}, 0)(q)$ über K , die sich zu einer unimodularen Matrix $U^{(n)} = \varepsilon E(q)$ ergänzen lassen. Die Gesamtheit der mit diesen $U = U^{(n)}$ gebildeten Matrizen

$$\tau = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \bar{U}^{-1} \end{pmatrix}$$

stellt ein volles Vertretersystem der Linksklassen von $H_{q,0}$ nach $H_{q,s}$ dar. Ein zweckmäßiges Vertretersystem V_0 der Linksklassen von H_q nach $H_{q,0}$ finden wir unter Beachtung von Hilfssatz 5 und der dort gemachten Bemerkungen. Ist r die kleinste ganze Zahl, so daß in der Klasse Ω n -reihiger Matrizen ein Repräsentant der Gestalt

$$O = \begin{pmatrix} O_1^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

liegt, so schreiben wir $\Omega = \Omega_r$. Die Klassen assoziierter n -reihiger hermitescher Matrizenpaare über K sind im Sinne von Seite 195 den Klassen Ω_r ($1 \leq r \leq n$) und bei festem $O \in \Omega_r$ den n -reihigen hermiteschen Matrizen L über K , für die $O L = L$ gilt, umkehrbar eindeutig zugeordnet. Enthält die dem Paar Ω_r, L entsprechende Klasse hermitescher Matrizenpaare einen teilerfremden Repräsentanten (C, D) mit $C = O(q)$, $D = E(q)$, so schreiben wir $\Omega_r = \Omega_r(q)$, $L = L(q)$ und denken uns C, D immer so ausgewählt, daß diese Kongruenzen erfüllt sind. In den Fällen $r > n - \alpha$ wähle man aus der durch $\Omega_r(q), L(q)$ bestimmten Klasse ein teilerfremdes hermitesches Matrizenpaar C, D aus und ergänze es zu einer Matrix

$$(46a) \quad \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H_q^{(n)}.$$

In den Fällen $r \leq n - \alpha$ bestimmen wir zu jeder Klasse $\Omega_r(q), L(q)$ ein teilerfremdes Paar C, D von der Gestalt (26). Die dort auftretenden Matrizen $C_1^{(n-\alpha)}, D_1^{(n-\alpha)}$ ergänzen wir zu einer Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in H_q^{(n-\alpha)}$$

und setzen

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B^{(n)} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(46b) \quad \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H_q^{(n)}.$$

Die Gesamtheit der so gewonnenen Matrizen (46a) und (46b) bildet das gewünschte System V_0 . Die Poincarésche Reihe (44) erscheint nun in der Form

$$(47) \quad g_{-k}(Z, F) = \frac{1}{\eta_q(F_1)} \sum_{\{V(s, n)\}} \sum_{r=0}^n \sum_{D_r(q), L(q)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F_1[V]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}.$$

Für die Matrizen (46b), also im Falle $r \leq n - \alpha$, gilt offenbar

$$(48) \quad \sigma(Z) = \begin{pmatrix} \sigma_1(Z_1) & 0 \\ 0 & zE \end{pmatrix}$$

für alle Matrizen Z von der in (6) angegebenen Gestalt. Nach Hilfssatz 5 ist $r \leq n - \alpha$ gleichwertig damit, daß die Determinante $|CZ + D|$ von z unabhängig ist.

Gliedweise Anwendung des Operators Φ^α auf die Poincarésche Reihe (47) ergibt nun

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F_1[V]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k} = 0 \quad \text{für } r > n - \alpha.$$

Im Falle $r \leq n - \alpha$ nehmen wir die Aufspaltung

$$V = (V_1, V_2) \quad \text{mit} \quad V_1 = V_1^{(s, n-\alpha)}$$

vor und beachten (48); dann wird

$$\operatorname{Sp}(F_1[V]\sigma(Z)) = \operatorname{Sp}(F_1[V_1]\sigma_1(Z_1)) + z \operatorname{Sp}(F_1[V_2]).$$

Wegen $F_1 > 0$ ist $\operatorname{Sp}(F_1[V_2]) = 0$ mit $V_2 = 0$ gleichwertig. Da V primitiv ist, kann $V_2 = 0$ nur im Falle $\alpha \leq n - s$ eintreten. Es ergibt sich nun

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F_1[V]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k} = 0 \quad \text{für } V_2 \neq 0,$$

$$(49) \quad e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F_1[V]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(F_1[V_1]\sigma_1(Z_1))} |C_1 Z_1 + D_1|^{-k} \quad \text{für } V_2 = 0.$$

Ein Glied der Poincaréschen Reihe zur Matrix (45) liefert also nur dann einen von Null verschiedenen Grenzwert, wenn die Bedingungen

$$\alpha \leq n - s, \quad r \leq n - \alpha, \quad V = (V_1, 0)$$

erfüllt sind. Ist das der Fall, so gilt die Gleichung (49). Wir fassen die letzten Ergebnisse zusammen in

Satz 3: Es sei $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine nicht-negative n -reihige hermitesche Matrix über K , qF halbganz und $F_1 = F_1^{(s)} > 0$. Ferner sei $k > \operatorname{Min}(4n - 2, 2(n + s))$, $k = 0$ (w). Für die zur Hauptkongruenzgruppe $H_q^{(n)}$ gebildete Poincarésche Reihe $g_{-k}(Z, F)$ gilt dann

$$g_{-k}(Z, F) | \Phi^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{im Falle } \alpha > n - s, \\ g_{-k}(\hat{Z}, \hat{F}) & \text{im Falle } \alpha \leq n - s, \end{cases}$$

wobei

$$\hat{Z} = Z \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{F} = F \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } E = E^{(n-\alpha)}$$

gesetzt ist. $g_{-k}(\hat{Z}, \hat{F})$ stellt eine Poincarésche Reihe zur Gruppe $H_q^{(n-\alpha)}$ dar.

Über den Rang der linearen Schar der Modulformen zur hermiteschen Modulgruppe fester Dimension läßt sich nun folgendes aussagen:

Satz 4: Die natürliche Zahl k erfülle die Bedingungen $k > 4n - 2$, $k \equiv 0(w)$. Die Anzahl der linear unabhängigen Modulformen von der Dimension $-k$ zur hermiteschen Modulgruppen $H^{(n)}$ beträgt mindestens

$$\left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor \text{ für } k \equiv 2 \pmod{12} \text{ bzw. } \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 \text{ für } k \not\equiv 2 \pmod{12}.$$

Beweis: Die lineare Schar der Poincaréschen Reihen von der Dimension $-k$, die zu nicht-negativen n -reihigen halbganzen Matrizen F der Gestalt (45) vom Range 0 und 1 und zur hermiteschen Modulgruppe $H^{(n)}$ gebildet sind, wird durch den Operator Φ^{n-1} auf die lineare Schar aller Poincaréschen Reihen von der Dimension $-k$ zur Gruppe $H^{(1)}$ abgebildet. Offenbar ist für $k \equiv 0(w)$ die lineare Schar der Modulformen von der Dimension $-k$ zur Gruppe $H^{(1)}$ identisch mit der linearen Schar der Modulformen zur rationalen Modulgruppe ersten Grades von der Dimension $-k$. Diese Schar wird, wie H. PETERSSON gezeigt hat [7], von der Gesamtheit der zugehörigen Poincaréschen Reihen von der Dimension $-k$ erzeugt und besitzt den linearen Rang $\left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$ für $k \equiv 2 \pmod{12}$ bzw. $\left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1$ für $k \not\equiv 2 \pmod{12}$.

Literatur.

- [1] BRAUN, H.: Hermitian Modular Functions I. Ann. of Math. **50**, 827 (1949). — [2] BRAUN, H.: Hermitian Modular Functions III. Ann. of Math. **53**, 143 (1951). — [3] BRAUN, H.: Der Basissatz für hermitesche Modulformen. Erscheint demnächst in den Hamburger Abhandlungen. — [4] HUMBERT, P.: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. Math. Helvet. **12**, 263 (1939/40). — [5] MAASS, H.: Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum. Math. Ann. **118**, 312 (1942). — [6] MAASS, H.: Über die Darstellung der Modulformen n -ten Grades durch Poincarésche Reihen. Math. Ann. **123**, 125 (1951). — [7] PETERSSON, H.: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. dtsch. Math. Ver. **49**, 49 (1939). — [8] PETERSSON, H.: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **14**, 22 (1941). — [9] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III. Ann. of Math. **38**, 212 (1937). — [10] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulformen n -ten Grades. Math. Ann. **116**, 617 (1939). — [11] SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. **65**, 1 (1943).

(Eingegangen am 7. Oktober 1954.)

Eine Verallgemeinerung der STEINERSchen Formel.

Von

D. OHMANN in Frankfurt a. M.

Die Übertragungsfähigkeit der Ungleichungen für Quermaßintegrale von konvexen Körpern auf allgemeinere Mengenklassen läßt die Frage nahe-
liegend erscheinen, ob auch die für konvexe Körper gültige STEINERSche
Formel für Parallelkörper auf allgemeinere Mengen übertragbar ist. Diese
Frage soll in dieser Note dadurch beantwortet werden, daß wir die
Existenz einer verallgemeinernden Ungleichung für beschränkte abgeschlossene
Mengen nachweisen, die für konvexe Körper zur Gleichheit wird und mit der
STEINERSchen Formel übereinstimmt. Wir fassen das zu erzielende Ergebnis
wie folgt zusammen:

Für das p -te Quermaßintegral W_p ($p = 0, 1, \dots, n-1$) der Parallelmenge
 A_τ ($\tau > 0$) zur beschränkten, abgeschlossenen Menge A des euklidischen R_n be-
steht die Ungleichung

$$(1) \quad W_p(A_\tau) \geq \sum_{v=0}^{n-p} \binom{n-p}{v} \tau^v W_{p+v}(A),$$

in der genau dann Gleichheit eintritt, wenn die Menge A das gleiche p -te Quermaß-
integral besitzt wie ihre konvexe Hülle.

Zur Erläuterung sei dazu bemerkt, daß die Parallelmenge A_τ die Gesamt-
heit der Punkte umfaßt, deren Abstand von A nicht größer als τ ist, und daß
die Quermaßintegrale W_p in üblicher Weise mit Hilfe der Formeln

$$(2) \quad W_p(A) = \frac{1}{n v_{n-1}} \int_{\Omega_n} W_{p-1}(A_\xi) d\xi \quad (p = 1, \dots, n-1),$$

$$W_0(A) = M(A), \quad W_n(A) = v_n$$

zu erklären sind. v_n gibt darin das Volumen der n -dimensionalen Einheits-
kugel Ω_n wieder und $M(A)$ das Lebesgue-Maß von A . A_ξ bezeichnet schließlich
noch den Normalriß von A in der Richtung ξ , d. i. die Orthogonalprojektion
von A auf eine $(n-1)$ -dimensionale Ebene der Normalenrichtung ξ . Dabei
ist zu beachten, daß wir unter ξ sowohl eine Richtung verstehen als auch den
vom Mittelpunkt von Ω_n ausgehenden Einheitsvektor dieser Richtung oder
den durch dessen Spitze auf Ω_n markierten Punkt. Endlich ist noch auf die
vom Verfasser bewiesene Tatsache hinzuweisen, daß das im Sinne LEBESGUES
zu verstehende Integral in Formel (2) für beschränkte abgeschlossene Mengen
tatsächlich existiert¹⁾.

¹⁾ D. OHMANN: Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punkt-
mengen II. [Math. Ann. 127, 1—7 (1954).]

Wir gehen kurz durch die Bemerkung auf nicht abgeschlossene Mengen A ein, daß die Ungleichung (1) für diese in der Gestalt

$$W_p(A_\tau) \geq \sum_{\nu=0}^{n-p} \binom{n-p}{\nu} \tau^\nu W_{p+\nu}(A^*)$$

richtig ist, in der A^* die abgeschlossene Hülle zu A bezeichnet. Man entnimmt dies der Formel (1) durch Beachtung der Beziehung $W_p(A_\tau) = W_p[(A^*)_\tau]$.

1. Die Ungleichung (1).

Zur Herleitung von (1) benötigen wir die Ungleichung

$$(3) \quad M(A_\varepsilon) - M(A) \geq n \int_0^\varepsilon W_1(A_t) dt,$$

zu deren Beweis wir die beschränkte, abgeschlossene Menge A derart durch eine Menge B einschließen, die die Vereinigungsmenge von endlich vielen Kugeln darstellt, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kein Punkt von B um mehr als ε von A entfernt ist:

$$(4) \quad A \subseteq B \subseteq A_\varepsilon.$$

Da sich die Oberfläche der Parallelmenge B_t zu B sodann ebenfalls aus nur endlich vielen Kugelstücken zusammensetzt, läßt sich für das Maß des Normalrisses die Abschätzung

$$(5) \quad M[(B_t)_\xi] \leq \frac{1}{2} \int_{O(B_t)} |\xi \eta| d\sigma$$

angeben, in der $O(B_t)$ die Oberfläche von B_t und $\xi \eta$ das skalare Produkt der Einheitsvektoren ξ und η darstellt, und η die äußere Normalenrichtung des Oberflächenelements $d\sigma$ von B_t bezeichnet. Durch Integration über Ω_n und Umkehrung der Integrationsordnung gewinnt man daraus unter Beachtung der Definitionsformel (2)

$$(6) \quad n W_1(B_t) \leq O(B_t).$$

Es gilt aber weiterhin

$$M(B_{\tau'}) - M(B) = \int_0^{\tau'} O(B_t) dt,$$

was sich für $\tau' = \tau - \varepsilon > 0$ mit (4) und (6) zu

$$M(A_\tau) - M(A) \geq n \int_0^{\tau-\varepsilon} W_1(A_t) dt$$

zusammensetzt. $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert schließlich (3).

Nun merken wir an, daß Ungleichung (1) im Falle $n = 1$ wegen $W_1(A) = 2$ für $n = 1$ sofort aus (3) folgt. Für $n > 1$ können wir daher die Induktionsvoraussetzung einführen, daß (1) in den Räumen geringerer als n -ter Dimension gültig sei, und für die Normalrisse

$$W_{p-1}[(A_\varepsilon)_\tau] \geq \tau \sum_{\nu=0}^{n-p} \binom{n-p}{\nu} \tau^\nu W_{p+\nu-1}(A_\varepsilon) \quad (p = 1, \dots, n-1)$$

notieren. Durch Integration über Ω_n und Benutzung der leicht einzusehenden Beziehung $(A_\xi)_\tau = (A_\tau)_\xi$ sowie der Definitionsformel (2) folgt daraus aber schon Ungleichung (1) für $p = 1, \dots, n-1$. Im Falle $p = 0$ hat man die nun gültige Ungleichung $W_1(A_t) \geq \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} t^r W_{1+r}(A)$ von 0 bis τ nach t zu integrieren, um mit Hilfe von (3) zu (1) zu gelangen.

2. Das Auftreten von Gleichheit.

a) Der Fall $p = 0$. Die eingangs formulierte Bedingung für das Eintreten von Gleichheit in Ungleichung (1)

$$(7) \quad W_p(A) = W_p(\bar{A}) \quad (\bar{A} = \text{konvexe Hülle von } A)$$

ist für $p = 0$ wegen der wieder vorauszusetzenden Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Menge A mit der Aussage gleichbedeutend, daß diese mit ihrer konvexen Hülle übereinstimmt: $A = \bar{A}$ ($p = 0$). Das Hinreichendsein der Bedingung (7) kann man daher dem Umstand entnehmen, daß für konvexe Körper in allen zur Herleitung von (1) benutzten Ungleichungen und mithin auch in (1) selbst das Gleichheitszeichen gültig ist.

Um noch die Notwendigkeit von (7) darzutun, setzen wir A_τ zunächst als nichtkonvex voraus. Sodann lassen sich zwei innere Punkte P_1 und P_2 von A_τ angeben, auf deren Verbindungsstrecke wenigstens ein Punkt Q existiert, der nicht zu A_τ gehört. Bezeichnet a das Minimum der Abstände der Punkte P_1 und P_2 vom Rande von A_τ , und wird die Größe $b > 0$ durch $6b < a$ sowie $4b < \tau$ eingeschränkt, so gehören für $\tau - 4b < t < \tau - 3b$ mit P_1 und P_2 auch die Kugeln K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten P_1 bzw. P_2 und den Radien b bzw. $2b$ zur Menge A_t . Gleichzeitig übersteigt der Abstand des Punktes Q von A_t den Betrag $3b$.

Nun schließen wir A wieder durch die Vereinigungsmenge B von endlich vielen Kugeln ein, deren Punkte von A höchstens den Abstand $\varepsilon < b$ haben sollen, wodurch der Punkt Q einen größeren Abstand als $2b$ von B_t für $\tau - 4b < t < \tau - 3b$ besitzen muß. Wir können daher schließen, daß jede K_1 und K_2 treffende Gerade die Berandung von B_t an wenigstens vier getrennten Stellen durchsetzt. Dazu gehören aber sicher alle Geraden, die K_1 treffen und eine Richtung ξ haben, die von der Richtung ξ_0 der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ um so wenig abweicht, daß $|\xi \xi_0|^2 \geq \gamma^2 = 1 - \left(\frac{b}{\overline{P_1 P_2}}\right)^2$ besteht. Für solche Richtungen werden damit alle Punkte des Normalrisses $(B_t)_\xi$, die $(K_1)_\xi$ angehören, durch die Projektionen von vier verschiedenen Oberflächenelementen von B_t überdeckt, so daß sich in Verschärfung von (5)

$$M[(B_t)_\xi] + M[(K_1)_\xi] \leq \frac{1}{2} \int_{O(B_t)} |\xi \eta| d\sigma \quad (|\xi \xi_0| \geq \gamma)$$

ergibt. Wegen $M[(K_1)_\xi] = v_{n-1} b^{n-1}$ folgt darum mit $\varkappa = \int_{|\xi \xi_0| \geq \gamma} d\eta$

$$O(B_t) \geq n W_1(B_t) + \varkappa b^{n-1}$$

als Verschärfung der Ungleichung (6).

Da diese Beziehung unter der Voraussetzung $\tau - 4b < b < \tau - 3b$ gültig ist, während für jedes andere $t > 0$ Ungleichung (6) richtig bleibt, findet man durch Integration

$$M(B_{\tau-\varepsilon}) - M(B) \geq n \int_0^{\tau-\varepsilon} W_1(B_t) dt + \kappa b^n$$

und wegen $A \subseteq B$ und $A_\varepsilon \supseteq B$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$

$$M(A_\tau) - M(A) \geq n \int_0^\tau W_1(A_t) dt + \kappa b^n.$$

Das bedeutet aber, daß in (3) nur dann Gleichheit eintreten kann, wenn A_τ konvex ist.

Entnehmen wir der Rolle, die (3) bei der Herleitung der Ungleichung (1) für $p = 0$ gespielt hat, daß in dieser höchstens dann Gleichheit eintritt, wenn das gleiche in (3) der Fall ist, so erkennen wir, daß die Konvexität von A_τ eine notwendige Bedingung dafür darstellt. Wir haben also noch den Fall ins Auge zu fassen, daß A_τ konvex ist. Da alsdann $A_\tau = (\bar{A})_\tau$ ist, haben wir

$W_0(A_\tau) \geq \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \tau^r W_r(\bar{A})$, womit in (1) ersichtlich nur unter der Bedingung $W_0(A) = W_0(\bar{A})$ Gleichheit auftreten kann.

b) Der Fall $p > 0$. Wir führen die Induktionsvoraussetzung ein, daß die Bedingung (7) für jedes $p' < p$ als notwendig und hinreichend für das Eintreten von Gleichheit in (1) erkannt sei. Des weiteren merken wir den für beschränkte, abgeschlossene Mengen gültigen Sachverhalt an, daß für jede konvergente Richtungsfolge $\xi_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots)$ die Ungleichung

$$(8) \quad \limsup_{\sigma \rightarrow \infty} W_p(A_{\xi_\sigma}) \leq W_p(A_{\xi^*}) \quad \left(\xi^* = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \xi_\sigma \right)$$

besteht²⁾.

Da die Ungleichung (1) für $p > 0$ durch Integration aus

$$W_{p-1}[(A_\xi)_\tau] \geq \sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tau^r W_{p+r-1}(A_\xi) \quad (p > 0)$$

hervorgeht, wird in ihr der Induktionsvoraussetzung gemäß α) mindestens bzw. β) höchstens dann Gleichheit eintreten, wenn $W_{p-1}(A_\xi) = W_{p-1}[(\bar{A}_\xi)]$ α) auf Ω_n bzw. β) auf einer auf Ω_n dicht liegenden Menge gilt. Wegen (8) erweitert sich die Gültigkeit dieser Beziehung aber auch im Fall β) auf alle Punkte von Ω_n . Integration über Ω_n liefert unter Beachtung von $(\bar{A}_\xi) = (\bar{A})_\xi$ schließlich schon die Bedingung (7), die sich damit auch für $p > 0$ als notwendig und hinreichend erweist.

(Eingegangen am 28. Juli 1954.)

²⁾ D. OHMANN, a. a. O.

Zur synthetischen Begründung der projektiven Geometrie der Ebene.

Von

FRIEDRICH BENNHOLD in Frankfurt am Main.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	213
§ 1. Axiome und Sätze über Anordnungsbeziehungen und das Archimedische Postulat	214
§ 2. Hilfssätze zur Herleitung eines Theorems über die Beweisbarkeit des PASCALSchen Satzes	217
§ 3. Beweis des PASCALSchen Satzes aus 8-parametrigem durch n Konstruktionsschritte entstehenden Schnittpunktsätzen	224

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Behandlung des Problems der Begründung der ebenen projektiven Geometrie, d. h. zum Beweis des PAPPUS-PASCALSchen Satzes, ohne Kongruenzaxiome und ohne Algebraisierung, aber mit dem Archimedischen Postulat und Anordnungsaxiomen. Bekanntlich folgt aus dem DESARGUESschen Satz D_8^1) und dem algebraisch gefaßten Archimedischen Postulat der PAPPUS-PASCALSche Satz (im folgenden kurz als Pascalscher Satz bezeichnet). Der Beweis wurde bisher unter Zuhilfenahme einer analytischen Geometrie geführt; es ist aber auch ein rein synthetischer Beweis des PASCALSchen Satzes aus den geometrischen Anordnungsaxiomen, dem geometrischen Archimedischen Postulat (Axiom 6, S. 216) und dem Satz D_8 möglich, der hier nicht angegeben wird. Die Methode dieses Beweises soll aber dazu verwendet werden, um die Voraussetzungen bei der Ableitung des PASCALSchen Satzes auf eine bisher noch nicht betrachtete Weise zu modifizieren. Wir werden Schnittpunktsätze des MÖBIUSSchen Netzes heranziehen ($\mathfrak{S}_{n,2}^{(n)}$, $\mathfrak{S}_{n,2}^{(n-1)}$, $\mathfrak{T}_{n,2}^{(n)}$, $\mathfrak{T}_{n,2}^{(n-1)}$, S. 228), die nach einer bestimmten Vorschrift durch beliebig viele Konstruktionsschritte definiert sind, und zeigen: Der PASCALSche Satz folgt aus einem dieser Sätze, den Anordnungsaxiomen und dem Archimedischen Postulat (§ 3). Der Beweis verläuft derart, daß aus dem Archimedischen Postulat und einem dieser Sätze der „8-parametrig PASCALSche Satz“ (S. 217), also der dazu äquivalente Satz D_8^2) hergeleitet wird.

In § 1 werden die verwendeten Axiome zusammengestellt, in § 2 die betrachteten Schnittpunktsätze formuliert und einige Hilfssätze bewiesen.

¹) Der Index gibt die Zahl der Parameter, d. h. die Zahl der Freiheitsgrade bei der Konstruktion der Figur des betreffenden Schnittpunktsatzes an. — In Satz D_8 werden die Ecken des einen der beiden Dreiecke auf je einer Seite des anderen liegend vorausgesetzt (S. 217).

²) R. MOUFANG: „Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene“. Math. Ann. 105, 536—601 (1931), wo der Satz D_8 mit Satz II, der 8-parametrig PASCALSche Satz mit Satz I bezeichnet ist.

§ 1. Axiome und Sätze über Anordnungsbeziehungen und das Archimedische Postulat.

1. Im folgenden werden die ebenen projektiven Verknüpfungssätze als gültig angenommen: *Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade, auf der sie liegen; zwei Geraden bestimmen eindeutig einen Punkt, der auf beiden liegt*³⁾.

2. Für die Axiome der projektiven Anordnung folgen wir der Zusammenstellung bei G. DE B. ROBINSON⁴⁾, die sich an VAILATI anlehnt⁵⁾ und auf der Relation des Trennens aufbaut:

Für irgend fünf verschiedene auf g kollineare Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 gilt:

Axiom 1: Wird das Paar A_1A_3 von A_2A_4 getrennt, so auch A_2A_4 von A_1A_3 und A_1A_3 von A_4A_5 .

Axiom 2: Unter den vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 trennen sich entweder A_1A_2, A_3A_4 oder A_1A_3, A_2A_4 oder A_1A_4, A_2A_3 .

Axiom 3: Trennen sich A_1A_4, A_3A_5 und A_1A_3, A_2A_4 , so auch A_1A_4, A_2A_5 .

Daraus folgt der Satz: *Trennen sich A_1A_4, A_3A_5 und A_1A_3, A_2A_4 , so auch A_1A_4, A_2A_5 und A_1A_3, A_2A_5 und A_2A_4, A_3A_5 .* — Die erste Aussage ist die des Axioms 3, die zweite ergibt sich durch Anwendung dieses Axioms auf die Paare A_1A_3, A_4A_2 und A_1A_4, A_3A_2 , die dritte durch Anwendung auf die Paare A_4A_2, A_1A_3 und A_4A_1, A_5A_2 .

3. Sei $n \geq 4$. Das Symbol der Anordnung $A_1A_2 \dots A_n$ (kurz: die Anordnung $A_1A_2 \dots A_n$) soll besagen: 1) A_1, A_2, \dots, A_n sind kollinear und voneinander verschieden, 2) die Paare A_1A_{i+1}, A_iA_{i+2} ($2 \leq i \leq n-2$) trennen einander. — Keine dieser Trennungsbeziehungen ergibt sich aus den übrigen. — Durch Induktionsschluß läßt sich aus dem Satz am Ende von 2. beweisen: Aus $A_1 \dots A_n$ folgt, daß sich stets die Paare A_iA_k, A_jA_l trennen, wenn $1 \leq i < j < k < l \leq n$. — Nach Axiom 1 sind die Anordnungen $A_qA_{q+1} \dots A_n, A_1A_2 \dots A_{q-1}$ und $A_nA_{n-1}A_{n-2} \dots A_2A_1$ mit $A_1A_2 \dots A_n$ äquivalent.

Mit Hilfe von Axiom 2 folgt zusammenfassend:

Satz A: Eine Anordnung von n kollinearen verschiedenen Punkten ($n \geq 4$) ist eindeutig bis auf zyklische Vertauschung und Umkehrung des Durchlaufungssinnes.

Satz B: Kommen n kollineare verschiedene Punkte A_1, \dots, A_n ($n > 4$) in zwei Anordnungen $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ und $A_{j_1} \dots A_{j_s}$ vor ($1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$; $r, s < n$; $i_p \neq i_l$ für $p \neq l$, $j_m \neq j_q$ für $m \neq q$), so ist jede Anordnung $A_{k_1} \dots A_{k_n}$ der n Punkte ($1 \leq k_1, \dots, k_n \leq n$; $k_t \neq k_u$ für $t \neq u$) möglich, die den beiden Bedingungen genügt: durch Weglassen der $n-r$ in $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ nicht vorkommenden Punkte entsteht gerade die Anordnung $A_{j_1} \dots A_{j_s}$ oder eines ihrer Äquivalente nach Satz A; durch Weglassen der $n-s$ in $A_{j_1} \dots A_{j_s}$ nicht vorkommenden Punkte entsteht gerade die Anordnung $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ oder eines ihrer Äquivalente nach Satz A.

Beweis: Wir betrachten sämtliche aus einer solchen Anordnung $A_{k_1} \dots A_{k_n}$ folgenden Anordnungen aus 4 Punkten $A_tA_uA_vA_w$. *Fallunterscheidung:*

³⁾ Punkte werden im folgenden mit großen lateinischen, Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben benannt. Weiter ist AB die Gerade durch A und B , $a \times b$ der Schnittpunkt von a und b ; $a \times BC$ ist der Schnittpunkt von a mit BC .

⁴⁾ G. DE B. ROBINSON: Foundations of Geometry, Toronto 1952, § 8, 5.

⁵⁾ Vgl. F. ENRIQUES: Fragen der Elementargeometrie, Teil I, deutsch von Dr. THIEME, Leipzig-Berlin 1911, S. 58–65.

a) $A_i A_u A_v A_w$ läßt sich direkt (durch Weglassen der übrigen Punkte) aus $A_i \dots A_r$ oder $A_j \dots A_s$ erhalten; b) $A_i A_u A_v A_w$ folgt nach dem Satz am Ende von 2. aus einer vier Punkte enthaltenden Teilanordnung von $A_i \dots A_r$ und einer Teilanordnung von $A_j \dots A_s$; aus diesen beiden Teilanordnungen folgt überdies nach demselben Satz eindeutig (bis auf Äquivalenzen nach Satz A) eine 5-Punkteanordnung, und nur aus dieser lassen sich umgekehrt durch Wegstreichen je eines Punktes die beiden gegebenen Teilanordnungen herstellen; c) $A_i A_u A_v A_w$ läßt sich auf keinem der Wege a) bzw. b) folgern; dann kann man keine zu $A_i A_u A_v A_w$ widersprechende Anordnung (auf dem Wege b)) beweisen; denn die zu einer solchen gehörige 5-Punkteanordnung, z. B. $A_u A_i A_v A_w A_x$, ist die einzige, aus der man durch Weglassen je eines Punktes die beiden Teilanordnungen, aus denen $A_u A_i A_v A_w A_x$ folgt, erhält, also konnte $A_i A_u A_v A_w$ in $A_{k_1} \dots A_{k_n}$ nicht vorkommen.

Axiom 4: Trennen sich $A_1 A_3, A_2 A_4$, ist Q ein Punkt außerhalb g , g' eine nicht durch Q laufende von g verschiedene Gerade, und ist $A'_i = g' \times QA_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), so trennen sich auch $A'_1 A'_3, A'_2 A'_4$.

Es folgt:

Satz C: Besteht für n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n auf g die Anordnung $A_1 A_2 \dots A_n$, ist Q ein Punkt außerhalb g , g' eine nicht durch Q laufende von g verschiedene Gerade, und ist $A'_i = A_i Q \times g'$, so gilt auch $A'_1 A'_2 \dots A'_n$.

Sei $n \geq 4$. Das Symbol der Anordnung $a_1 a_2 \dots a_n$ soll bedeuten: 1) Die Geraden a_1, \dots, a_n gehen durch einen Punkt G und sind verschieden; 2) ist $A_1 \neq G$ ein Punkt auf a_1 , $A_2 \neq G$ auf a_2 , $A_i = A_1 A_2 \times a_i$ ($3 \leq i \leq n$), so gilt $A_1 \dots A_n$.

Es lassen sich die zu den Sätzen A, B, C dualen Sätze A^*, B^*, C^* beweisen; insbesondere folgt die Unabhängigkeit der Anordnung $a_1 \dots a_n$ von der Wahl der Punkte A_i in Satz A^* aus Satz C.

4. Wir benötigen weiterhin die Aussage, daß harmonische Punktepaare einander trennen.

Axiom 5: Sei $a \neq b \neq c \neq a$; C auf a, b, c ; A, B auf c ; $C \neq A \neq B \neq C$; D auf a , $D \neq C$; ist dann $E = b \times BD$, $F = b \times AD$, $G = a \times BF$, $H = a \times AE$, so gilt $HDGC$ (Fig. 1, das vollständige Vierseit ist $AEDC$).

Zeichnen wir noch $AG = h$, so wird die Figur selbstdual; es ist zu benennen: $AD = d$, $BG = e$, $BD = f$, $AH = g$. Aus $HDGC$ folgt $gdhc$. Der zu Axiom 5 duale Satz ergibt sich also mit Hilfe von Axiom 5.

5. Wir führen eine weitere Festsetzung ein:

Das Symbol $A_1 A_2 \dots P (=) Q \dots A_n$ soll bedeuten: Entweder sind die Punkte P und Q voneinander verschieden und es besteht die Anordnung

*) Die Aussage dieses Satzes fassen wir symbolisch zusammen in $A_1 A_2 \dots A_n \overset{Q}{\wedge} A'_1 A'_2 \dots A'_n$.

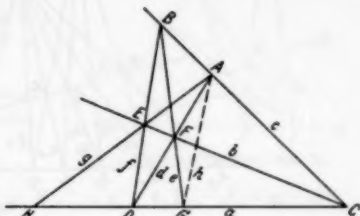


Fig. 1.

§ 2. Hilfssätze zur Herleitung eines Theorems über die Beweisbarkeit des PASCALSchen Satzes.

1. Wir formulieren zu Beginn außer dem DESARGUESschen Satz D_8 noch zwei Schnittpunktsätze, die für die weiteren Ausführungen wichtig sind.

Der DESARGUESsche Satz D_8 : Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$; Z auf g_1, g_2, g_3 ; E, B auf $g_1, E \neq B$; A_2 auf g_3 ; $E, B, A_2 \neq Z$; ist dann $E_1 = g_2 \times EA_2, A_1 = g_3 \times E_1B, B_1 = g_2 \times BA_2, A_3 = g_3 \times EB_1, E_2 = E_1A_1 \times EA_3, B_2 = B_1A_1 \times BA_3$, dann sind Z, E_2, B_2 kollinear (Fig. 3, die Ecken des Dreiecks ZB_1B liegen auf je einer Seite des Dreiecks $E_2A_1A_3$).

Der 8-parametrige PASCALSche Satz: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1, Z$ auf g_1, g_2, g_3 ; seien C, B auf $g_1, C \neq B$; B_1 auf $g_2, C, B, B_1 \neq Z$; ist dann $A_2 = g_3 \times BB_1, A_3 = g_3 \times CB_1, D = g_2 \times CA_2, A_1 = g_3 \times BD, D_1 = g_1 \times A_1B_1, C_1 = g_2 \times A_2D_1, \bar{A}_3 = g_3 \times BC_1$, dann ist $A_3 = \bar{A}_3$ (Fig. 4).

Diese beiden Sätze sind selbstdual und äquivalent⁷⁾.

Schnittpunktsatz $\mathcal{E}_{n,2}^{(q)}$: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1, Z$ auf g_1, g_2, g_3 ; seien K, K' auf $g_3, K \neq K'$; C_0 auf $g_1, K, K', C_0 \neq Z$; bildet man die Teilung $[C_i, D_i]$ auf g_1 und g_2 mit C_0 als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktepaar $\{K, K'\}$, dann ist $D_{n+q}C_n \parallel D_qC_0$ (Fig. 5, in Fig. 5—10 ist g_3 die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene)⁷⁾.

Bei Vertauschung von K und K' in Fig. 5 unter Beibehaltung von C_0 wird D_0 zu D_{-1}, D_i zu D_{-q-1} . Wir stellen also fest, daß der Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(-q-1)}$ derselbe ist wie $\mathcal{E}_{n,2}^{(q)}$.

2. Von Bedeutung sind für uns die Sätze $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$ bzw. $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ (im folgenden sei stets $n \geq 2$); denn bei deren Gültigkeit läßt sich innerhalb einer Teilung $[C_i, D_i]$ eine neue Teilung bestimmen, die durch den Streckenzug $C_0D_{n-1}C_nD_{2n-1}C_{2n}D_{3n-1} \dots$ bzw. $C_0D_nC_nD_{2n}C_{2n}D_{3n} \dots$ gekennzeichnet sei. Innerhalb dieser neuen Teilung läßt sich nun ebenso eine dritte Teilung definieren usw. Auf Grund dieser Überlegung läßt sich dann (§ 3) aus den erwähnten Sätzen unter Zuhilfenahme des Archimedischen Postulates der Satz $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ (8-parametriger PASCALScher Satz), also der allgemeine PASCALSche Satz beweisen.

⁷⁾ Der Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(q)}$ ist ein Spezialfall des Satzes $\mathcal{E}_{n,0}$ (Fig. 6), indem man zuerst $B_0 = A_1$ fordert (Satz $\mathcal{E}_{n,1}$, Fig. 7 mit anderer Beschriftung) und in Fig. 7 dann $D_0 = D_q$ voraussetzt. Es sei ohne Beweis angegeben: Aus $\mathcal{E}_{1,0}$ folgt $\mathcal{E}_{n,0}$; aus $\mathcal{E}_{1,1}$ (kleiner PASCALScher Satz) folgt $\mathcal{E}_{n,1}$; aus $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ (8-parametriger PASCALScher Satz) folgt $\mathcal{E}_{n,2}^{(q)}$; aus $\mathcal{E}_{n,0}$ und $\mathcal{E}_{m,0}$ folgt $\mathcal{E}_{1,0}$, wenn n und m teilerfremd sind; führt man noch als $\tilde{\mathcal{E}}_{n,0}$ den Schnittpunktsatz der Fig. 8 ein, so folgt $\tilde{\mathcal{E}}_{n,0}$ aus $\mathcal{E}_{n,0}$.

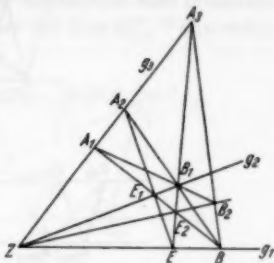


Fig. 3. DESARGUESscher Satz D_8 .

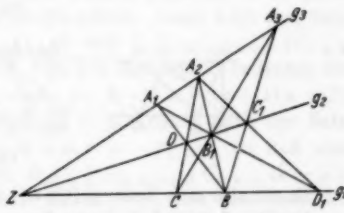
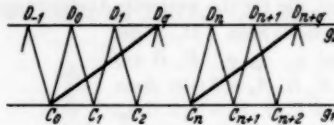
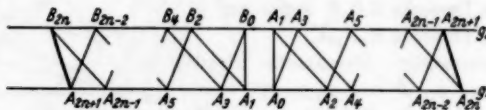
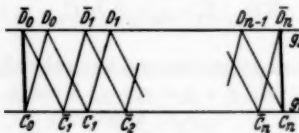


Fig. 4. 8-parametriger PASCALScher Satz.

Wir untersuchen die Gesetzmäßigkeit, nach der mit Hilfe von $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$ bzw. $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ diese neuen „iterierten“ Teilungen aus einer ursprünglichen folgen, zunächst für $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$.

Fig. 5. $\mathcal{E}_{n,2}^{(q)}$.Fig. 6. $\mathcal{E}_{n,0}$.Fig. 7. $\mathcal{E}_{n,1}$.Fig. 8. $\mathcal{E}_{n,0}$.

Es sei also eine Teilung $[C_i, D_i]$ auf g_1 und g_2 gegeben mit dem Anfangspunkt C_0 auf g_1 und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, K'\}$, K, K' auf g_3 . Es gelte der Satz $\mathcal{E}_{\alpha,3}^{(\beta)}$, also

$$(1) \quad C_0 D_\beta \parallel C_{i-\alpha} D_{i+\alpha+\beta} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

außerdem sei

$$(2) \quad D_\beta C_\alpha \parallel D_{i-\alpha+\beta} C_{(i+1)\alpha} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

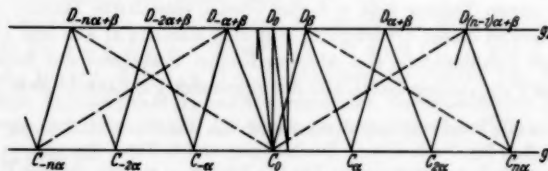


Fig. 9.

(Fig. 9). (Es existiere also innerhalb der ersten Teilung $\dots C_0 D_0 C_1 D_1 \dots$ eine zweite $\dots C_0 D_\beta C_\alpha D_{\alpha+\beta} \dots$). Dann folgt aus Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$, 1) daß

$C_0 D_{(n-1)\alpha+\beta} \parallel C_i \cdot n \cdot \alpha D_{(i+1)n\alpha+\beta}$, 2) daß $C_0 D_{-n\alpha+\beta} \parallel C_i \cdot n \cdot \alpha D_{(i-1)n\alpha+\beta}$ ist ($i = \pm 1, \pm 2, \dots$). Die Aussage 1) bedeutet die Gültigkeit des Satzes $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta)}$ mit $\alpha_1 = n \cdot \alpha$, $\beta_1 = (n-1)\alpha + \beta = \alpha_1 - (\alpha - \beta)$, so daß also $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta$ ist. Überdies ist $D_{-\alpha+\beta} C_0 \parallel D_{(kn-1)\alpha+\beta} C_{kn\alpha}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) nach (2), angewandt für $i = -1$ und $i = kn - 1$. Es existiert also innerhalb der zweiten Teilung eine dritte, auf die sich wieder der Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n-1)}$ anwenden

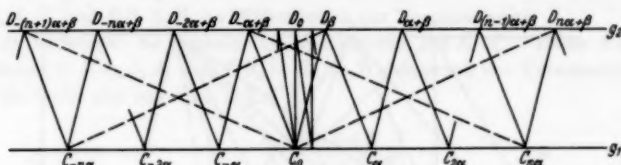


Fig. 10.

läßt usw. Wir stellen also fest, daß aus $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta)}$ und der Voraussetzung (2) mit Verwendung von $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n-1)}$ alle Sätze $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta_r)}$ mit $\alpha_r = n\alpha_{r-1}$, $\alpha_r - \beta_r = \alpha - \beta$ folgen.

Beginnen wir mit $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n-1)}$ selbst, so ergibt sich:

Hilfssatz 1: Aus Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n-1)}$ folgt Satz $\mathcal{E}_{n^m\alpha,2}^{(n^m-1)}$ (m natürlich ⁸⁾).

Zur Betrachtung über $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ sei wieder eine Teilung gegeben; in ihr gelte der Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta)}$, also (1), außerdem sei wieder (2) erfüllt. Dann folgt aus Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)} 1)$, daß $C_0 D_{n\alpha+\beta} \parallel C_i \cdot n \cdot \alpha D_{(i+1)n\alpha+\beta}$, 2) daß $C_0 D_{-(n+1)\alpha+\beta} \parallel C_i \cdot n \cdot \alpha D_{(i-1)n\alpha+\beta}$ ist ($i = \pm 1, \pm 2, \dots$) (Fig. 10). Die Aussage 2) bedeutet die Gültigkeit des Satzes $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(-\beta_1-1)}$ mit $\alpha_1 = n\alpha$, $(-\beta_1-1) = -(n+1)\alpha + \beta$; nach der Bemerkung am Ende von Abschnitt 1. gilt daher auch der Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta_1)}$ mit $\alpha_1 = n\alpha$, $\beta_1 = (n+1)\alpha - (\beta+1) = \alpha_1 + (\alpha - \beta) - 1$, so daß also $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha - \beta) = 1$ ist. Überdies ist $D_\beta C_0 \parallel D_{k \cdot n \cdot \alpha + \beta} C_{k \cdot n \cdot \alpha}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) nach (1), angewandt für $i = kn$. Es existiert also innerhalb der zweiten Teilung eine dritte, auf die sich wieder der Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ anwenden läßt, usw. Wir stellen somit fest, daß aus $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(\beta)}$ unter der Voraussetzung (2) mit Verwendung von $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ alle Sätze $\mathcal{E}_{\alpha_r,2}^{(\beta_r)}$ mit $\alpha_r = n\alpha_{r-1} = n^2\alpha_{r-2}$, $(\alpha_r - \beta_r) + (\alpha_{r-1} - \beta_{r-1}) = 1$, $(\alpha_{r-1} - \beta_{r-1}) + (\alpha_{r-2} - \beta_{r-2}) = 1$, also $(\alpha_r - \beta_r) = (\alpha_{r-2} - \beta_{r-2})$, folgen. Beginnen wir mit $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ selbst, so ergibt sich:

Hilfssatz 2: Aus Satz $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ folgt Satz $\mathcal{E}_{n^s m \alpha,2}^{(n^s m-1)}$ und Satz $\mathcal{E}_{n^s m \alpha,2}^{(n^s m+1)}$ (m natürlich ⁹⁾).

Bezeichnen wir die zu $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n)}$ und $\mathcal{E}_{\alpha,2}^{(n-1)}$ dualen Sätze mit $\mathfrak{T}_{\alpha,2}^{(n)}$ bzw. $\mathfrak{T}_{\alpha,2}^{(n-1)}$, so erhalten wir unmittelbar:

⁸⁾ Die obige Aussage 2) führt durch eine ähnliche Überlegung auf den Satz $\mathcal{E}_{\alpha_r,2}^{(\beta_r)}$ mit $\alpha_r = n\alpha_{r-1}$, $\alpha_r - \beta_r = \beta_{r-1} + 1$.

⁹⁾ Die obige Aussage 1) führt durch eine ähnliche Überlegung auf den Satz $\mathcal{E}_{\alpha_r,2}^{(\beta_r)}$ mit $\alpha_r = n\alpha_{r-1}$, $\alpha_r - \beta_r = -\beta_{r-1} - 1$.

Hilfssatz 1*: Aus Satz $\mathfrak{T}_{n_2}^{(n-1)}$ folgt Satz $\mathfrak{T}_{n_2 m_2}^{(n^m-1)}$ (m natürlich).

Hilfssatz 2*: Aus Satz $\mathfrak{T}_{n_2}^{(n)}$ folgen Satz $\mathfrak{T}_{n_2 m_2}^{(n^2 m-1)}$ und Satz $\mathfrak{T}_{n_2 m_2+1_2}^{(n^2 m+1)}$ (m natürlich).

3. Um die Sätze $\mathfrak{S}_{n_2}^{(n-1)}$ oder $\mathfrak{S}_{n_2}^{(n)}$ zum Beweis des 8-parametrischen PASCAL'schen Satzes verwenden zu können, brauchen wir den Satz, daß es möglich ist, auf zwei Geraden eine Teilung mit festgelegtem Anfangspunkt so zu be-

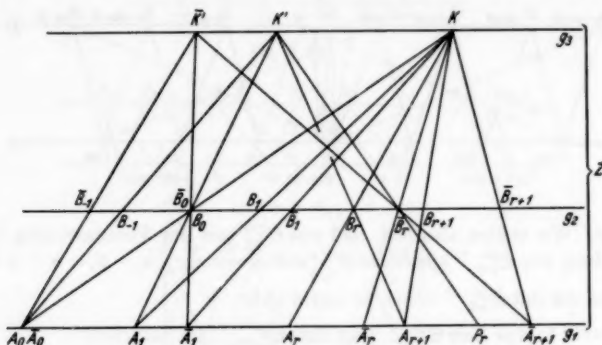


Fig. 11.

stimmen, daß ein bestimmter Teilpunkt in ein gegebenes Intervall fällt. Von dieser Möglichkeit werden wir uns in diesem Abschnitt in Hilfssatz 5 überzeugen.

Hilfssatz 3: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$, Z auf g_1, g_2, g_3 ; seien K, K', \bar{K} auf g_3 mit $ZK\bar{K}'K'$, A_0 auf g_1 , $A_0 \neq Z$; bildet man die Teilungen $[A_i, B_i]$ bzw. $[\bar{A}_i, \bar{B}_i]$ auf g_1 und g_2 mit dem gemeinsamen Anfangspunkt $A_0 \equiv \bar{A}_0$ und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, K'\}$ bzw. $\{\bar{K}, \bar{K}'\}$, dann gelten für jede ganze Zahl $r \neq 0$ die Anordnungen $Z A_0 A_r \bar{A}_r$ und $Z B_0 B_r \bar{B}_r$ (Fig. 11).

Beweis: Es folgt $ZK\bar{K}'K' \xrightarrow{\bar{B}_0} Z A_0 A_1 \bar{A}_1$. Aus der Induktionsannahme $Z A_0 A_r \bar{A}_r$ ($r \geq 1$) ergibt sich $Z A_0 A_r \bar{A}_r \xrightarrow{\bar{K}} Z B_0 B_r \bar{B}_r$. Sei $P_r = g_1 \times K' \bar{B}_r$. Dann erhalten wir $Z B_0 B_r \bar{B}_r \xrightarrow{\bar{K}'} Z A_1 A_{r+1} P_r$, also auch

$$(3) \quad Z A_0 A_{r+1} P_r$$

nach Satz D, § 1; ebenso $ZK\bar{K}'K' \xrightarrow{\bar{B}_r} Z \bar{A}_r P_r \bar{A}_{r+1}$, also auch $Z A_0 \bar{A}_r P_r \bar{A}_{r+1}$ nach Satz D, daher mit (3) $Z A_0 A_{r+1} P_r \bar{A}_{r+1}$. Daraus folgt weiter $Z A_0 A_{r+1} \bar{A}_{r+1} \xrightarrow{\bar{K}} Z B_0 B_{r+1} \bar{B}_{r+1}$.

Für Teilpunkte mit negativem Index beginnt man mit $ZK\bar{K}'K' \xrightarrow{\bar{A}_0} Z B_0 B_{-1} \bar{B}_{-1}$ und setzt als Induktionsannahme $Z B_0 B_{-r} \bar{B}_{-r} \xrightarrow{\bar{K}} Z A_0 A_{-r} \bar{A}_{-r}$ ($r \geq 1$). Der weitere Beweis geht wie oben.

Der Beweis, also auch Hilfssatz 3, ist dualisierbar.

Hilfssatz 4: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$, Z auf g_1, g_2, g_3 ; seien K, K', \bar{K} voneinander und von Z verschiedene Punkte auf g_3 , sei A_0 auf g_1 , $A_0 \neq Z$; bildet man die

Teilungen $[A_i, B_i]$ bzw. $[\bar{A}_i, \bar{B}_i]$ auf g_1 und g_2 mit $A_0 = \bar{A}_0$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, K'\}$ bzw. $\{K, \bar{K}'\}$, und gilt dann für irgendeine ganze Zahl $r \neq 0$ die Anordnung $Z A_0 A_r \bar{A}_r$ oder $Z B_0 B_r \bar{B}_r$, so gilt auch $Z K K' K'$ (Umkehrung von Hilfssatz 3).

Beweis: 1) Annahme: Es bestehe die Anordnung $Z K' K K'$. Dann folgt $Z K' K K' \xrightarrow{B_i} Z A_1 A_0 \bar{A}_1$,
 $Z K' K K' \xrightarrow{\bar{A}_i} Z B_{-1} B_0 \bar{B}_{-1}$, also nach Satz D, § 1,
 $Z A_1 A_0 \bar{A}_1$ und $Z B_{-1} B_0 \bar{B}_{-1}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Annahme: Es bestehe die Anordnung $Z K \bar{K}' K'$. Dann folgt nach Hilfssatz 3 $Z A_0 \bar{A}_r A_r$ und $Z B_0 \bar{B}_r B_r$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt also nur noch $Z K K' K'$.

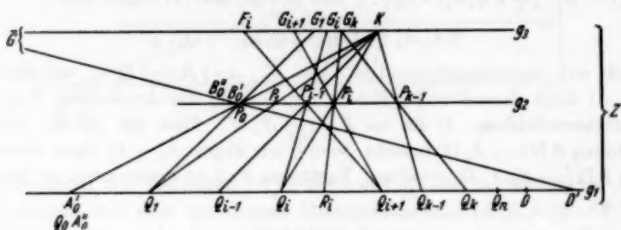


Fig. 12.

Der Beweis, also auch Hilfssatz 6, ist dualisierbar.

Hilfssatz 5: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$, Z auf g_1, g_2, g_3 ; seien A_0, D, D' auf g_1 , $A_0 \neq D' \neq Z \neq A_0$; $D' \neq D \neq Z$; sei K auf g_3 , $K \neq Z$; ist $n \neq 0$ eine gegebene ganze Zahl, dann gibt es einen zweiten Punkt K' auf g_3 , so daß für den Teilpunkt A_n der Teilung $[A_i, B_i]$ auf g_1 und g_2 mit A_0 als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, K'\}$ die Anordnung $Z D (=) A_n (=) D'$ besteht¹⁰⁾.

Beweis: Wir verwenden vollständige Induktion nach dem Index n von A_n .

1) Für $n = 1$ setzt man $D' = A_1$ und erhält $K' = g_3 \times B_0 A_1$.

2) Es sei $n \geq 2$, und es gelte die Behauptung für $n - 1$.

a) Es gibt $n + 1$ verschiedene Punkte $Q_i (i = 0, \dots, n)$, unter denen $Q_0 = A_0$ ist, mit der Anordnung

$$(4) \quad Z Q_0 Q_1 Q_2 \dots Q_n D' {}^{11)}$$

(Fig. 12). Sei $P_i = g_3 \times Q_i K (i = 0, \dots, n)$, $G_i = g_3 \times P_{i-1} Q_i (i = 1, \dots, n)$, $F_i = g_3 \times P_{i-1} Q_{i+1} (i = 1, \dots, n - 1)$. Dann erhalten wir

$$Z Q_{i-1} Q_i Q_{i+1} \xrightarrow{K} Z P_{i-1} P_i P_{i+1} \xrightarrow{Q_{i+1}} Z F_i G_{i+1} K,$$

$$Z Q_{i-1} Q_i Q_{i+1} \xrightarrow{P_{i-1}} Z K G_i F_i,$$

also werden G_i und G_{i+1} durch Z und K nicht getrennt ($i = 1, \dots, n - 1$). Wir bestimmen mit demjenigen Punkt G_n , der für alle i die Anordnung

¹⁰⁾ In dieser Anordnung z. B. sind die beiden Gleichheitszeichen voneinander abhängig: die Gültigkeit des einen schließt die des anderen aus.

¹¹⁾ Die Q_i sind konstruierbar mit Hilfe geeigneter harmonischer Quadrapel.

$ZKG_k(=) G_i$ ($i = 1, \dots, n$) erfüllt, die Teilung $[A'_i, B'_i]$ auf g_1 und g_2 mit $Q_0 = A_0 = A'_0$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, G_k\}$ (also $P_0 = B'_0$). Es folgt

$$(5) \quad ZKG_k(=) G_1 \bigwedge_{\overline{\wedge}}^{P_0} ZA'_0 A'_1(=) Q_1.$$

Die Anordnung $ZA'_0 A'_i(=) Q_i$ ist also für $i = 1$ richtig. Wir beweisen sie für jedes i ($1 \leq i \leq n$) durch vollständige Induktion. Aus $ZA'_0 A'_i(=) Q_i$ ($1 \leq i < n$) erhalten wir mit $R_i = g_1 \times G_k P_i$

$$ZA'_0 A'_i(=) Q_i \bigwedge_{\overline{\wedge}}^K ZB_0 B'_i(=) P_i \bigwedge_{\overline{\wedge}}^{G_k} ZA'_1 A'_{i+1}(=) R_i,$$

also nach Satz D die Anordnung $ZA'_0 A'_i(=) A'_i A'_{i+1}(=) R_i$. Andererseits ist $ZKG_k(=) G_{i+1} \bigwedge_{\overline{\wedge}}^{P_i} ZQ_i R_i(=) Q_{i+1}$, und mit (5) und (4) ergibt sich

$$ZA'_0 A'_1(=) Q_1(=) Q_i R_i(=) Q_{i+1},$$

so daß wir zusammenfassend $ZA'_0 A'_i A'_{i+1}(=) R_i(=) Q_{i+1}$ erhalten. Für $i = n - 1$ folgt daraus unter Beachtung von (4) die Anordnung $ZA'_0 A'_n D'$.

Fallunterscheidung: I) Es sei $ZD(=) A'_n D'$. Dies gilt gewiß, wenn die Anordnung $ZD(=) A_0 D'$ besteht, so daß wir wegen $A_0 = A'_0$ dann zusammengefaßt $ZD(=) A'_0 A'_n D'$ erhalten. In diesem Fall ist nichts mehr zu beweisen. II) Es sei

$$(6) \quad ZA'_0 A'_n D D'.$$

III) Der Fall $ZA'_0 A'_n D' D$ erledigt sich für das folgende durch einfachen Wechsel der Bezeichnungen. — Wir setzen also (6) voraus.

β) Sei $\overline{G} = g_3 \times D B'_0$. Wir bilden die Teilung $[A'_i, B'_i]$ auf g_1 und g_2 mit $A_0 = A'_0$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, \overline{G}\}$. Dann ist $D = A'_1$, und es gilt wegen $n \geq 2$ und Satz D die Anordnung $ZA'_0 D A'_n$. Ist $ZA'_0 D A'_n(=) D'$, so ist wiederum nichts mehr zu beweisen. Sei also [zusammengefaßt mit (6)]

$$(7) \quad ZA'_0 A'_n D D' A''_n.$$

Wir erhalten wegen $n \geq 2$ und Satz D

$$(8) \quad ZA'_0 A'_1 D \bigwedge_{\overline{\wedge}}^{B'_0} ZKG_k \overline{G}.$$

3)¹²⁾ Es gibt einen Punkt D'' mit der Anordnung

$$(9) \quad ZDD'' D'.$$

¹²⁾ Der Sinn von 3) ist, auf g_3 zwei Punkte (E_q, E_{q-1} , siehe für das Folgende Fig. 13 und die dort herrschenden Ordnungsbeziehungen) mit folgenden Eigenschaften festzulegen: α) Die „Schrittlänge“ der Teilung mit dem Richtpunktpaar $\{K, E_{q-1}\}$ ist ebenfalls zu „klein“, d. h. $A_n^{(q-1)}$ liegt „vor“ D ; die der Teilung mit $\{K, E_q\}$ ist ebenfalls zu „groß“, d. h. $A_n^{(q)}$ liegt „hinter“ D ; β) die Punkte E_q und E_{q-1} liegen jedoch „nahe genug“ beieinander in folgendem Sinn: Die Verbindungsgerade irgendeines Punktes „zwischen“ E_q und E_{q-1} mit irgendeinem Punkt aus $C_q C'_q$ schneidet g_1 „zwischen“ D' und D . Da nach Induktionsvoraussetzung eine Teilung mit dem Richtpunktpaar $\{K, K'\}$ bestimmbar ist, so daß B_{n-1} „zwischen“ C'_q und C_q liegt, und da K' „zwischen“ E_q und E_{q-1} liegen muß, liegt also A_n „zwischen“ D' und D .

Wir bestimmen die Teilung auf g_2 und g_3 mit G_k als Anfangspunkt und dem Richtpunktpaar $\{D', D''\}$; auf g_3 entstehe die Punktfolge

$$(10) \quad ZKG_kE_1E_2 \dots$$

(Fig. 13). Nach dem Archimedischen Postulat (Axiom 6) gibt es einen Punkt E_j mit

$$(11) \quad ZG_k\bar{G}(=)E_j.$$

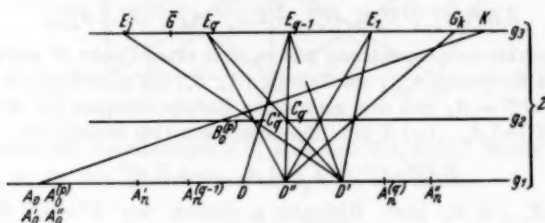


Fig. 13.

Wir bestimmen die Teilungen $[A_i^{(p)}, B_i^{(p)}]$ auf g_1 und g_2 mit $A_0 = A_i^{(p)}$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{K, E_p\}$ ($p = 1, \dots, j$). Nach Hilfsatz 3 besteht dann wegen (10) und (11) die Anordnung $ZA_0A_n'A_n^{(1)}A_n^{(2)} \dots A_n'' (=) A_n^{(j)}$. Beim Vergleich mit (7) erkennt man wegen $A_0 = A_0'$:

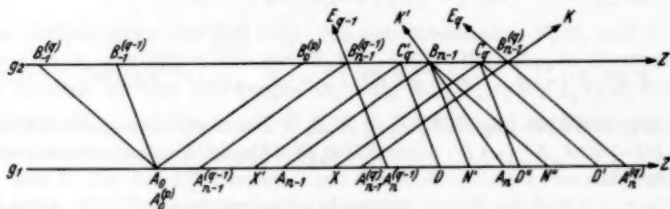


Fig. 14.

Entweder es gibt ein $q < j$ mit der Anordnung $ZA_0D(=)A_n^{(q)}(=)D'$. Dann ist nichts mehr zu beweisen. Oder es gibt ein $q \leq j$ mit der Anordnung

$$(12) \quad ZA_0A_n^{(q-1)}DD'A_n^{(q)}.$$

Dieser Fall werde weiter behandelt.

4) Sei $C_q' = g_2 \times DE_{q-1}$, $C_q = g_2 \times D'E_{q-1} = g_2 \times D'E_q$ (Fig. 14, wo g_3 die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene ist). Dann gilt wegen (9) und (12)

$$(13) \quad ZA_0A_n^{(q-1)}DD' \xrightarrow{E_{q-1}} ZB_{-1}^{(q-1)}B_{n-1}^{(q-1)}C_q'C_q,$$

ferner nach (12)

$$(14) \quad ZA_0D'A_n^{(q)} \xrightarrow{E_q} ZB_{-1}^{(q)}C_qB_{n-1}^{(q)},$$

drittens wegen Hilfssatz 3, angewandt auf (10), und Satz D, unter Beachtung von $n - 1 \geq 1$

$$(15) \quad Z B_{-1}^{(q)} B_{-1}^{(q-1)} B_0^{(p)} B_{n-1}^{(q-1)} B_{n-1}^{(q)}.$$

Aus (13) und (15) folgt entweder $Z B_{-1}^{(q)} B_{-1}^{(q-1)} B_0^{(p)} B_{n-1}^{(q-1)} B_{n-1}^{(q)} C_q' C_q$ oder $Z B_{-1}^{(q)} B_{-1}^{(q-1)} B_0^{(p)} B_{n-1}^{(q-1)} C_q' B_{n-1}^{(q)} C_q$ oder $Z B_{-1}^{(q)} B_{-1}^{(q-1)} B_0^{(p)} B_{n-1}^{(q-1)} C_q' C_q B_{n-1}^{(q)}$, und von diesen Möglichkeiten ist nur die letzte mit (14) verträglich. Mit $X = g_1 \times K C_q$, $X' = g_1 \times K C_q'$ folgern wir daraus

$$(16) \quad Z B_0^{(p)} B_{n-1}^{(q-1)} C_q' C_q B_{n-1}^{(q)} \frac{K}{\wedge} Z A_0^{(p)} A_{n-1}^{(q-1)} X' X A_{n-1}^{(q)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es jetzt einen Punkt K' auf g_3 derart, daß für den Teilpunkt A_{n-1} der Teilung $[A_i, B_i]$ auf g_1 und g_2 mit dem Anfangspunkt $A_0^{(p)} = A_0$ und dem geordneten Richtpunktepaar $\{K, K'\}$ die Anordnung $Z X' (=) A_{n-1} (=) X$ gilt. Zusammen mit (16) besteht also

$$(17) \quad Z A_0^{(p)} A_{n-1}^{(q-1)} X' (=) A_{n-1} (=) X A_{n-1}^{(q)},$$

daher $Z K E_{q-1} K' E_q$ nach Hilfssatz 4. Setzen wir $N' = g_1 \times B_{n-1} E_{q-1}$, $N'' = g_1 \times B_{n-1} E_q$, so folgt daraus $Z K E_{q-1} K' E_q \frac{B}{\wedge} A_{n-1} N' A_n N''$, also nach Satz D auch

$$(18) \quad Z A_0 N' A_n N''.$$

Weiter haben wir nach (17) und Satz D

$$(19) \quad Z A_{-1}^{(q-1)} X' (=) A_{n-1} (=) X \frac{K}{\wedge} Z B_{-1}^{(q-1)} C_q' (=) B_{n-1} (=) C_q$$

$$\frac{E}{\wedge}^{q-1} Z A_0^{(p)} D (=) N' (=) D',$$

$$(20) \quad Z A_{-1}^{(q)} X' (=) A_{n-1} (=) X \frac{K}{\wedge} Z B_{-1}^{(q)} C_q' (=) B_{n-1} (=) C_q \frac{E}{\wedge}^q Z A_0^{(p)} - N'' (=) D'.$$

Aus (18) und (19) folgt $Z A_0 D (=) N' A_n N''$, und zusammen mit (20) also $Z A_0 D (=) N' A_n N'' (=) D'$, daher $Z D A_n D'$. Also ist K' ein gesuchter zweiter Richtpunkt.

Für $n < 0$ läuft der Beweis entsprechend, indem man von $n = -1$ ausgeht und von $-|n| + 1$ auf $-|n|$ schließt.

Der Beweis, also auch Hilfssatz 5, ist dualisierbar.

§ 3. Beweis des PASCALSchen Satzes aus 8-parametrischen durch n Konstruktions-schritte entstehenden Schnittpunktsätzen.

Beim Vergleich der folgenden Sätze 1 und 2 bemerken wir, daß Satz 1 in Satz 2 enthalten ist. Obwohl Satz 1 beim Beweis von Satz 2 nicht verwendet wird, führen wir ihn hier an, da in seinem Beweis die Idee unserer indirekten Schlußweise besonders deutlich wird.

Satz 1: Aus Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ und Satz $\mathcal{E}_{n,3}^{(n-1)}$ folgt zusammen mit dem Archimedisches Postulat (Axiom 6) der Satz $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ (8-parametrischer PASCALScher Satz).

Beweis: Die Konfiguration des $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ sei auf folgende Art vorgelegt: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$, Z auf g_1, g_2, g_3 ; seien A_2, B_3 auf $g_1, Z \neq A_2 \neq B_3 \neq Z$; B_2 auf

$g_2, B_2 \neq Z$; sei $G = g_3 \times A_2 B_2$, $A_1 = g_2 \times B_2 G$, $C_1 = g_3 \times A_2 A_1$, $C_2 = g_3 \times B_2 B_1$, $B_1 = g_1 \times C_1 B_2$, $A_3 = g_2 \times C_2 A_2$, $A'_3 = g_2 \times B_1 G$ (Fig. 15, wo g_3 die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene ist). Zu zeigen ist $A_3 = A'_3$. — Nach Axiom 5,

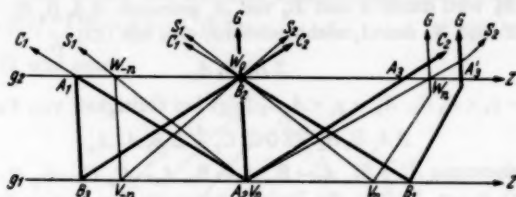


Fig. 15.

§ 1, bestehen die Anordnungen $Z B_3 A_3 B_1$ und $Z A_1 B_1 A_3$. Weiter gilt $Z B_3 A_3 B_1 \overset{G}{\wedge} Z A_1 B_1 A'_3$. Wir nehmen an, es sei $A_3 \neq A'_3$ und weiter

$$(21) \quad Z A_1 B_1 A_3 A'_3.$$

(Für $Z A_1 B_1 A'_3 A_3$ verläuft der Beweis entsprechend.) Nach Hilfssatz 5 gibt es auf g_3 einen Punkt G' , so daß der Teilpunkt W_n der Teilung $[V_1, W_1]$ auf g und g_2 mit $B_2 = W_0$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktepaaar $\{G, G'\}$ die Anordnung $Z A_3 (=) W_n (=) Q A'_3$ erfüllt, wobei Q ein beliebiger Punkt mit der Anordnung $Z A_3 Q A'_3$ ist¹³), also mit (21)

$$(22) \quad Z B_2 A_3 (=) W_n A'_3.$$

Aus der Gültigkeit von $\mathfrak{E}_{n-2}^{(n)}$ folgt, daß sich die Geraden $V_0 W_n$ und $V_{-n} W_0$ auf g_3 in S_2 , aus $\mathfrak{E}_{n-2}^{(n-1)}$, daß sich $V_0 W_{-n}$ und $V_n W_0$ auf g_3 in S_1 schneiden. So erhalten wir aus (22) (wegen $A_2 = V_0$) $Z B_2 W_n A'_3 \overset{G}{\wedge} Z A_2 V_n B_1 \overset{B_2}{\wedge} Z G S_1 \overset{C_1}{\wedge} Z B_2 W_{-n} A_1 \overset{G}{\wedge} Z A_2 V_{-n} B_3 \overset{B_1}{\wedge} Z G S_2 C_2 \overset{A_1}{\wedge} Z B_2 W_n A_3$ im Widerspruch zu (22). Also ist die Annahme $A_3 \neq A'_3$ falsch.

Satz 2: Aus Satz $\mathfrak{E}_{n-2}^{(n)}$ zusammen mit dem Archimedischen Postulat (Axiom 6) oder Satz $\mathfrak{E}_{n-2}^{(n-1)}$ zusammen mit dem Archimedischen Postulat folgt der Satz $\mathfrak{E}_{1-2}^{(1)}$ (8-parametriger PASCALScher Satz).

Beweis: Die Konfiguration von $\mathfrak{E}_{1-2}^{(1)}$ sei auf folgende Art vorgelegt: Sei $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq g_1$, Z auf g_1, g_2, g_3 ; seien A_2, B_2 auf g_1 , $Z \neq A_2 \neq B_2 \neq Z$; B_2 auf g_3 , $B_2 \neq Z$; sei $G = g_3 \times A_2 B_2$.

$A_1 = g_2 \times B_2 G$, $C_1 = g_3 \times A_2 A_1$, $B_1 = g_1 \times B_2 C_1$, $A_3 = g_2 \times B_1 G$, $C_2 = g_3 \times A_2 A_3$, $B'_2 = g_3 \times B_3 C_2$ (Fig. 16, wo g_3 die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene ist). Zu zeigen ist $B_2 = B'_2$.

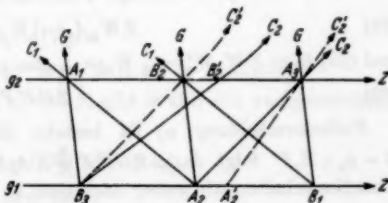


Fig. 16.

¹³⁾ Konstruierbar durch ein geeignetes harmonisches Quadrupel.

1. Nach Axiom 5, § 1, gilt

$$(23) \quad Z B_3 A_2 B_1 \overline{\wedge}^G Z A_1 B_2 A_3.$$

Es gibt bei der Annahme $B_2 \neq B'_2$ die Möglichkeiten:

Fall I: B'_2 wird durch Z und B_2 von A_1 getrennt: $Z A_1 B_2 B'_2$; *Fall II:* B'_2 wird durch Z und B_2 von A_1 nicht getrennt, also mit (23)

$$(24) \quad Z B'_2 B_2 A_3.$$

Mit $C'_2 = g_3 \times B_3 B_2$, $A'_2 = g_1 \times A_3 C'_2$ folgt bei Gültigkeit von Fall I

$$(25) \quad Z A_1 B_2 B'_2 \overline{\wedge}^{B_2} Z G C'_2 C_2 \overline{\wedge}^{A_2} Z B_1 A'_2 A_2.$$

Durch Umbenennung $A'_2 \rightarrow B'_2$, $A_1 \leftrightarrow B_1$, $A_2 \leftrightarrow B_2$, $A_3 \leftrightarrow B_3$, $C_1 \rightarrow C_1$, $G \rightarrow G$, $C'_2 \rightarrow C_2$, $Z \rightarrow Z$, $g_1 \leftrightarrow g_2$, $g_3 \rightarrow g_3$ bleiben die Inzidenzaussagen der Voraussetzung un geändert, und wir erhalten aus (23) und (25) die Anordnungen $Z A_3 B_2 A_1$, $Z B_1 A_3 B_2$, $Z A_1 B'_2 B_2$. Wir können also für das Folgende stets von Fall II ausgehen.

2. Mit $F = g_3 \times A_2 B'_2$, $A'_2 = g_2 \times F B_1$, $E = g_3 \times B_3 C_1$ (Fig. 17) folgt weiter $Z B_3 A_2 B_1 \overline{\wedge}^{C_1} Z E A_1 B_2$, $Z A_1 B_2 A_3 \overline{\wedge}^{A_2} Z C_1 G C_2 \overline{\wedge}^{B_2} Z E A_1 B'_2$, also $Z E A_1 B'_2 B_2$ wegen der Annahme von Fall II, und daraus

$$(26) \quad Z A_1 B'_2 B_2 \overline{\wedge}^{A_1} Z C_1 F G \overline{\wedge}^{B_1} Z B_2 A'_2 A_3.$$

3. Nach dem Archimedischem Postulat (Axiom 6) besitzt die Teilung $[V_i, W_i]$ auf g_1 und g_2 mit dem Anfangspunkt $A_2 = V_0$ und dem geordneten Richtpunktpaar $\{G, F\}$ (so daß also $B'_2 = W_{-1}$ und $B_2 = W_0$ ist) einen Teilpunkt W_r mit der Anordnung $Z W_0 A_3 (=) W_r$. Wegen (24) und Satz D, § 1, ist $r > 0$. Sei m eine solche natürliche Zahl, daß $r \leq n^{2m} - 1$. Nach Hilfssatz 5 gibt es auf g_3 einen Punkt F' derart, daß für den Teilpunkt $W_{n^{2m}-1}$ der Teilung $[V'_i, W'_i]$ auf g_1 und g_2 mit dem Anfangspunkt $A_2 = V'_0$ und dem geordneten Richtpunktpaar $\{G, F'\}$ (also $B_2 = W'_0$) mit Rücksicht auf (26) die Anordnung

$$(27) \quad Z W'_0 A'_3 (=) W_{n^{2m}-1} (=) Q A_3$$

erfüllt ist, wobei Q ein beliebiger Punkt mit der Anordnung $Z A'_3 Q A_3$ sei¹³⁾. Aus

$$(28) \quad Z W_0 A_3 (=) W_r (=) W_{n^{2m}-1}$$

und (27) folgt $Z W_0 W_{n^{2m}-1} W_{n^{2m}-1}$, also nach Hilfssatz 4

$$(29) \quad Z G F' F.$$

Fallunterscheidung: α) Es bestehe die Anordnung $Z V_0 V'_{n^{2m}} B_1$. Mit $R = g_2 \times B_1 F'$ folgt dann $Z G F' F \overline{\wedge}^{B_1} Z A_3 R A'_3$, also $Z B_2 A'_3 R A_3$ wegen (26). Überdies erhalten wir weiter nach Satz D

$$(30) \quad Z V'_1 V'_{n^{2m}} B'_1 \overline{\wedge}^{F'} Z W'_0 W'_{n^{2m}-1} R.$$

Nach Hilfssatz 5 gibt es auf g_3 einen Punkt F'' , so daß der Teilpunkt $W''_{n^{2m}-1}$ der Teilung $[V''_i, W''_i]$ auf g_1 und g_2 mit $A_2 = V''_0$ als Anfangspunkt und dem geordneten Richtpunktpaar $\{G, F''\}$ (also $B_2 = W''_0$) die Anordnung

$$(31) \quad Z W''_0 R (=) W''_{n^{2m}-1} (=) Q_1 A_3$$

erfüllt, wobei Q_1 ein beliebiger Punkt mit der Anordnung ZRQ_1A_3 sei¹³⁾. Mit (30) folgt

$$(32) \quad ZW_0W_n'^{m-1}W_n''^{m-1},$$

also $ZGF'F''$ auf Grund von Hilfssatz 4, und daraus mit $R_1 = g_1 \times W_n''^{m-1}F'$ noch $ZF''F'G \frac{W_n''^{m-1}}{\wedge} ZV_n''^{m-1}R_1V_n''^{m-1}$, also auch $ZV_n''^{m-1}R_1V_n''^{m-1}V_0''$ nach Satz D, und somit

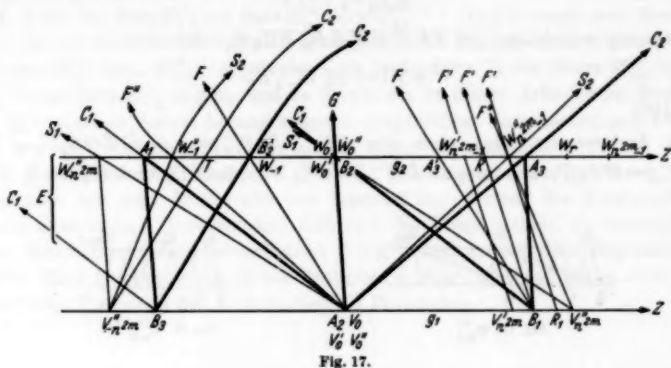


Fig. 17.

$$(33) \quad ZV_0R_1V_n''^{m-1}.$$

Weiter ergibt sich $ZW_{-1}W_0'W_n''^{m-1}$ aus (32) und Satz D; mit (31) folgt also $ZW_{-1}W_0'R (=) W_n''^{m-1} \frac{F'}{\wedge} ZV_0V_1B_1 (=) R_1$, und daraus

$$(34) \quad ZV_0B_1V_n''^{m-1}$$

mit (33). Zum Schluß stellen wir noch fest, daß aus (28) und (31) $ZW_0W_n''^{m-1}A_3 (=) W_n''^{m-1}$ folgt, also mit Hilfssatz 4

$$(35) \quad ZGF''F.$$

β) Es bestehe die Anordnung

$$(36) \quad ZV_0B_1 (=) V_n''^{m-1}.$$

Dann wird die Teilung $[V_i', W_i']$ in $[V_i'', W_i'']$, F' in F'' umbenannt.

Auf Grund der Betrachtungen in α) und β) gibt es also eine zweigestrichene Teilung, für die die Anordnungen

$$(37) \quad ZV_0B_1 (=) V_n''^{m-1} \text{ [(36) bzw. (34)]},$$

$$(38) \quad ZGF''F \text{ [(29) bzw. (35)]},$$

$$(39) \quad ZW_0'W_n''^{m-1}A_3 \text{ [(27) bzw. (31)]}$$

gültig sind.

γ) Der Fall $ZV_n''^{m-1}V_0B_1$ ist unmöglich, da aus (27) $ZW_0'W_n''^{m-1}A_3 \frac{G}{\wedge} ZV_0'V_n''^{m-1}B_1$ folgt, also wegen $ZV_0'V_n''^{m-1}V_n''^{m-1}$ (Satz D) die Punkte B_1 und $V_n''^{m-1}$ nicht durch Z und $V_0' = V_0$ getrennt werden.

4. ¹⁴⁾ Aus $\mathfrak{E}_{n2}^{(n-1)}$ folgt nach Hilfssatz 1, aus $\mathfrak{E}_{n2}^{(n)}$ folgt nach Hilfssatz 2 der Schnittpunktsatz $\mathfrak{E}_{n2}^{(n+m-1)}$. Ihm zufolge schneiden sich die Geraden $V''W_{n+m-1}''$ und $V''_{n+m}W_{-1}''$ auf g_3 in S_2 , die Geraden $V_0''W_{-n+m}''$ und $V''_{n+m}W_0''$ auf g_3 in S_1 . Dann erhalten wir mit $T = g_3 \times C_3 V''_{n+m}$ aus (37) $Z A_2 B_1 (=) V''_{n+m} \frac{B_2}{\wedge} Z G C_1 (=) S_1 \frac{A_1}{\wedge} Z B_2 A_1 (=) W''_{-n+m} \frac{G}{\wedge} Z A_2 B_3 (=) V''_{-n+m} \frac{C_1}{\wedge} Z A_3 B'_2 (=) T$ oder nach (24)

$$(40) \quad Z B_2 B'_2 (=) T.$$

Weiter ergibt sich aus (38) $Z F F'' G \frac{A_1}{\wedge} Z B'_2 W''_{-1} B_2$, also

$$(41) \quad Z T (=) B'_2 W''_{-1} B_2$$

mit (40).

5. Andererseits folgt aber aus (39) $Z B_2 W''_{n+m-1} A_3 \frac{A_1}{\wedge} Z G S_2 C_2 \frac{V''_{-n+m}}{\wedge} Z W''_{-n+m} W''_{-1} T$, d. h. wegen $Z W''_{-n+m} W''_{-1} W_0''$ (Satz D) und $W_0'' = B_2$ wird



Fig. 18. $\mathfrak{E}_{n2}^{(n)}$.

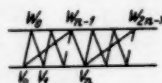


Fig. 19. $\mathfrak{E}_{n2}^{(n-1)}$.

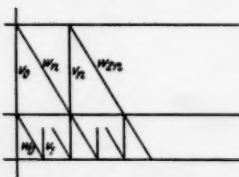


Fig. 20. $\mathfrak{E}_{2n}^{(n)}$.

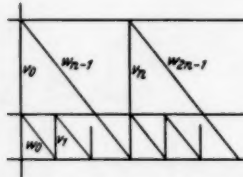


Fig. 21. $\mathfrak{E}_{n2}^{(n-1)}$.

T von B_2 durch Z und W''_{-1} nicht getrennt, im Widerspruch zu (41). Also ist die Annahme $B_2 \neq B'_2$ falsch.

Durch Dualisierung dieses Beweises, also unter Heranziehung von Hilfssatz 1* und 2*, ergibt sich:

Satz 2*: Aus Satz $\mathfrak{E}_{n2}^{(n)}$ zusammen mit dem Archimedischen Postulat (Axiom 6), ebenso aus Satz $\mathfrak{E}_{n2}^{(n-1)}$ zusammen mit dem Archimedischen Postulat folgt der Satz $\mathfrak{E}_{12}^{(1)}$ (8-parametrischer PASCALScher Satz).

Da der 8-parametrische PASCALSche Satz dem Satz D₈ äquivalent ist und aus diesem zusammen mit dem Archimedischen Postulat der allgemeine PASCALSche Satz folgt, erhalten wir also:

¹⁴⁾ Die Idee des folgenden indirekten Beweises besteht darin, daß die beiden parallelen Geraden $V''W''_{-1}$ und $V''_{2m}W''_{2m-1}$ einmal nach Bestimmung von F'' „steiler“ als $B_1A'_3$, andererseits durch die Lage von W''_{-1} , die durch die Anwendung der Schnittpunktsätze gegeben ist, aber „flacher“ als $A_1B'_2$ verlaufen, obwohl auch $B_1A'_3 \parallel A_2B'_2$ ist.

Der Satz des PASCAL ist unter Zuhilfenahme des Archimedischen Postulates beweisbar aus den Sätzen $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ oder $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$ oder $\mathcal{I}_{n,2}^{(n)}$ oder $\mathcal{I}_{n,2}^{(n-1)}$ des MÖBIUSSchen Netzes.

Diese Sätze sind in Fig. 18—21 dargestellt.

Schlußwort.

Durch die vorliegenden Ausführungen werden u. a. folgende offenen Fragen aufgeworfen:

1. Folgt der Satz $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ aus Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ oder $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$? (In § 3 wurde zum Beweis noch das Archimedische Postulat herangezogen). Im bejahenden Fall wäre $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ mit $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ bzw. $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$ äquivalent, da (vgl. Anm. 7) die Sätze $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ bzw. $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$ aus Satz $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}$ folgen, und es wären die in dieser Arbeit zum Beweis des PASCALSchen Satzes herangezogenen graphischen Voraussetzungen (Satz $\mathcal{E}_{n,2}^{(n)}$ bzw. $\mathcal{E}_{n,2}^{(n-1)}$) nicht schwächer als die bisher verwendeten.

2. Kann man eine Übersicht über alle Schnittpunktsätze gewinnen, die zusammen mit dem Archimedischen Postulat zum Beweis des PASCALSchen Satzes ausreichen? Insbesondere läßt sich die Frage stellen, ob womöglich jeder Schnittpunktsatz (unbeschränkt gültig vorausgesetzt) diese Eigenschaft hat¹⁵⁾. Eine Beantwortung dieses Problems würde Aufschluß geben über die eigentliche Tragweite des Archimedischen Postulates.

(Eingegangen am 20. August 1954.)

¹⁵⁾ Vgl. H. NAUMANN: „Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie“, Math. Z. 60, 120—141 (1954), wo Beispiele archimedisch geordneter Geometrien angegeben werden, die durch den nur in bestimmten Lagen gültigen kleinen DESARGUESschen Satz begründet werden und in denen der PASCALSche Satz falsch ist.

Extreme Punkte der konvexen Hülle schlichter Funktionen.

Von

GEORGE SPRINGER,

Northwestern University, z. Z. Münster (Westf.)

Es sei G ein Gebiet in der z -Ebene. F sei die Klasse der in G holomorphen Funktionen und S die Teilklasse von F , die aus allen schlichten Funktionen besteht, welche in einem Punkt $z_0 \in G$ normalisiert sind, so daß

$$(1) \quad f(z_0) = w_0, \quad f'(z_0) = 1$$

gilt.

F ist ein linearer Raum über den komplexen Zahlen. Ist M eine Teilmenge von F , so können wir von der konvexen Hülle von M sprechen. M heißt konvex, wenn für jedes Paar der Funktionen f und g aus M alle linearen Kombinationen $\lambda f + (1 - \lambda)g$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ auch zu M gehören. Die konvexe Hülle K_M von M ist der Durchschnitt aller M enthaltenden konvexen Mengen. Man sagt, ein Element $f \in M$ ist ein mittlerer Punkt, wenn f zwischen $g \in M$ und $h \in M$ liegt; d. h., wenn es eine Zahl λ , $0 < \lambda < 1$, gibt derart, daß $f = \lambda g + (1 - \lambda)h$. Ein Element f in einer konvexen Menge M heißt extremes Element von M , wenn es zwischen keinem Paar der Elemente aus M liegt [2, 4].

Die konvexe Hülle K_S von S enthält Funktionen, die nicht schlicht sind. P. ROSENBLUM hat das folgende Problem vorgeschlagen: Ist es möglich, diejenigen schlichten Funktionen aus S zu charakterisieren, welche extreme Elemente der Hülle K_S sind?

Hier werden wir den besonderen Fall behandeln, wo G das Äußere des Einheitskreises und $z_0 = \infty$ ist. Für F betrachten wir die Klasse aller meromorphen Funktionen

$$(2) \quad f(z) = a_{-1}z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

die in z_0 höchstens einen einfachen Pol haben und für die

$$(3) \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{n=-1}^{\infty} |na_n^2|}$$

endlich ist. Mit der Norm (3) wird F ein Banach-Raum. Die schlichten Funktionen in der Teilmenge S haben eine Potenzreihenentwicklung

$$(4) \quad f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots.$$

Die Ebene $a_{-1} = 1$ ist konvex und enthält S , so daß K_S auch in $a_{-1} = 1$ enthalten ist. Wenn wir mit I die Identitätsfunktion $f(z) = z$ bezeichnen, dann liefert der Flächensatz [1], daß für alle Funktionen $f \in S$ gilt: $\|f - I\| \leq 1$.

¹⁾ Siehe Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Es sei Σ der Durchschnitt der Ebene $\alpha_{-1} = 1$ und der Kugel $\|f - I\| \leq 1$. Daß Σ konvex ist, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$(5) \quad \begin{aligned} \|\lambda f + (1 - \lambda)g - I\| &= \|\lambda(f - I) + (1 - \lambda)(g - I)\| \\ &\leq \lambda \|f - I\| + (1 - \lambda) \|g - I\|. \end{aligned}$$

Also liegt K_S in Σ .

Wir beweisen jetzt: Wenn das Komplement des Bildgebietes von $|z| > 1$ in bezug auf die Abbildung $f \in S$ den Flächeninhalt Null hat, dann ist f ein extremes Element von K_S .

Aus dem Flächensatz folgt, daß ein solches f der Gleichung $\|f - I\| = 1$ genügt. Wir müssen zeigen, daß f nicht zwischen zwei anderen Funktionen g und h aus K_S liegt. Aus (5) folgt:

$$\|g - I\| = 1 \text{ und } \|h - I\| = 1, \text{ wenn } f = \lambda g + (1 - \lambda)h \text{ ist.}$$

Wenn $g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ und $h(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ ist, dann haben wir

$$|\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n|^2 \leq \lambda^2 |a_n|^2 + (1 - \lambda)^2 |b_n|^2 + \lambda(1 - \lambda) [|a_n|^2 + |b_n|^2]$$

mit der Gleichheit genau dann, wenn $a_n = b_n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|f - I\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n |\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n|^2 \leq \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 + (1 - \lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 + \\ &+ \lambda(1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1 \end{aligned}$$

mit der Gleichheit nur dann, wenn $a_n = b_n$ für alle n gilt. Also ist $g = h$ und f ist extrem.

Andererseits: Wenn die Bildmenge von $|z| > 1$ nicht dicht in der w -Ebene ist, dann ist f ein mittlerer Punkt von K_S .

Nehmen wir an, daß es einen Kreis vom Radius $\varrho > 0$ um den Punkt w_1 gibt, welcher ganz im Äußeren des Bildgebietes von $|z| > 1$ (in bezug auf f) liegt. Dann ist

$$\zeta = w + \frac{a \varrho^2}{w - w_1}$$

eine schlichte Abbildung des Gebietes $|w - w_1| > \varrho$ für willkürliches a mit $|a| = 1$. Dann gehören

$$g(z) = f(z) + \frac{\varrho^2}{f(z) - w_1}$$

und

$$h(z) = f(z) - \frac{\varrho^2}{f(z) - w_1}$$

beide zu S , und es gilt $f(z) = \frac{1}{2}(g(z) + h(z))$. Deshalb ist f ein mittlerer Punkt von K_S .

Die obige Charakterisierung der extremen Punkte von K_S ist nicht vollständig, weil es Bildbereiche von $|z| > 1$ in bezug auf $f \in S$ gibt, die dicht in der w -Ebene sind, aber deren Komplement positiven Flächeninhalt hat. Für diese Funktionen bleibt die Frage offen.

Weil die konvexe Menge K_S in der Kugel Σ liegt, fragen wir jetzt, ob jede Funktion in Σ der Limes in bezug auf die Norm (3) von Funktionen aus K_S ist; d. h. ob $\bar{K}_S = \Sigma$ ist. Wir konstruieren eine Funktion $f \in \Sigma$, die beliebig nahe bei I liegt und die nicht zu K_S gehört. Es sei $w = g(\zeta)$ jene Funktion, die den Einheitskreis $|\zeta| < 1$ auf ein Streifengebiet G abbildet derart, daß G die folgenden Eigenschaften besitzt: Der Flächeninhalt von G sei kleiner als $\pi \varepsilon^2$, wo $0 < \varepsilon < 1$ gegeben ist. Die Abbildung $g(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots$ soll reelle Koeffizienten haben, und es soll $\lim_{\zeta \rightarrow 1} g(\zeta) = \infty$ gelten. Die Existenz solcher Abbildungen folgt aus dem Riemannschen Abbildungssatz. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |g'(\varrho e^{i\theta})|^2 \varrho d\varrho d\theta \leq \varepsilon^2 < 1,$$

und $f(z) = z + g\left(\frac{1}{z}\right)$ gehört zu Σ mit $\|f - I\| < \varepsilon$.

Wir zeigen, daß $f(z)$ nicht zu \bar{K}_S gehört. Nach einem Satz von LÖWNER [3] gilt für jede Funktion $h \in S$ die Ungleichung:

$$|h(z)| \leq |z| + \frac{1}{|z|}.$$

Also gilt

$$(6) \quad |h(z)| \leq \frac{5}{2},$$

wenn $1 < |z| < 2$ ist. Für jede lineare Kombination $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_n h_n$

mit $h_i \in S$ und $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ können wir schreiben:

$$|\lambda_1 h_1(z) + \dots + \lambda_n h_n(z)| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \max |h_i(z)| \leq \frac{5}{2}, \text{ wenn } 1 < |z| < 2.$$

Deshalb gilt (6) auch für alle $h \in K_S$. Aus der Konvergenz in der Norm folgt die gleichmäßige Konvergenz in jeder abgeschlossenen beschränkten Teilmenge von $|z| > 1$. Darum gilt (6) für alle Funktionen aus \bar{K}_S . Andererseits ist $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$. Also gehört f nicht zu \bar{K}_S .

Literatur.

- [1] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie II. Leipzig und Berlin: Teubner 1923. — [2] BONNESEN, T., u. W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper, S. 15. Berlin: Julius Springer 1934. — [3] LÖWNER, K.: Über Extremensätze bei konformen Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises. Math. Z. 3, 65 (1918). — [4] ROSENBLUM, P.: Quelques Classes des Problèmes Extrémaux. Bull. Soc. Math. de France 80, III.

(Eingegangen am 16. Dezember 1954.)

Charakterisierung der holomorphen vollständigen komplexen Räume.

Von

HANS GRAUERT in Münster (Westf.).

Einleitung. Seit RIEMANN ist sich jeder Kenner der klassischen Funktionentheorie bewußt, daß die mehrdeutigen holomorphen Funktionen gleichzeitig mit den eindeutigen holomorphen Funktionen behandelt werden müssen. Dementsprechend ist die Riemannsche Fläche das allgemeine Gebiet, in dem Funktionentheorie getrieben werden muß. Ein vollendeter Aufbau der Riemannschen Fläche wurde zuerst in HERMANN WEYLs „Idee der Riemannschen Fläche“¹⁾ gegeben. Doch gab es ein Jahrzehnt später noch durch T. RADÓ²⁾ eine wesentliche Änderung der axiomatischen Grundlegung. T. RADÓ zeigte, daß in der Definition der (abstrakten) Riemannschen Fläche das Axiom der abzählbaren Umgebungsbasis überflüssig ist (dessen Erfülltsein vorher durch die Forderung nach Triangulierbarkeit implizit vorausgesetzt worden war).

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hat man sehr viel längere Zeit zur Befriedigung der Forderung von RIEMANN benötigt, die mehrdeutigen holomorphen Funktionen den eindeutigen gegenüber gleichberechtigt behandeln zu können. Erst nachdem in den letzten Jahren die komplexen Mannigfaltigkeiten (und ihre Verallgemeinerung, die komplexen Räume³⁾) bekannt geworden sind, ist es möglich geworden, die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen auf andere Grundlagen zu setzen. Dann aber stellte sich heraus, daß nicht geschlossene komplexe Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension als 1 im allgemeinen in keiner Weise Eigenschaften aufweisen, die von den nicht geschlossenen Riemannschen Flächen her bekannt sind. E. CALABI und B. ECKMANN⁴⁾ zeigten in einem Beispiel, daß es sogar komplexe Mannigfaltigkeiten von der topologischen Struktur der Zelle gibt, auf denen der Ring der dort holomorphen Funktionen nur aus den Konstanten besteht. Demgegenüber erkannte K. STEIN⁵⁾, daß komplexe

¹⁾ Vgl. H. WEYL: Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913 Teubner Verlag, Neuauf-
lage 1955 Teubner Verlag.

²⁾ T. RADÓ: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Szeged 2, 101—121
(1924).

³⁾ Vgl. H. CARTAN: Séminaire, 1953—54, Exposé VI, und H. BEHNKE und K. STEIN:
Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann.
124, 1—16 (1951).

⁴⁾ E. CALABI und B. ECKMANN: A class of compact complex manifolds, which are
not algebraic. Ann. of Math. 58, 494—500 (1953).

⁵⁾ Vgl. K. STEIN: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu
vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. 123,
201—222 (1951).

Mannigfaltigkeiten, auf denen hinreichend viele holomorphe Funktionen existieren, ein ähnliches Verhalten wie die nicht geschlossenen Riemannschen Flächen zeigen. So entstand der Begriff der holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit (in der französischen Literatur: *variété de Stein*⁶⁾).

Eine komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} heißt holomorph vollständig, wenn:

1. \mathfrak{M} eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt,
2. zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in \mathfrak{M}$, $x \neq y$, immer eine in \mathfrak{M} holomorphe Funktion f , $f(x) \neq f(y)$ existiert,
3. es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{M}$ n holomorphe Funktionen gibt, die in einer Umgebung von x ein lokales Koordinatensystem definieren,
4. \mathfrak{M} holomorph-konvex⁷⁾ ist.

Auf holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{M} gilt ein Approximationsatz (vgl. Satz 6): Jede in einem in bezug auf \mathfrak{M} konvexen (vgl. Def. vor Satz 6) Teilbereich \mathfrak{B} von \mathfrak{M} holomorphe Funktion läßt sich im Innern von \mathfrak{B} durch in \mathfrak{M} holomorphe Funktionen gleichmäßig approximieren. H. CARTAN und J. P. SERRE gelang die Ausdehnung der Theorie der analytischen Garben (*faisceaux analytiques*) auf holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten. Ihre Hauptergebnisse sind in zwei fundamentalen Sätzen⁸⁾ (théorème A und B) über die kohärenten analytischen Garben zusammengefaßt. Ein Spezialfall von théorème B ist die Gültigkeit der Aussage Cousin-I auf holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten (vgl. Satz 5): Zu beliebig in \mathfrak{M} vorgegebenen Hauptteilen gibt es immer eine in \mathfrak{M} meromorphe Funktion.

Nachdem sich die holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten in den Vordergrund der heutigen funktionentheoretischen Betrachtung geschoben haben, verdient die Frage Interesse, ob es zur Definition dieser Mannigfaltigkeiten notwendig ist, das Axiom 1 zu fordern⁹⁾. Damit sind wir genau auf das Problem von T. RADÓ gekommen. Es zeigt sich, daß für holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten eine Aussage analog zum Radó'schen Satz richtig ist (Satz 8). Das Axiom 1 ist also zu deren Definition überflüssig.

In der vorliegenden Arbeit wird ferner das Problem untersucht, ob sich die Axiome 2, 3, 4 durch der Definition nach schwächere Forderungen ersetzen lassen. In der Tat zeigt sich, daß komplexe Mannigfaltigkeiten schon diesen drei Axiomen und dem Axiom 1 genügen, wenn sie holomorph-konvex und K -vollständig sind (vgl. § 4 und § 2). Dabei heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} K -vollständig, wenn es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{M}$ endlich viele in \mathfrak{M}

⁶⁾ Vgl. H. CARTAN: *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Brüssel 1953, und H. CARTAN: *Séminaire E. N. S. 1951—52*, exposé IX.

⁷⁾ Vgl. H. CARTAN, loc. cit. ⁶⁾ (Brüssel), p. 49.

⁸⁾ Vgl. H. CARTAN, loc. cit. ⁶⁾ (Brüssel), p. 51.

⁹⁾ Bekanntlich haben nicht alle komplexen Mannigfaltigkeiten eine abzählbare Topologie; vgl. E. CALABI und M. ROSENBLITH: *Complex analytic manifolds without countable base*. Proc. Amer. Math. Soc. 4, 335—340 (1953). Unabhängig von dieser Arbeit wurde das in ihr gegebene Beispiel durch mündliche Mitteilungen von H. HOPF bekannt; vgl. übrigens H. HOPF, *Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten*. Comment. Math. Helv. 29, 132—156 (1955), insbesondere S. 145—146 mit Fußnote 7.

holomorphe Funktionen gibt, die eine Umgebung von x nirgends entartet in den komplexen Zahlenraum abbilden.

Nun ist bekannt, daß die Menge der komplexen Mannigfaltigkeiten noch nicht die Gesamtheit der analytischen Gebilde von Punkten algebroiden Verhaltens der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen umfaßt. Aus diesem Grunde muß — wie es auch schon in einzelnen vorangegangenen Arbeiten geschehen ist — ein allgemeinerer Begriff an die Stelle der komplexen Mannigfaltigkeit gesetzt werden. Das soll hier durch den Begriff des komplexen Raumes¹⁰⁾ geschehen:

Wir nennen einen Hausdorffschen Raum \mathfrak{R} einen komplexen Raum, wenn \mathfrak{R} mit einer Überdeckung $\{U_i\}$ von offenen Mengen U_i versehen ist, die durch topologische Abbildungen Φ_i fest auf analytisch verzweigte Überlagerungen \mathfrak{A}_i von Gebieten des komplexen Zahlenraumes abgebildet sind. Haben $U_i, U_j \in \{U_i\}$ einen nichtleeren Durchschnitt, so ist gefordert, daß die Abbildung $\Phi_i \Phi_j^{-1}$ in $\Phi_i(U_i) \subset \mathfrak{A}_i$ holomorph ist.

Bei der Ausdehnung des Begriffes der holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit auf komplexe Räume macht nur das Axiom 3 Schwierigkeiten. Es wird deshalb durch ein Axiom '3 ersetzt:

'3) Zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{M}$ gibt es endlich viele in \mathfrak{M} holomorphe Funktionen, die eine Umgebung von x normal einbetten^{10a)}. (Zur Definition der normalen Einbettung vgl. Def. 4, 5, 6.)

Man zeigt leicht, daß bei komplexen Mannigfaltigkeiten Axiom 3 und '3 äquivalent sind. Komplexe Räume mit den Eigenschaften 1, 2, '3 und 4 heißen holomorph vollständige Räume. In holomorph vollständigen Räumen gelten wieder die Aussagen Cousin-I und der Approximationssatz (vgl. Sätze 5 und 6). Wieweit dagegen die Aussage Cousin-II und die Sätze der Garbentheorie ihre Gültigkeit behalten, soll in einer späteren Arbeit des Verf. untersucht werden.

Alle Sätze der vorliegenden Arbeit werden nicht nur für holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten, sondern gleich für holomorph vollständige Räume ausgesprochen. Es werden drei Klassen von komplexen Räumen betrachtet:

- a) n -dimensionale komplexe Räume, die den Axiomen 1, 2, '3 genügen,
- b) n -dimensionale K -vollständige Räume,
- c) komplexe Räume, die zu Riemannschen Gebieten über dem Raum C^n von n komplexen Veränderlichen analytisch äquivalent sind.

Offenbar ist ein Raum a) a fortiori ein Raum b). Daß sich jeder K -vollständige Raum eindeutig holomorph auf ein Riemannsches Gebiet über dem C^n abbilden läßt und darum eine abzählbare Topologie besitzt, wird in § 3 gezeigt (Satz A). Dagegen ist die Klasse c) größer als die Klasse a). Ein in seinem Innern verzweigtes Riemannsches Gebiet \mathfrak{G} , dessen Holomorphiehülle schlicht ist^{10b)}, genügt weder dem Axiom 2 noch dem Axiom '3. In

¹⁰⁾ Wir folgen hier H. BEHNKE und K. STEIN. Vgl. H. BEHNKE und K. STEIN, loc. cit. ⁹⁾.

^{10a)} Vgl. H. CARTAN: Séminaire, 1953–54, Exposé X, XI und K. OKA: Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables. VIII. Lemme fondamental (suite). J. Math. Soc. Japan 3, 254–278 (1951).

^{10b)} H. BEHNKE und P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3, 251–371 (1935).

Punkten von \mathfrak{G} , die über demselben Grundpunkt liegen, nimmt jede in \mathfrak{G} holomorphe Funktion den gleichen Wert an; zu Verzweigungspunkten $x \in \mathfrak{G}$ gibt es kein System in \mathfrak{G} holomorpher Funktionen $f_1 \dots f_k$, die eine Umgebung von x eineindeutig abbilden, und darum auch kein Funktionensystem in \mathfrak{G} , das eine Umgebung von x normal einbettet (vgl. dazu Def. 4).

Wird jedoch von den komplexen Räumen $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle c \rangle$ zusätzlich gefordert, daß sie holomorph-konvex sind, und werden die so gewonnenen Raumklassen mit $\langle' a \rangle$, $\langle' b \rangle$, $\langle' c \rangle$ bezeichnet, so zeigt sich, daß $\langle' c \rangle$ in $\langle' a \rangle$ enthalten ist (§ 4, Satz B). Die Klassen $\langle' a \rangle$, $\langle' b \rangle$, $\langle' c \rangle$ stimmen deshalb überein:

$$\langle a \rangle \rightarrow \langle b \rangle \xrightarrow[\text{Satz B}]{\text{Satz A}} \langle c \rangle$$

holomorph-konvex: \uparrow

Damit ist gezeigt:

I. Die Theorie der holomorph vollständigen Räume ist genau die Theorie der holomorph-konvexen Riemannschen Gebiete über dem C^n .

II. Die Axiome des holomorph vollständigen Raumes lassen sich durch die der Definition nach schwächeren Forderungen der K -Vollständigkeit und der Holomorphiekonvexität ersetzen.

Die beiden letzten Postulate müssen dagegen zur Definition des holomorph vollständigen Raumes gestellt werden. Man erhält leicht durch σ -Modifikation¹¹⁾ eines Holomorphiegebietes des C^n eine komplexe Mannigfaltigkeit, die, obgleich sie dem Axiom der Holomorphiekonvexität genügt und n unabhängige holomorphe Funktionen besitzt, nicht K -vollständig und darum nicht holomorph vollständig ist. Daß die K -Vollständigkeit ohne die Holomorphiekonvexität zur Definition der Klasse $\langle a \rangle$ nicht hinreicht, wurde schon gezeigt.

Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Dr. H. BEHNKE, der mir die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gab, an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen. Herrn Prof. Dr. K. STEIN sei für wertvolle Hinweise gedankt.

§ 1. Holomorph vollständige Räume.

Wir stellen in diesem Paragraphen grundlegende Begriffe und Sätze zusammen:

Def. 1. Ein Paar $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ heißt eine analytisch-verzweigte Überlagerung eines Gebietes G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen, wenn folgendes gilt:

1. R ist ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum, Φ ist eine eigentliche¹²⁾ stetige Abbildung von R auf G . Der Punkt $x \in R$ (wir sagen auch $x \in \mathfrak{A}$) heißt über dem Punkt $\Phi(x) \in G$ gelegen.

¹¹⁾ H. HOFF: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. appl. V, 10, 169—182 (1951).

¹²⁾ Eine Abbildung zweier lokal-kompakter HAUSDORFFscher Räume ineinander heißt eigentlich, wenn die Urbildmengen kompakter Mengen kompakt sind. Wir verwenden „kompakt“ im Sinne von N. BOURBAKI.

2. Es gibt eine (evtl. leere) analytische Menge A in G , derart, daß $\Phi^{-1}(A)$ in R nirgends dicht liegt und daß $\tilde{R} = R - \Phi^{-1}(A)$ lokal-topologisch¹³⁾ durch Φ auf $G - A$ bezogen wird und daß über jedem Punkt von G nur endlich viele Punkte von R liegen.

3. Zu jedem Punkt $x \in R$ gibt es beliebig kleine Umgebungen¹⁴⁾, so daß $U - \Phi^{-1}(A)$ zusammenhängend ist.

Der Begriff des komplexen Raumes sowie die Begriffe der holomorphen Abbildung von komplexen Räumen ineinander und der analytischen Menge¹⁵⁾ usw. seien wie in (1)¹⁶⁾ definiert. Doch setzen wir hier nicht voraus, daß ein komplexer Raum \mathfrak{R} zusammenhängend ist. Vielmehr wird nur gefordert, daß \mathfrak{R} aus höchstens abzählbar vielen zusammenhängenden Komponenten besteht. Besitzt \mathfrak{R} eine abzählbare Umgebungsbasis, d. h. gibt es ein abzählbares System von offenen Mengen $\{U_j\}$, derart, daß jede offene Menge von \mathfrak{R} Vereinigung von Mengen U_j ist, so erzeugt (vgl. (1)) jede analytische Menge $A \subset \mathfrak{R}$ in natürlicher Weise einen komplexen Raum $*A$, der durch eine holomorphe Abbildung σ auf A abgebildet ist. σ ist in $*A$ nirgends entartet und eine eigentliche Abbildung. Dabei nennen wir eine holomorphe Abbildung $\sigma: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ eines komplexen Raumes \mathfrak{R} in einen komplexen Raum \mathfrak{R} nirgends entartet, wenn die Fasermenge $\mathfrak{F}_x: \{\sigma^{-1}\sigma(x)\}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ aus isolierten Punkten besteht. Eine Abbildung σ heißt nicht entartet, wenn wenigstens ein \mathfrak{F}_x , $x \in \mathfrak{R}$, nur isolierte Punkte enthält.

Wir sagen: eine analytisch-verzweigte Überlagerung $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ genügt der C-Bedingung¹⁷⁾, wenn es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in \tilde{R}$, $\Phi(x) = \Phi(y)$ eine auf \mathfrak{A} holomorphe Funktion gibt, die in x und y verschiedene Funktionselemente besitzt.

Def. 2. Ein komplexer Raum \mathfrak{R} genügt der C-Bedingung, wenn es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R}$ ein lokales Koordinatensystem (U, Ψ, \mathfrak{A}) gibt, bei dem Ψ die offene

¹³⁾ Eine Abbildung τ heißt lokal-topologisch, wenn τ eine Umgebung jedes Punktes topologisch abbildet.

¹⁴⁾ Unter einer Umgebung einer Menge N sei stets eine offene Menge verstanden, die N enthält.

¹⁵⁾ Da es unbekannt ist, ob auf jeder analytisch verzweigten Überlagerung \mathfrak{A} holomorphe Funktionen f existieren, derart, daß das Verzweigungsverhalten von \mathfrak{A} dem Verzweigungsverhalten von f entspricht, ist es unzweckmäßig, die analytische Menge als gleichzeitiges Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen zu definieren. Vielmehr heiße eine Menge $A \subset \mathfrak{R}$ analytisch, wenn es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R}$ eine Umgebung $U(x)$, einen komplexen Raum \mathfrak{E}_x und eine eigentliche, nirgends entartete holomorphe Abbildung τ von \mathfrak{E}_x in U gibt, derart, daß $\tau(\mathfrak{E}_x) = U \cap A$ ist. Nach einem Projektionssatz von R. REMMERT [loc. cit.¹⁸⁾] ist diese Definition bei komplexen Mannigfaltigkeiten zu der üblichen Definition äquivalent. Ferner läßt sich beweisen, daß das gleichzeitige Nullstellengebilde einer Menge von in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen immer eine analytische Menge im Sinne unserer Definition ist.

¹⁶⁾ (1) H. GRAUERT und R. REMMERT: Zur Theorie der stetigen und eigentlichen Modifikationen komplexer Räume (erscheint in den Math. Ann.). Die komplexen Räume werden hier im wesentlichen nach H. BEHNKE und K. STEIN [loc. cit.⁹⁾] definiert.

¹⁷⁾ Eine bislang noch nicht bewiesene Vermutung ist, daß jede analytisch-verzweigte Überlagerung eines Polyzylinders der C-Bedingung genügt. Ist diese Vermutung richtig, so erfüllt jeder komplexe Raum die C-Bedingung.

Menge $U \subset \mathfrak{R}$ auf eine offene Menge einer analytisch-verzweigten Überlagerung \mathfrak{A} abbildet, die die C -Bedingung erfüllt.

Eine analytisch-verzweigte Überlagerung, die der C -Bedingung genügt, ist zu einem durch eine in einem Gebiet des C^n analytische Menge A erzeugten komplexen Raum $*A$ analytisch äquivalent. Deshalb sind die komplexen Räume mit C -Bedingung genau die komplexen Räume nach der Definition von H. CARTAN¹⁸⁾ (espaces analytiques généraux).

Wir definieren nun das konkrete Riemannsche Gebiet über dem C^n :

Def. 3. Ein Paar $\mathfrak{R} = (R, \Phi)$ heißt ein Riemannsches Gebiet über dem C^n , wenn

1. R ein Hausdorffscher Raum ist, der aus höchstens abzählbar vielen zusammenhängenden Komponenten besteht und Φ eine offene stetige Abbildung von R in den C^n ist,

2. es zu jedem Punkt $x \in R$ eine Umgebung $U(x) \subset R$ gibt, derart, daß $\mathfrak{A} = (U, \Phi)$ eine analytisch verzweigte Überlagerung von $\Phi(U)$ ist.

Dabei heißt eine Abbildung *offen*, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Ein Riemannsches Gebiet ist trivialerweise ein spezieller komplexer Raum. Es gilt nun:

Satz 1. U sei eine offene Menge eines komplexen Raumes \mathfrak{R} , $f_1 \dots f_k$ seien endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen, die eine nirgends entartete Abbildung τ von U in den C^k vermitteln. Dann gibt es um jeden Punkt $\tau(x)$, $x \in U$, eine Hyperkugel $H \subset C^k$ und um x eine beliebig kleine Umgebung $V \subset U$, die durch τ eigentlich in H abgebildet wird.

Beweis. Da τ nicht in x entartet ist, gibt es zu x eine Umgebung $W(x)$, $W \subset U$, derart, daß $\tau(x) \neq \tau(\overline{W} - W)$ ist. Die Menge $\tau(\overline{W} - W)$ ist abgeschlossen. Deshalb kann man um $\tau(x)$ eine Hyperkugel H legen, derart, daß H keinen Punkt von $\tau(\overline{W} - W)$ enthält. Die offene Menge $V = \tau^{-1}(H) \cap W$ wird durch τ eigentlich in H abgebildet, wie man auf folgende Weise zeigen kann: Wir dürfen annehmen, daß W und damit V zu einer offenen Menge einer analytisch verzweigten Überlagerung äquivalent ist. Eine Menge $N \subset V$ ist deshalb genau dann kompakt, wenn jede Folge von Punkten x_ν , $\nu = 1, 2, 3 \dots$, aus N in N einen Häufungspunkt hat. Jede beliebige Folge von Punkten $x_\nu \in V$ häuft sich gegen einen Punkt $x \in \overline{W}$. Es gilt sogar $x \in W$, da anderenfalls $\tau(x_\nu) \in H$ gegen $\tau(x) \in \tau(\overline{W} - W)$ konvergieren müßte. Ist nun M eine kompakte Menge aus H und $x_\nu \in N = \tau^{-1}(M) \cap W$, so gilt $\tau(x) \in M$ und damit $x \in N$. Das war zu beweisen.

Da V eigentlich in H abgebildet wird, folgt aus einem Satz von R. REMMERT über Projektionen analytischer Mengen und komplexer Räume¹⁹⁾, daß

¹⁸⁾ Vgl. H. CARTAN, loc. cit.²⁾.

¹⁹⁾ Vgl. zwei demnächst erscheinende Arbeiten von R. REMMERT in den Math. Ann. über: „Projektionen analytischer Mengen“ und „Holomorphe und meromorphe Abbildungen analytischer Mengen.“ Der Satz von R. REMMERT lautet: Sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{E}$ komplexe Räume, wird \mathfrak{R} durch τ eigentlich und holomorph in \mathfrak{E} abgebildet und ist A eine analytische Menge in \mathfrak{R} , so ist $\tau(A)$ eine analytische Menge in \mathfrak{E} . Natürlich ist dieser Satz bei der in der vorliegenden Arbeit angegebenen Definition der analytischen Menge fast trivial. R. REMMERT beweist eine tieferliegende Aussage: Erfüllt \mathfrak{E} die C -Bedingung, so ist $\tau(A)$ das simultane Nullstellengebilde von endlich vielen lokal-holomorphen Funktionen.

$\tau(V) \cap H$ eine analytische Menge in H ist. Dieser Umstand kann ausgenutzt werden, um die normale Einbettung eines komplexen Raumes zu definieren.

Def. 4. Endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ betten eine Umgebung eines Punktes $x \in \mathfrak{R}$ genau dann normal ein, wenn es

1. um x eine Umgebung U gibt, in der $f_1 \dots f_k$ eine eindeutige und somit nirgends entartete holomorphe Abbildung τ vermitteln,

2. bei hinreichend klein nach Satz 1 gewähltem $V \cap \tau(V) \cap H$ eine in H normal eingebettete analytische Menge ist.

Def. 5. Eine in einem Gebiet G des C^n analytische Menge A ist normal eingebettet, wenn sie in jedem ihrer Punkte normal eingebettet ist.

Def. 6. Eine analytische Menge $A \subset G$ ist in einem Punkt $x \in A$ normal eingebettet, wenn jede in einer Umgebung von x auf A holomorphe Funktion g Spur einer in einer Umgebung $U_g \subset G$ holomorphen Funktion g ist.

Dabei heißt eine Funktion g in einer Umgebung von x auf A holomorph, wenn g in einer Umgebung der Punkte $\sigma^{-1}(x)$ in $*A$ holomorph ist. $*A$ ist der durch A erzeugte komplexe Raum, σ bezeichnet wieder die kanonische Abbildung $*A \rightarrow A$. Es wird nicht gefordert, daß g in allen Punkten $\sigma^{-1}(x)$ den gleichen Funktionswert hat.

Wir sagen: Ein komplexer Raum \mathfrak{R} wird durch endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ normal eingebettet, wenn 1. die $f_1 \dots f_k$ den Raum in einer Umgebung jedes seiner Punkte normal einbetten und 2. in zwei beliebigen verschiedenen Punkten $x, y \in \mathfrak{R}$ immer für wenigstens ein $v = 1 \dots k$: $f_v(x) \neq f_v(y)$ ist. Normal eingebettete analytische Mengen A sind lokal irreduzibel eingebettet. Es ist daher dann $*A$ zu A analytisch äquivalent.

Es gilt:

Satz 2. Zu jedem Punkt x eines komplexen Raumes \mathfrak{R} , der der C -Bedingung genügt, gibt es eine Umgebung $U(x) \subset \mathfrak{R}$, derart, daß $U(x)$ durch endlich viele in $U(x)$ holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ normal eingebettet wird.

Beweis. Da der Satz lokaler Natur ist, dürfen wir annehmen, daß \mathfrak{R} eine analytisch-verzweigte Überlagerung ist, die der C -Bedingung genügt. \mathfrak{R} ist dann zu einem durch eine analytische Menge erzeugten komplexen Raum $*A$ äquivalent. Nach einem Satz von H. CARTAN und K. OKA²⁰⁾ läßt sich $*A$ in einer Umgebung U jedes Punktes $x \in *A$ durch in U holomorphe Funktionen normal einbetten. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir benötigen für spätere Zwecke noch folgenden

Satz 3. Sind \mathfrak{R} ein komplexer Raum und $f_1 \dots f_k$ in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen, die eine Umgebung U eines Punktes $x \in \mathfrak{R}$ normal einbetten, so gibt es eine positive Zahl ε , derart, daß auch alle in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen $f'_1 \dots f'_k$, $|f'_v - f_v| < \varepsilon$ in U , eine Umgebung von x normal einbetten.

²⁰⁾ H. CARTAN, loc. cit.^{10a)}, K. OKA, loc. cit.^{10a)}. Der hier benutzte Satz lautet: Ist A eine analytische Menge eines Gebietes des C^n , $*A$ der durch A erzeugte komplexe Raum, so gibt es zu jedem Punkt $x \in *A$ endlich viele in x holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$, die eine Umgebung von x normal einbetten.

Wir benutzen beim Beweise von Satz 3 einen Satz von H. CARTAN und K. OKA²¹⁾:

Cartan-Okascher Fundamentalsatz. *Ist A eine in einem Holomorphiegebiet Z des C^n normal eingebettete analytische Menge und ist h , $|h| < M$, eine auf A (schwach) holomorphe Funktion, so gibt es zu jedem relativ-kompakt in Z enthaltenen Gebiet $'Z$ eine nicht von h abhängende Konstante $K_0 > 0$ derart, daß h auf $A \cap 'Z$ Spur einer in $'Z$ holomorphen Funktion \tilde{h} , $|\tilde{h}| < K_0 M$, ist.*

Beweis von Satz 3. Da die Funktionen $f_1 \dots f_k$ eine holomorphe Abbildung τ von U in den $z_1 \dots z_k$ -Raum vermitteln, die U normal einbettet, ist τ in U sicher nirgends entartet und dort eineindeutig. Nach Satz 1 gibt es eine Hyperkugel H um $\tau(x)$ und eine Umgebung $V(x) \subset U$, derart, daß τ die Menge V eigentlich in H abbildet. $A = \tau(V)$ ist eine normal eingebettete analytische Menge in H . Sei $'H \subset H$ eine relativ-kompakt, konzentrisch in H enthaltene Hyperkugel. Nach dem Cartan-Okaschen Satz gibt es zu $'H$ eine Konstante K_0 , derart, daß sich alle auf A holomorphen Funktionen g , $|g(A)| < \varepsilon$, in $A \cap 'H$ als Spur einer in $'H$ holomorphen Funktion g , $|g('H)| < K_0 \varepsilon$, darstellen lassen. Setzen wir auf A : $g_v = f_v \tau^{-1}$, $'g_v = 'f_v \tau^{-1}$ und ist in U : $|'f_v - f_v| < \varepsilon$, so ist in $'H$: $g_v = z_v$ und $|'g_v - z_v| < K_0 \varepsilon$. Ist ε hinreichend klein gewählt, so gibt es daher eine Umgebung $W(\tau(x)) \subset 'H$, die die Funktionen $'g_v$ eineindeutig auf ein Gebiet G des $w_1 \dots w_k$ -Raumes abbilden. Bezeichnet λ diese Abbildung, so ist $\lambda(A \cap W)$ eine in G normal eingebettete analytische Menge. Denn eine Fortsetzung einer beliebigen in einem Punkt $w \in \lambda(A \cap W)$ auf $\lambda(A \cap W)$ holomorphen Funktion h in eine Umgebung dieses Punktes $\tilde{U} \subset G$ erhält man, wenn man $\lambda^{-1}h$ zu $\lambda^{-1}h$ in $\lambda^{-1}(\tilde{U})$ fortsetzt und darauf in \tilde{U} : $\tilde{h} = \lambda \lambda^{-1}h$ bildet. Die Funktionen $'f_v$ bilden eine Umgebung von x eineindeutig auf $\lambda(A \cap W)$ ab, betten also in dieser Umgebung \mathfrak{R} normal ein. Das war zu beweisen.

Nach diesen Vorbereitungen ist es uns nun möglich geworden, den Begriff des holomorph vollständigen (komplexen) Raumes zu definieren:

Def. 7. *Ein komplexer Raum \mathfrak{R} heißt holomorph vollständig, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

1. \mathfrak{R} besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.
2. Zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in \mathfrak{R}$, $x \neq y$, gibt es immer eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion f , derart, daß $f(x) \neq f(y)$ gilt.

²¹⁾ Vgl. H. CARTAN: Idéaux et modules des fonctions analytiques des variables complexes. Bull. Soc. Math. France 78, 28—64 (1950). Ferner auch H. CARTAN, loc. cit.* (Brüssel), théorème 3. Der Satz, daß jede Funktion, die auf einer in einem Holomorphiegebiet \mathfrak{G} normal eingebetteten analytischen Menge A (schwach) holomorph ist, sich als Spur einer in \mathfrak{G} holomorphen Funktion gewinnen läßt, wurde schon vor mehreren Jahren von H. CARTAN bewiesen. Die hier benutzte Verschärfung ergibt sich nach einer mündlichen Mitteilung von H. CARTAN aus einem Satz von BANACH über lineare Abbildungen vollständiger metrischer Vektorräume aufeinander (vgl. N. BOURBAKI XII, Esp. vect. top.). Der Raum der holomorphen Funktionen auf A bzw. \mathfrak{G} ist — versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz — ein vollständiger metrisierbarer Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Vgl. auch K. OKA: Sur la théorie des fonctions des plusieurs variables. IX: Domaines finis sans point critique interieur. (Jap. J. Math. 1953.)

3. Zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R}$ gibt es endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_k , die eine Umgebung von x normal einbetten.

4. \mathfrak{R} ist holomorph-konvex²²⁾.

Ein holomorph vollständiger komplexer Raum ohne nichtuniformisierbare Punkte heißt eine holomorph vollständige komplexe Mannigfaltigkeit (variété de STEIN). Wir zeigen:

Satz 4. Zu jedem Punkt x eines komplexen Raumes \mathfrak{R} , der der C-Bedingung genügt, gibt es eine beliebig kleine Umgebung $U(x)$, die ein zusammenhängender, holomorph vollständiger Raum ist.

Beweis. Da der Satz lokaler Natur ist, dürfen wir annehmen, daß \mathfrak{R} eine analytisch-verzweigte Überlagerung $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ einer Hyperkugel H ist. Zu $x \in \mathfrak{A}$ gibt es nach Satz 2 eine Umgebung V , die durch endlich viele in V holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_k normal eingebettet wird. Wählen wir um $\Phi(x)$ eine Hyperkugel $'H \subset H$, derart, daß $\Phi^{-1}('H) \cap V \subset V$ gilt, so ist $\Phi^{-1}('H) \cap V$ ein holomorph vollständiger Raum. Denn die Axiome 1, 3, 4 von Def. 7 sind trivialerweise erfüllt. Axiom 2 ist erfüllt, da die f_1, \dots, f_k die Umgebung V eindeutig abbilden.

In den folgenden Paragraphen wird der Definition 7 der Begriff des K -vollständigen Raumes gegenübergestellt.

Def. 8. Ein komplexer Raum \mathfrak{R} heißt K -vollständig, wenn es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R}$ endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen gibt, die eine Umgebung von x nirgends entartet abbilden.

Jeder holomorph vollständige Raum und jedes Riemannsche Gebiet ist trivialerweise ein K -vollständiger Raum. Doch gibt es sogar offene komplexe Mannigfaltigkeiten, die nicht K -vollständig sind.

Für holomorph vollständige Räume gelten ähnliche Sätze, wie für holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten.

Satz 5. (1. Cousinsche Aussage)²³⁾. Ist $\{U_j\}$ eine offene Überdeckung von \mathfrak{R} , sind in allen U_j meromorphe Funktionen f_j definiert, derart, daß in allen $U_{j_1 j_2} = U_{j_1} \cap U_{j_2}$: $g_{j_1 j_2} = f_{j_2} - f_{j_1}$ holomorph ist, d. h. ist in \mathfrak{R} eine Cousin-I-Verteilung gegeben, so gibt es eine in \mathfrak{R} meromorphe Funktion f (Lösung der Cousin-I-Verteilung), derart, daß $f - f_j$ in U_j holomorph ist.

Nennt man einen Bereich $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ konvex in bezug auf \mathfrak{R} , wenn \mathfrak{B} in bezug auf die Klasse der in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen holomorph-konvex ist, so gilt ferner:

Satz 6. (Approximationssatz)²⁴⁾. Ist \mathfrak{B} ein in bezug auf \mathfrak{R} konvexer Bereich, so läßt sich jede in \mathfrak{B} holomorphe Funktion im Innern von \mathfrak{B} durch eine Folge von in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen gleichmäßig approximieren.

Dabei sagen wir, eine Folge von holomorphen Funktionen f_n approximiert im Innern von \mathfrak{B} gleichmäßig eine Grenzfunktion f , wenn f_n auf jedem kompakten Teil von \mathfrak{B} gleichmäßig gegen f konvergiert.

²²⁾ H. CARTAN, loc. cit.⁶⁾ (Brüssel), p. 49.

²³⁾ Vgl. P. COUSIN: Sur les fonctions des n var. compl. Acta math. 19, 1—62 (1895) und K. OKA: Sur la théorie des fonctions des plusieurs variables. II: Domaines d'holomorphic. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 245—255 (1936).

²⁴⁾ Dieser Satz führt in der Literatur auch den Namen RUNGEScher Satz.

Wir zeigen zunächst Satz 6. \mathfrak{B} ist durch eine Folge $\mathfrak{P}_\nu: \{x \in \mathfrak{R}, |f_\mu^{(\nu)}(x)| < 1, \mu = 1 \dots k_\nu, f_\mu^{(\nu)} \text{ holomorph in } \mathfrak{R}\}$ analytischer Polyeder von \mathfrak{R} ausschöpfbar, bei der \mathfrak{P}_ν relativ-kompakt in $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ liegt. Zu jedem \mathfrak{P}_ν gibt es endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1^{(\nu)} \dots f_{k_\nu}^{(\nu)}, f_{k_\nu+1}^{(\nu)} \dots f_{m_\nu}^{(\nu)}, |f_{k_\nu+\mu}^{(\nu)}(\mathfrak{P}_\nu)| < 1, \mu = 1 \dots m_\nu - k_\nu$, die eine umkehrbar eindeutige holomorphe Abbildung τ_ν von \mathfrak{P}_ν in den m_ν -dimensionalen Einheitspolyzylinder Z vermitteln, derart, daß $A = \tau_\nu(\mathfrak{P}_\nu)$ eine in Z normal eingebettete analytische Menge ist. Es sei $'Z_\nu \subset Z$ ein Polyzylinder, der $\tau_\nu(\mathfrak{P}_{\nu-1})$ umfaßt, und \hat{h} sei eine holomorphe Funktion in \mathfrak{P}_ν . Nach dem Cartan-Okaschen Fundamentalsatz ist dann $\hat{h} = h \tau_\nu^{-1}$ auf $A \cap 'Z_\nu$ Spur einer in $'Z_\nu$ holomorphen Funktion \hat{h} . Da \hat{h} sich in eine Potenzreihe nach den $z_1 \dots z_{m_\nu}$ entwickeln läßt, kann \hat{h} durch (endliche) Potenzsummen $g = \Sigma a_{\mu_1 \dots \mu_{m_\nu}} z_1^{\mu_1} \dots z_{m_\nu}^{\mu_{m_\nu}}$ im Innern von $'Z_\nu$ approximiert werden. Deshalb ist \hat{h} im Innern von $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ durch Summen $g = \Sigma a_{\mu_1 \dots \mu_{m_\nu}} f_1^{(\nu)\mu_1} \dots f_{m_\nu}^{(\nu)\mu_{m_\nu}}$ approximierbar. Eine gegen eine in \mathfrak{B} holomorphe Funktion g gleichmäßig konvergierende Folge von in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen g_ν erhält man, wenn man zunächst g in jedem \mathfrak{P}_ν durch Funktionen g_ν , $|g - g_\nu(\mathfrak{P}_{\nu-1})| < \frac{1}{\mu}, \mu = 1, 2, 3, \dots$, gleichmäßig approximiert und dann die Diagonalfolge g_ν bildet.

Beweis von Satz 5. Wir schöpfen wieder \mathfrak{R} durch in \mathfrak{R} relativ-kompakte analytische Polyeder $\mathfrak{P}_\nu: \{x \in \mathfrak{R}, |f_\mu^{(\nu)}(x)| < 1, \mu = 1 \dots k_\nu, f_\mu^{(\nu)} \text{ holomorph in } \mathfrak{R}\}$ aus. Können wir zeigen, daß es zu jeder in \mathfrak{R} gegebenen Cousin-I-Verteilung in jedem \mathfrak{P}_ν eine Lösung f_ν gibt, so ist Satz 5 bewiesen, wie folgende Überlegung zeigt. $g_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu$ ist in \mathfrak{P}_ν holomorph. Nach Satz 6 gibt es in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $'g_\nu$, derart, daß $|g_\nu - 'g_\nu| < \frac{1}{\nu}$ in $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ ist. Wir können daher (durch Bildung von $'f_{\nu+1} = f_{\nu+1} - 'g_\nu$) die f_ν so bestimmen, daß $|f_{\nu+1} - f_\nu| < \frac{1}{\nu}$ in $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ ist. $f = \lim f_\nu$ ist dann eine Lösung der Cousin-I-Verteilung in \mathfrak{R} .

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß jede Cousin-I-Verteilung in \mathfrak{R} eine Lösung in \mathfrak{P}_ν besitzt. Dazu betten wir $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ durch endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1^{(\nu+1)} \dots f_{k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}, f_{k_{\nu+1}+1}^{(\nu+1)} \dots f_{m_{\nu+1}}^{(\nu+1)}$ als analytische Menge A wie beim Beweise von Satz 6 normal in den Einheitspolyzylinder Z ein. Es sei τ die durch diese holomorphen Funktionen beschriebene Abbildung. $\tau(\mathfrak{P}_\nu)$ ist in einem Polyzylinder $'Z: \{|z_\nu| < 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1\}$ enthalten. Offenbar können wir den Kreis $'K: \{|z| < 1 - \varepsilon\}$ durch endlich viele offene Umgebungen $V_i \subset K: \{|z| < 1\}, i = 1 \dots s$, überdecken, derart, daß die Überdeckung $\{\bar{W}_{i_1 \dots i_m}\}$ mit $\bar{W}_{i_1 \dots i_m} = \tau^{-1}(A \cap (V_{i_1} \times \dots \times V_{i_m}))$, $i_\nu = 1 \dots s$, eine Verfeinerung der Überdeckung $\{U_i\}$ von \mathfrak{P}_ν ist. Jedem $(i_1 \dots i_m)$ kann dann ein $i = \gamma(i_1 \dots i_m)$, $\bar{W}_{i_1 \dots i_m} \subset U_i$, zugeordnet werden. Wir erhalten in natürlicher Weise in bezug auf die Überdeckung $\{\bar{W}_{i_1 \dots i_m}\}$ eine Cousin-I-Verteilung in $\bar{W} = \bigcup_{i_1 \dots i_m} \bar{W}_{i_1 \dots i_m}$, wenn wir in $\bar{W}_{i_1 \dots i_m}$ die meromorphe Funktion

$f_{i_1 \dots i_m} = f_{\gamma(i_1 \dots i_m)}$ vorgeben. Jede Lösung der Cousin-I-Verteilung in bezug auf $\{U_i\}$ ist in \bar{W} eine Lösung der zu $\{\bar{W}_{i_1 \dots i_m}\}$ konstruierten Cousin-I-

Verteilung und umgekehrt. Den weiteren Beweis des Satzes 5 stützen wir auf folgende Aussage:

(1) Es seien $Q_1, Q_2, Q \subset K$ offene Mengen des Einheitskreises K , mit $P_i, i = 1, 2$, sei die Teilmenge $\bar{Q}_i \times \bar{Q} \times \cdots \times \bar{Q}$ von Z bezeichnet, ferner sei $W_i = \tau^{-1}(P_i) \cap \mathfrak{P}_{r+1}$. Ist dann $g_{1,2}$ in (einer Umgebung von) $W_1 \cap W_2$ holomorph, so gibt es in W_1, W_2 holomorphe Funktionen g_1, g_2 , derart, daß $g_{1,2} = g_1 - g_2$ in $W_1 \cap W_2$ ist.

Zum Beweise dieser Behauptung bilden wir $\hat{g}_{1,2} = g_{1,2}\tau^{-1}$ auf $A = A \cap P_1 \cap P_2 \subset Z$. Auf A ist $\hat{g}_{1,2}$ nach dem Cartan-Okaschen Fundamentalsatz Spur einer in $P_1 \cap P_2$ holomorphen Funktion $\hat{g}_{1,2}$. Nach einem Heftungslemma von COUSIN²³⁾ gibt es in P_1, P_2 holomorphe Funktionen \hat{g}_1, \hat{g}_2 , derart, daß $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 = \hat{g}_{1,2}$ in $P_1 \cap P_2$ ist. $g_i = \hat{g}_i\tau$ sind dann die gesuchten Funktionen in W_i .

Die Aussage (1) verwenden wir, um eine Lösung der Cousin-I-Verteilung in \mathfrak{P} , zu konstruieren. Sind $g_{i_1 \dots i_{s-1}, 1}, g_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$ holomorphe Funktionen in $W_{i_1 \dots i_s}$ bzw. in $W_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$, derart, daß in $W_{i_1 \dots i_s} \cap W_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$: $g_{i_1 \dots i_s} - g_{i_1 \dots i_{s-1}, 2} = f_{i_1 \dots i_s} - f_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$ gilt, so ist $*f = f_{i_1 \dots i_s} - g_{i_1 \dots i_{s-1}, 1} = f_{i_1 \dots i_s} - g_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$ eine Lösung der Cousin-I-Verteilung in $W_{i_1 \dots i_s} \cup W_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$. Durch Heftung in $W_{i_1 \dots i_s} \cup W_{i_1 \dots i_{s-1}, 2}$ und $W_{i_1 \dots i_{s-1}, 3}$ nach dem gleichen Verfahren erhält man eine Lösung der Cousin-I-Verteilung in $W_{i_1 \dots i_s} \cup W_{i_1 \dots i_{s-1}, 2} \cup W_{i_1 \dots i_{s-1}, 3}$. Man kann diese Methode zur Konstruktion von Lösungen beliebig fortsetzen. Schließlich erhält man eine in W meromorphe Funktion f , die dort eine Cousin-I-Lösung ist. Da $W \supset \mathfrak{P}$, gilt, ist in f eine Funktion für \mathfrak{P} , mit den verlangten Eigenschaften gefunden. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Wir zeigen noch folgende Aussage:

Satz 7. Ist \mathfrak{R} ein holomorph-konvexer Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis und gibt es eine \mathfrak{R} ausschöpfende Folge $\mathfrak{B}_1, \dots \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3 \subset \dots$ von in bezug auf \mathfrak{R} konvexen Bereichen, die alle holomorph vollständigen Räume sind, so ist \mathfrak{R} selbst ein holomorph vollständiger Raum.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Axiome 2, 3 des holomorph vollständigen Raumes bei \mathfrak{R} erfüllt sind. Da die \mathfrak{B}_r den Raum \mathfrak{R} ausschöpfen, gibt es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in \mathfrak{R}$ ein \mathfrak{B}_r , so daß $x, y \in \mathfrak{B}_r$ ist. Gilt $f(x) \neq f(y)$, f holomorph in \mathfrak{B}_r , so existiert nach Satz 6 eine Folge von in $\mathfrak{B}_r, r > r_0$, holomorphen Funktionen f_r , die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g konvergiert, derart, daß $|f_{r+1}(x) - f_r(x)|, |f_{r+1}(y) - f_r(y)| < \varepsilon_r$ ist. Sind die ε_r hinreichend klein gewählt, so ist sicher $g(x) \neq g(y)$. Also ist Axiom 2 in \mathfrak{R} erfüllt. Daß auch Axiom 3 erfüllt ist, folgt mit der gleichen Überlegung unter Verwendung von Satz 3.

§ 2. Abzählbarkeit der Topologie K -vollständiger Räume.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß ein K -vollständiger Raum \mathfrak{R} eine abzählbare Topologie besitzt (Satz 8). Offenbar ist diese Aussage bewiesen, wenn sie für jede zusammenhängende Komponente von \mathfrak{R} nachgewiesen ist. Wir dürfen darum beim Beweise von Satz 8 voraussetzen, daß \mathfrak{R} zusammenhängend ist.

²³⁾ Vgl. H. BEHNKE und P. THULLEN, loc. cit.^{10b)}, § 4, Satz 32.

Hilfssatz 1. *Gibt es eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\tau: z_1 = f_1(x), \dots, z_m = f_m(x)$ von \mathfrak{R} in den komplexen Zahlenraum der Veränderlichen z_1, \dots, z_m , so besitzt \mathfrak{R} eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß es eine abzählbare überall dichte Punktmenge in \mathfrak{R} gibt. Sei n die Dimension von \mathfrak{R} . Da τ nirgends entartet abbildet, ist $m \geq n$, und es gibt n Funktionen $f_{i_1} \dots f_{i_n}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, $i_p = 1 \dots m$, die eine offene Menge $\mathring{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{R}$ nirgends entartet abbilden. Nach einem Satz von R. REMMERT²⁶⁾ ist die Entartungsmenge dieser Abbildung λ eine höchstens $n - 1$ -dimensionale analytische Menge. $\mathring{\mathfrak{R}}$ liegt also überall dicht in \mathfrak{R} .

In $\mathring{\mathfrak{R}}$ ist die Menge K der nichtuniformisierbaren Punkte *dünn* von der Ordnung 2, d. h. in einer Umgebung U jedes Punktes von $\mathring{\mathfrak{R}}$ ist $U \cap K$ in einer höchstens $n - 2$ -dimensionalen analytischen Menge enthalten. Die Nullstellen der Funktionaldeterminante von λ bilden eine analytische Menge A in $\mathring{\mathfrak{R}} - K$. $\check{\mathfrak{R}} = \mathring{\mathfrak{R}} - A - K$ liegt dicht in $\mathring{\mathfrak{R}}$ und damit auch dicht in \mathfrak{R} .

Für jedes $x \in \check{\mathfrak{R}}$ besteht $\lambda^{-1}(\lambda(x)) \cap \check{\mathfrak{R}}$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten, wie sich aus folgender Überlegung ergibt. $\check{\mathfrak{R}}$ wird durch λ lokal-topologisch in den C^n abgebildet. Man kann deshalb zwei Punkte $x, y \in \check{\mathfrak{R}}$ stets durch eine Kurve $\mathfrak{C}_x^y \subset \check{\mathfrak{R}}$ verbinden, derart, daß $\lambda(\mathfrak{C}_x^y)$ ein Streckenzug S des C^n ist, dessen Ecken höchstens mit Ausnahme des Anfangs- und Endpunktes von S rationale Koordinaten haben. Ist dann $x \in \check{\mathfrak{R}}$ ein fester Punkt, so ist jeder Punkt $y \in \check{\mathfrak{R}}$, $\lambda(x) = \lambda(y)$, durch einen Streckenzug $\lambda(\mathfrak{C}_x^y)$ eindeutig bestimmt. Da es im C^n nur abzählbar viele solcher Streckenzüge gibt, ist die Menge $\lambda^{-1}(\lambda(x)) \cap \check{\mathfrak{R}}$ abzählbar.

Deshalb ist auch die Menge $T: \{x \in \check{\mathfrak{R}}, \lambda(x) \text{ rational}\}$ abzählbar. Ferner liegt T dicht in $\check{\mathfrak{R}}$ und damit auch dicht in \mathfrak{R} .

$\{H_v^x\}$, $v = 1, 2, 3, \dots$, sei nun die Menge der Kugeln mit rationalen Radien r_v um einen beliebigen Punkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^m$. Es sei V_v^x die zusammenhängende Komponente von $\tau^{-1}(H_v^{x(x)})$, die x enthält. Wir zeigen, daß $\{V_v^x\}$, $x \in T$ eine Umgebungsbasis von \mathfrak{R} ist. Ist nämlich x ein Punkt einer offenen Menge $G \subset \mathfrak{R}$, so gibt es, da τ in x nicht entartet ist, eine in G relativ kompakte Umgebung $W(x)$, derart, daß $\tau(x) \neq \tau(W - W)$ gilt. $\tau(W - W)$ hat als abgeschlossene Menge einen endlichen Abstand d von $\tau(x)$. Sei U die x enthaltende zusammenhängende Komponente des Bereiches der Punkte y von W , deren Bildpunkte $\tau(y)$ von $\tau(x)$ einen geringeren Abstand als $\frac{d}{3}$ haben. Ist dann $x \in U \cap T$ und V_v^x eine Umgebung, die zu einer Hyperkugel H_v^x mit einem Radius $\frac{d}{3} < r_v < \frac{d}{2}$ gehört, so gilt $x \in V_v^x \subset G$. Jede offene Menge $G \in \mathfrak{R}$ ist also Vereinigung von Umgebungen V_v^x . Da ferner $\{V_v^x\}$ abzählbar ist, ist gezeigt, daß $\{V_v^x\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von \mathfrak{R} ist.

²⁶⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.¹⁹⁾ und ²⁵⁾.

Wir zeigen nun zwei an sich interessante Hilfssätze. Zunächst sei jedoch der Begriff der Konvergenzhülle²⁷⁾ eingeführt.

Def. 9. Unter der Konvergenzhülle $\hat{\mathfrak{B}}$ einer zusammenhängenden offenen Menge \mathfrak{B} eines komplexen Raumes \mathfrak{R} sei die Vereinigung aller offenen zusammenhängenden Mengen $^*\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}$ verstanden, für die folgendes gilt:

Ist f_v eine beliebige Folge von in $^*\mathfrak{B}$ holomorphen Funktionen, die im Innern von \mathfrak{B} gleichmäßig gegen eine holomorphe Grenzfunktion f konvergiert, so konvergiert f_v auch gleichmäßig im Innern von $^*\mathfrak{B}$.

Offenbar ist $\hat{\mathfrak{B}}$ der größte Bereich in \mathfrak{R} mit der Eigenschaft der Gebiete $^*\mathfrak{B}$.

Hilfssatz 2. Sind \mathfrak{R} ein komplexer Raum, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ eine zusammenhängende offene Menge, die nur uniformisierbare Punkte von \mathfrak{R} enthält und deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt, so ein positiv definites Riemannsches Volumenelement in \mathfrak{B} und ferner $\{f\}$ die Familie der in $\hat{\mathfrak{B}}$ holomorphen Funktionen, die in \mathfrak{B} in bezug auf do quadratintegrabel sind ($(f, f)_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{B}} f \bar{f} do < \infty$), so gilt:

1. Jede Menge von holomorphen Funktionen $f \in \{f\}$, $(f, f)_{\mathfrak{B}} < M$ bildet eine normale Familie in $\hat{\mathfrak{B}}$, deren Grenzfunktionen in $\{f\}$ enthalten sind.

2. Es gibt ein Orthonormalsystem $\{g_v\}$, $v = 1, 2, \dots$, $(g_v, g_\mu) = \int_{\mathfrak{B}} g_v \bar{g}_\mu do = \delta_v^\mu$, von Funktionen aus $\{f\}$, derart, daß sich jede Funktion $f \in \{f\}$ in eine im Innern von $\hat{\mathfrak{B}}$ gleichmäßig konvergierende Summe $\sum c_v g_v$ entwickeln läßt.

Wir nennen ein solches Orthonormalsystem vollständig.

Hilfssatz 3. Zu holomorphen Funktionen f_1, \dots, f_m eines komplexen Raumes \mathfrak{R} , die eine Umgebung U eines Punktes $x \in \mathfrak{R}$ nirgends entartet abbilden, gibt es eine positive Zahl ε , derart, daß alle in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen g_1, \dots, g_m mit $|f_v - g_v| < \varepsilon$ in U ebenfalls eine (von g , nicht abhängende) Umgebung von x nirgends entartet abbilden.

Beweis von Hilfssatz 2. Wir zeigen zunächst 1. Sei x ein beliebiger Punkt von \mathfrak{B} . Nach Voraussetzung gibt es um x eine Umgebung U , die durch eine eindeutige Abbildung $\tau: U \rightarrow Z$ auf einen Polyzylinder $Z: \{|z_v| < 1 + \varepsilon, v = 1, \dots, n, \varepsilon > 0\}$ des C^n abbildbar ist. Nach einem Satz von OSGOOD²⁸⁾ hat eine solche Abbildung eine nirgends verschwindende Funktionaldeterminante. Deshalb ist das durch τ in natürlicher Weise nach Z übertragene Volumenelement $do' = do \tau^{-1}$ in Z positiv definit. Bezeichnet do^* das euklidische Volumenelement, so gibt es daher eine positive Zahl a , derart, daß im Einheitspolyzylinder $Z: \{|z_v| < 1\}$:

$$ado^* < do'$$

gilt. Ist nun für eine Funktion $f \in \{f\}$ das Quadratintegral $(f, f)_{\mathfrak{B}} < M$, so gilt in Z in bezug auf do^* darum sicher $(f \tau^{-1}, f \tau^{-1})_Z < \frac{M}{a}$. Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Orthogonalfunktionen²⁹⁾ ist die Familie der in Z

²⁷⁾ Die Konvergenzhülle eines Gebietes \mathfrak{G} im C^n ist der kleinste \mathfrak{G} umfassende Runge'sche Bereich. Vgl. dazu auch den Begriff der K -konvexen Hülle [H. BEHNKE und P. THULLEN, loc. cit.^{10b)}, S. 76].

²⁸⁾ Vgl. OSGOOD, Lb. II, S. 117 (Satz 5).

²⁹⁾ Vgl. S. BERGMAN: The kernel function and conformal mapping. (Amer. Math. Soc. 1950.)

holomorphen Funktionen g , $(g, g)_Z < \frac{M}{a}$, normal. Eine einfache Überlegung ergibt daraus sofort, daß die Familie \mathfrak{F} der holomorphen Funktionen $f \in \{f\}$, $(f, f) < M$, in \mathfrak{B} normal ist. Aus Definition 9 entnimmt man dann, daß gleiches auch für \mathfrak{F} in bezug auf \mathfrak{B} richtig ist.

Konvergiert eine Folge $f_n \in \mathfrak{F}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f , so gilt, wie man unmittelbar sieht, $(f, f)_Z < M$, also $f \in \mathfrak{F}$. Damit ist 1. bewiesen.

Um 2. zu zeigen, beachten wir, daß die Menge O der Orthogonalsysteme von Funktionen $\{f\}$ durch die mengentheoretische Inklusion halbgeordnet wird. Jede durch diese Halbordnung lineargeordnete Teilmenge $\{S_j\} \subset O$ (Kette) besitzt in O eine obere Grenze $S_0 = \bigcup S_j$. Damit sind in O die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Nach dem Zornschen Lemma gibt es daher in O ein maximales Orthonormalsystem S : Jede Funktion $f \in \{f\}$, die zu allen Funktionen von S orthogonal ist, muß in $\hat{\mathfrak{B}}$ identisch verschwinden. Wir zeigen, daß S nur abzählbar viele holomorphe Funktionen enthält. Sei x_v , $v = 1, 2, 3, \dots$, eine in einer Umgebung $U \subset \mathfrak{B}$ eines Punktes $x \in \mathfrak{B}$ überall dichte, abzählbare Punktmenge. Wir zeigen, daß die Menge A_v^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, der holomorphen Funktionen $g \in S$ mit $|g(x_v)| \geq \frac{1}{k}$ endlich ist. Wäre nämlich g_μ , $\mu = 1, 2, 3, \dots$, eine unendliche Folge verschiedener Funktionen aus S mit $|g_\mu(x_v)| \geq \frac{1}{k}$, so würde $\sum \frac{1}{\mu} e^{i\theta_\mu} g_\mu$, $g_\mu(x_v) e^{i\theta_\mu} > 0$, in x_v nicht konvergieren. Andererseits konvergiert aber $\sum \frac{1}{\mu} e^{i\theta_\mu} g_\mu$ gleichmäßig im Innern von \mathfrak{B} , da $\left(\sum \frac{1}{\mu} e^{i\theta_\mu} g_\mu, \sum \frac{1}{\mu} e^{i\theta_\mu} g_\mu \right) < \sum \frac{1}{\mu^2} < \infty$ ist. $\bigcup_{k,v=1}^{\infty} A_v^k$ ist also abzählbar. Da eine holomorphe Funktion, die auf der in U dichten Menge $\{x_v\}$ verschwindet, in \mathfrak{B} identisch null sein muß, folgt, daß $\bigcup A_v^k$ alle Funktionen von S enthält, und unsere Behauptung ist bewiesen. Bezeichnen wir nun die Funktionen von S mit g_v , $v = 1, 2, 3, \dots$! Ist dann f eine beliebige Funktion aus $\{f\}$, so ist $\sum_{v=1}^{\infty} c_v g_v$, $c_v = (f, g_v)$, eine gleichmäßig konvergierende Entwicklung von f . Damit ist auch die Behauptung 2. bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 3. Wäre der Hilfssatz falsch, so gäbe es eine Folge von in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen $g_\mu^{(v)}$, $\mu = 1 \dots k$, $v = 1, 2, 3, \dots$, und eine Folge von Umgebungen $V_v(x) \subset U$, $V_v \subset V_{v+1}$, derart, daß

1. die $g_\mu^{(v)}$ in U gleichmäßig gegen die f_μ konvergieren,
2. in jedem V_v ein Punkt x_v enthalten ist, so daß die Menge $\{y \in \mathfrak{R}, g_\mu^{(v)}(y) = g_\mu^{(v)}(x_v)\}$ eine wenigstens eindimensionale irreduzible Komponente A_v enthält, die durch x_v verläuft,

3. $\bigcap V_v = x$ ist.

Ist dabei V^1 so klein gewählt, daß V^1 relativ-kompakt im Wirkungsbereich W eines lokalen Koordinatensystems von \mathfrak{R} enthalten ist, so muß A_v an den Rand von V^1 in W herangehen. $\bar{V}^1 - V^1$ hat deshalb mindestens einen Punkt mit A_v gemeinsam. Da die $g_\mu^{(v)}$ in U gleichmäßig gegen die f_μ und die x_v gegen x konvergieren, muß auf $\bar{V}^1 - V^1$ auch ein Punkt von $A = \{y \in \mathfrak{R}, f_\mu(y)$

$= f_\mu(x)$ liegen. Andererseits ist die Abbildung $z_1 = f_1(y) \dots z_k = f_k(y)$ in x nicht entartet. V^1 kann also so klein gewählt werden, daß auf $V^1 - V^1$ kein Punkt von A liegt. Widerspruch!

Die Hilfssätze werden nun benutzt um folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Satz 8. *Die Topologie eines K -vollständigen Raumes besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß \mathfrak{R} zusammenhängend ist. Es sei n die Dimension von \mathfrak{R} . Nach Voraussetzung gibt es in \mathfrak{R} endlich viele holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_m , die eine nicht entartete Abbildung τ einer Umgebung eines Punktes von \mathfrak{R} vermitteln. Nach einem Satz von R. REMMERT³⁰⁾ ist dann die Entartungsmenge von τ eine höchstens $n - 1$ -dimensionale analytische Menge A in \mathfrak{R} . Hilfssatz 1 besagt, daß $\mathfrak{R} - A$ ein Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis ist. Die Menge K der nichtuniformisierbaren Punkte von \mathfrak{R} ist abgeschlossen und dünn von der Ordnung 2. $\check{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} - A - K$ ist deshalb eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Umgebungsbasis.

Wir können \mathfrak{R} durch eine Folge von relativ-kompakten, zusammenhängenden Gebieten $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}_3 \dots \subset \check{\mathfrak{R}}$ ausschöpfen. Den weiteren Beweis des Satzes 8 stützen wir auf folgenden später zu beweisenden

Hilfssatz 4. *Die Folge der Gebiete $\hat{\mathfrak{G}}$, schöpft \mathfrak{R} aus.*

Es werde nun angenommen, daß die Topologie von \mathfrak{R} keine abzählbare Basis hat. Sicher gibt es dann ein \mathfrak{G}_v , derart, daß $\hat{\mathfrak{G}}_v$ keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. In \mathfrak{G}_{v+1} kann nach einem Satz von H. WHITNEY³¹⁾ eine positiv definite Riemannsche Metrik eingeführt werden. Es existiert dann in \mathfrak{G}_{v+1} ein positiv definites Volumenelement do . \mathfrak{G}_v hat in bezug auf do einen endlichen Inhalt. Alle in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen sind in \mathfrak{G}_v beschränkt, also sicher dort in bezug auf do quadratintegrabel ($(f, f) = \int f \bar{f} do < \infty$). Somit gilt:

(1) *Die Menge $\{f\}$ der in \mathfrak{G}_v quadratintegrablen und der in $\hat{\mathfrak{G}}_v$ holomorphen Funktionen umfaßt die Menge der in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen.*

Sei $S: \{g_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3 \dots$, ein vollständiges Orthonormalsystem für $\{f\}$. Die Gesamtheit der Funktionensysteme $\mathfrak{F}^k: h_\mu = \sum_{\nu=1}^n c_\nu^{(\mu)} g_\nu$, $\mu = 1 \dots k$, $s, k = 1, 2, 3 \dots$, $c_\nu^{(\mu)}$ rational, ist abzählbar. Da sich jedes System von k holomorphen Funktionen aus $\{f\}$ durch Systeme \mathfrak{F}^k in $\hat{\mathfrak{G}}_v$ gleichmäßig approximieren läßt, gilt wegen (1) und Hilfssatz 3:

(2) *Zu jedem Punkt $x \in \hat{\mathfrak{G}}_v$ gibt es ein Funktionensystem \mathfrak{F}^k , das eine nirgends entartete Abbildung einer Umgebung von x vermittelt.*

³⁰⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.²⁸⁾.

³¹⁾ H. WHITNEY: Differentiable manifolds in euclidian space. Proc. Acad. USA 21, 462—464. Die Existenz einer Riemannschen Metrik ergibt sich unmittelbar aus der Einbettbarkeit in den euklidischen Raum.

Wir dürfen annehmen, daß $\tilde{A} = A \cap \hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ in $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ überabzählbar viele irreduzible Komponenten zerfällt. Anderenfalls gäbe es entweder eine irreduzible Komponente A_1 von \tilde{A} , derart, daß der durch A_1 erzeugte komplexe Raum $*A_1$ keine abzählbare Topologie besitzt, oder \tilde{A} wäre einem komplexen Raum $*A$ mit abzählbarer Umgebungsbasis zugeordnet. Im ersten Fall könnten wir aus der Negation von Satz 8 für einen komplexen Raum $*A_1$ einen Widerspruch herleiten, dessen Dimension kleiner als n ist. Der zweite Fall kann nicht eintreten, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt. Es sei $\{*U_r\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $*A$, die aus relativkompakten Umgebungen $*U_r$ von $*A$ besteht. Jedem $*U_r \subset *A$ entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise eine in \tilde{A} offene Menge $U_r \subset \tilde{A}$. Alle U_r sind in bezug auf $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ relativ-kompakt. Es gibt deshalb in $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ zu jedem U_r eine relativ-kompakte offene Menge $V_r \supset U_r$. Sei $\{V_\mu\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von V_r . Ist dann $\{W_\mu\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0} - \tilde{A}$, so ist $\{W_\mu\} \cup \{V_\mu\}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen von $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme, daß die Topologie von $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ überabzählbar ist.

\tilde{A} zerfällt also in $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ in überabzählbar viele irreduzible Bestandteile $A_j, j \in I$ (I eine Indexmenge). Nun ist aber die Menge der \mathfrak{F}^* abzählbar. Es muß also zu jeder Punktmenge $\{x_j\}, x_j \in A_j, j \in I$, wenigstens ein Funktionensystem \mathfrak{F}^* geben, das eine nirgends entartete Abbildung einer Umgebung $U = \bigcup U_i(x_i)$ (U_i zusammenhängend) einer überabzählbaren Teilmenge $\{x_i\}, i \in I \subset I$, der x_j vermittelt. $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ ist zusammenhängend. Deshalb können wir jedes x_i mit einem festen Punkt $y \in \hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ durch eine Kurve $\mathfrak{C}_i \subset \hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$ verbinden, die mit Ausnahme ihres Endpunktes x_i in $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0} - \bigcup A_j$ enthalten ist. Ist dann $V_i \subset (\hat{\mathfrak{G}}_{r_0} - \bigcup A_j)$ eine zusammenhängende Umgebung von $\mathfrak{C}_i - U$, so ist $\mathfrak{S} = \bigcup V_j \cup U$ ein zusammenhängender komplexer Raum mit überabzählbarer Topologie, denn $\bigcup A_j$ zerfällt in \mathfrak{S} in überabzählbar viele irreduzible Komponenten. Das stünde mit einem bekannten Satz über die Zerlegung von analytischen Mengen in ihre irreduziblen Bestandteile im Widerspruch, wenn \mathfrak{S} eine abzählbare Umgebungsbasis besäße.

Die durch das Funktionensystem $(\mathfrak{F}^*, f_1, \dots, f_m)$ gegebene Abbildung ist in \mathfrak{S} nirgends entartet. Nach Hilfssatz 1 muß darum \mathfrak{S} eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen. Widerspruch! Damit ist Satz 8 bewiesen.

Wir holen nun den Beweis von Hilfssatz 4 nach:

Wir haben zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $x \in A \cup K$ ein $\hat{\mathfrak{G}}_{r_0}, x \in \hat{\mathfrak{G}}_{r_0}$, gibt. Um x gibt es in \mathfrak{R} eine Umgebung U , die durch eine umkehrbar eindeutige holomorphe Abbildung $\lambda: U \rightarrow \mathfrak{A}$ auf eine analytisch-verzweigte Überlagerung $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ der Einheitshyperkugel Z bezogen werden kann. U kann ferner so gewählt werden, daß $(A \cup K) \cap U$ in einer in U analytischen Menge $B \neq U$ enthalten ist. $\Phi \lambda(B) = \tilde{B}$ ist eine höchstens $n-1$ -dimensionale analytische Menge in Z . Wir dürfen annehmen, daß $\Phi \lambda(x)$ Mittelpunkt von Z ist. Durch geeignete unitäre Drehung erreicht man, daß die komplex ein-

dimensionale Ebene $z_2 = \dots = z_n = 0$ \tilde{B} nur in isolierten Punkten schneidet. Es gibt dann Zahlen $0 < \varepsilon, 0 < \delta < \delta$, derart, daß die Umgebung $\tilde{V} : \{z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n \leq \varepsilon, \delta \leq |z_1| \leq \delta\}$ in Z liegt und keine Punkte von \tilde{B} enthält. $V : \{\Phi \lambda(x) \in \tilde{V}, x \in U\}$ enthält deshalb keinen Punkt von $A \cup K$. Es gibt ein $\mathfrak{G}_v \subset V$. Setzen wir $\tilde{W} = \{z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n < \varepsilon, |z_1| < \delta\}$ und $W = \{x \in U, \Phi \lambda(x) \in \tilde{W}\}$, so nimmt jede in W holomorphe Funktion ihr Maximum auf V an³²). Jede Folge von in \mathfrak{G}_v holomorphen Funktionen, die gleichmäßig auf V konvergiert, konvergiert deshalb auch gleichmäßig im Innern von W . Daher gilt $W \subset \mathfrak{G}_v$ und — da $x \in W \rightarrow x \in \mathfrak{G}_v$. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

§ 3. Äquivalenz der K -vollständigen Räume und der Riemannschen Gebiete über dem C^n .

Wir zeigen, daß jeder K -vollständige Raum zu einem Riemannschen Gebiet über dem C^n analytisch äquivalent ist. Seien zunächst einige Vorbereitungen gemacht! Es werde definiert:

1. \mathfrak{G} sei ein beschränktes Gebiet des projektiven Raumes P^n der inhomogen Veränderlichen $z_1 \dots z_n$.

2. $A \subset \mathfrak{G}$ sei eine analytische Menge in \mathfrak{G} .

3. P^{n-1} sei der $n - 1$ -dimensionale projektive Raum der komplexen Richtungen des $C^n = P^n - \{\infty\}$ ($\{\infty\}$ = unendlichferne Punkte). Jedem $x \in P^{n-1}$ entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise eine Schar $\tau(x)$ von parallelen komplexen Geraden im C^n . $\tau_x(x)$ sei die durch $z = (z_1 \dots z_n)$ verlaufende Gerade dieser Schar.

4. Es sei M die Menge der Punkte $x \in P^{n-1}$, zu denen es einen Bereich $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ und eine Gerade $g \in \tau(x)$ gibt, derart, daß $\mathfrak{B} \cap g$ nicht leer ist und daß $\mathfrak{B} \cap g \subset \mathfrak{B} \cap A$ gilt.

Wir zeigen folgenden für die weiteren Betrachtungen grundlegenden Satz:

Satz 9. Die Menge $M \subset P^{n-1}$ überdeckt keine offene Menge von P^{n-1} .

Beweis. Es werde auf folgende Weise eine Menge B im Raume $\mathfrak{G} \times P^{n-1}$ konstruiert:

Ein Punkt (z, x) , $z \in \mathfrak{G}$, $x \in P^{n-1}$, liege genau dann in B , wenn es eine Umgebung $U(z) \subset \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $U \cap \tau_x(x) \subset U \cap A$ gilt. Wir zeigen:

(1) B ist eine analytische Menge in $\mathfrak{G} \times P^{n-1}$.

Sei (z^0, x^0) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G} \times P^{n-1}$. Können wir beweisen, daß es immer eine Umgebung $U \times V$ von (z^0, x^0) gibt, in der B das gleichzeitige Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen ist, so ist unsere Behauptung bewiesen. Wir wählen für U einen Polyzylinder $|z_v - z_v^0| < d$ um z^0 und für V eine Umgebung von x^0 in P^{n-1} , die im Wirkungsbereich von Lokalkoordinaten $w_1 \dots w_{n-1}, \tau_0(w_1 \dots w_{n-1}) = g : \{z_v = w_v z_n, v = 1 \dots n - 1\}$, $V : \{|w_v| < r\}$, bei entsprechender Nummerierung der z_v enthalten ist. U sei ferner so klein gewählt, daß $*U : \{|z_v - z_v^0| < 2d\}$ relativ kompakt in \mathfrak{G} liegt und daß $A \cap *U$ in $*U$ simultanes Nullstellengebilde von endlich vielen holomorphen Funktionen $f_1 \dots f_k$ ist. Offenbar liegt ein Punkt $(z, x) \in U \times V$ genau dann in B , wenn $F_v(z, w, t) = f_v(z_1 + w_1 t, \dots$

³²) Das Maximumsprinzip der holomorphen Funktionen auf komplexen Räumen.

$z_{n-1} + w_{n-1}t, z_n + t) \equiv 0$ für $v = 1 \dots k$ und $|t| < \min\left(d, \frac{d}{r}\right)$ ist. $B \cap U \times V$ stimmt also mit den gleichzeitigen Nullstellen der holomorphen Funktionen $F_{t_v}^*(z, w) = F_v(z, w, t_0), v = 1 \dots k, |t_0| < \min\left(d, \frac{d}{r}\right)$ von z, w überein. Damit ist (1) bewiesen.

Wir bilden den durch B erzeugten komplexen Raum $*B$. $*B$ ist durch eine holomorphe Abbildung σ in natürlicher Weise auf B abgebildet. Es werde mit λ die Projektionsabbildung von $\mathfrak{G} \times P^{n-1}$ in \mathfrak{G} und mit κ die Projektionsabbildung von $\mathfrak{G} \times P^{n-1}$ in P^{n-1} bezeichnet. Wir verstehen unter der *Fasermenge* \mathfrak{F}_y der Abbildung $\kappa \sigma$ zu einem Punkt $y \in *B$ die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten der analytischen Menge $(\kappa \sigma)^{-1} \kappa \sigma(y)$, die durch y verlaufen. Es sei nun m die Dimension einer beliebigen zusammenhängenden Komponenten $*B_1$ von $*B$, und $r(y)$ sei die Dimension von $\mathfrak{F}_y, y \in *B_1$. Wir setzen $d = \min r(y)$ und bezeichnen mit $\varrho = m - d$ den *Rang der Abbildung* $\kappa \sigma$ in $*B_1$. Es gilt folgende Aussage:

(2) *Der Rang ϱ der Abbildung $\kappa \sigma$ von $*B_1$ in P^{n-1} ist kleiner als $n - 1$.*

In der Tat! Angenommen, $*B_1$ wäre eine zusammenhängende Komponente von $*B$, bei der das nicht der Fall ist. Es sei K die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von $*B_1$ und E die in $*B_1 - K$ analytische Menge der Punkte von $*B_1 - K$, in denen die Funktionalmatrix Δ der Abbildung $\kappa \sigma$ einen kleineren Rang als ϱ hat. Wie man leicht sieht, ist E höchstens $m - 1$ -dimensional. Sei nun y ein beliebiger Punkt von $*B_1 - K - E$. Man zeigt leicht, da unter unserer Annahme $\varrho = n - 1$ ist, daß sich in einer Umgebung $W(y)$ so lokale Koordinaten $w_1 \dots w_m, \tau_0(\kappa \sigma(w_1 \dots w_m)) = g: \{z_v = w_v z_n, v = 1 \dots n - 1\}, W: \{|w_v| < d\}$, einführen lassen, daß genau die Punkte mit gleichem $w_1 \dots w_{n-1}$ durch $\kappa \sigma$ in den gleichen Punkt von P^{n-1} geworfen werden. Ferner gibt es in einer Umgebung V von $\kappa \sigma(y)$ -Koordinaten $*w_1 \dots *w_{n-1}, V: \{|w_v^*| < d\}$, derart, daß $\kappa \sigma(w_1 \dots w_m) = (w_1 \dots w_{n-1}) \in P^{n-1}$ ist. Es existiert daher eine holomorphe Abbildung α von V in W , so daß in $V: \kappa \sigma \alpha$ gleich der Identität ist.

Wir konstruieren nun eine holomorphe Abbildung Γ von $V \times P$ in den projektiven Raum P^n der inhomogenen Veränderlichen $z_1 \dots z_n$. P ist dabei die Riemannsche Zahlenkugel mit der inhomogenen Veränderlichen u . Offenbar wird Γ durch die Setzung $\Gamma(x, u) = (z_1 \dots z_{n-1}, u) \in \tau_{\lambda \sigma \alpha(x)}(x)$ eindeutig definiert. Γ hat in $V \times P$ den Rang n , da in den Punkten (x, ∞) von $V \times P$ die Fasermenge $\mathfrak{F}_{(x, \infty)}^{\Gamma}$ von Γ nulldimensional ist. Die Entartungsmenge N von Γ ist darum höchstens $n - 1$ -dimensional²³⁾. In beliebiger Nähe jedes Punktes von $V \times P$ gibt es also Punkte, in denen Γ nicht entartet ist und deshalb offen^{23a)} abbildet. Das Γ -Bild der Punkte $(x, u) \in V \times P, \lambda \sigma \alpha(x) = (z_1 \dots z_{n-1}, u)$, ist gleich $(z_1 \dots z_{n-1}, u) \in A$. Nach Konstruktion der Abbildung Γ wird daher eine offene Umgebung U dieser Punkte in A abgebildet. Da es eine offene Teilmenge von U gibt, die auf eine offene Menge des P^n abgebildet wird, haben wir einen Widerspruch zu der Voraussetzung gewonnen,

²³⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.²⁵⁾.

^{23a)} Vgl. H. GRAUERT und R. REMMERT, loc. cit.¹⁴⁾.

daß A eine höchstens $n - 1$ -dimensionale analytische Menge in \mathfrak{E} ist. Damit ist (2) bewiesen.

Der Beweis von Satz 9 vervollständigt sich, wenn wir noch folgenden Satz heranziehen:

Satz 10. \mathfrak{R} sei ein komplexer Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis, der durch eine holomorphe Abbildung τ in einen n -dimensionalen komplexen Raum \mathfrak{E} abgebildet wird. Auf jeder zusammenhängenden Komponente \mathfrak{R}_1 von \mathfrak{R} sei der Rang von τ kleiner als n . Dann überdeckt $\tau(\mathfrak{R})$ keine offene Menge von \mathfrak{E} .

In der Tat ist Satz 9 bewiesen, wenn wir $\mathfrak{R} = *B$, $\mathfrak{E} = P^{n-1}$ und $\tau = \kappa \sigma$ setzen, da die Menge M mit der Menge $\kappa \sigma(*B)$ in P^{n-1} übereinstimmt.

Beweis von Satz 10. Wir zeigen, daß es eine Umgebung U eines jeden Punktes $x \in \mathfrak{R}$ gibt, derart, daß $\tau(U)$ in \mathfrak{E} nirgends dicht liegt. Für U werde eine relativkompakte offene Menge in einer m -dimensionalen zusammenhängenden Komponente \mathfrak{R}_1 von \mathfrak{E} gewählt. $\tau(U)$ ist dann abgeschlossen in \mathfrak{E} . $V \supset U$ sei eine relativkompakte offene Menge von \mathfrak{R}_1 . Wir dürfen annehmen, daß U, V so klein gewählt sind, daß τ die Menge V in den Wirkungsbereich W eines lokalen Koordinatensystems (W, Ψ, \mathfrak{A}) abbildet und daß die Menge K der nichtuniformisierbaren Punkte von V in einer $m - 1$ -dimensionalen analytischen Menge B_1 von V enthalten ist. Dabei ist $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ eine analytisch-verzweigte Überlagerung eines Gebietes des C^n . Es sei $\Phi = \Phi \Psi$. Die Funktionalmatrix Δ der Abbildung $\Phi \tau$ von $V - K$ in den C^n hat den gleichen maximalen Rang ϱ wie τ . Die Punkte von $V - K$, in denen Δ einen kleineren Rang als ϱ hat, bilden eine höchstens $m - 1$ -dimensionale analytische Menge in $V - K$, die sich nach einem Satz von R. REMMERT³⁴⁾ zu einer in V analytischen Menge B_2 fortsetzen läßt. Man kann V deshalb sogar so klein wählen, daß B_2 in V in einer $m - 1$ -dimensionalen analytischen Menge B_2 enthalten ist. Der Rang der Abbildung $\tau \sigma$ (mit $\sigma: *A \rightarrow A$) von dem durch $A = B_1 \cup B_2$ erzeugten komplexen Raum $*A$ in \mathfrak{E} ist sicher kleiner als n . Denn nach einem Satz von R. REMMERT³⁵⁾ bilden die Punkte von $*A$, in denen der lokale Rang ϱ_x der Abbildung $\tau \sigma$ kleiner als ihr maximaler Rang ϱ ist, eine niederdimensionale Menge in $*A$. In beliebiger Nähe eines jeden Punktes $y_0 \in *A$ gibt es also wenigstens einen Punkt y , wo $\varrho_y = \varrho$ ist. Wählen wir für y_0 dann einen Punkt aus $*A$, dem ein gewöhnlicher Punkt $\sigma(y_0)$ von $A - K$ entspricht, so ist die Fasermenge $\mathfrak{F}_y^\tau = \sigma^{-1}(\mathfrak{F}_{\sigma(y)}^\tau \cap A)$ von $\tau \sigma$ in einer Umgebung von y_0 wenigstens $m - 1 - \varrho$ -dimensional. Somit gilt $\varrho < n$. Machen wir die Induktionsvoraussetzung, daß unser Satz schon für komplexe Räume $*A$ von kleinerer Dimension als m bewiesen ist, so ist $\tau \sigma(*A \cap U)$ eine in \mathfrak{E} nirgends dichte Menge, wenn $*A \cap U$ die Menge $\{x \in *A, \sigma(x) \in U\}$ bezeichnet.

Ist nun x ein Punkt aus $V - A$, so gibt es eine Umgebung $W(x) \subset V - A$, in deren Nähe sich Koordinaten $w_1 \dots w_m$, $W: \{|w_i| < \delta\}$, so einführen lassen,

³⁴⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.¹⁹⁾. Satz über die Nullstellengebilde der Funktional-determinanten holomorpher Abbildungen.

³⁵⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.¹⁹⁾. Der Satz lautet: Sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{E}$ komplexe Räume und bildet τ den Raum \mathfrak{R} holomorph in \mathfrak{E} ab, so bilden die Punkte x von \mathfrak{R} , in denen der lokale Rang $\varrho_x < k$ (k fest) ist, eine analytische Menge von \mathfrak{R} .

daß durch $\Phi \tau$ genau die Punkte mit gleichem $w_1 \dots w_\ell$ auf denselben Punkt des C^n abgebildet werden. Die komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} der Punkte $w_{\ell+1} \dots w_m = 0$ von W wird dann durch $\Phi \tau$ auf eine ρ -dimensionale analytische Menge B eines Gebietes des C^n eineindeutig abgebildet. $\Phi^{-1}(B)$ ist eine höchstens $n - 1$ -dimensionale analytische Menge in einer offenen Menge von \mathfrak{E} , die die Punkte $\tau(\mathfrak{M})$ enthält. Da $\tau(\mathfrak{M}) = \tau(W)$ gilt, ist in W eine Umgebung von x gefunden, die durch τ auf eine nirgends dichte Menge von \mathfrak{E} abgebildet wird. Da $V - A$ Vereinigung von abzählbar vielen solcher Umgebungen W , ist und die Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen keine offene Menge überdeckt, enthält $\bigcup \tau(W_v) \cup \tau \sigma(*A \cap \bar{U})$ keine offene Menge von \mathfrak{E} . Das gleiche gilt a fortiori für $\tau(\bar{U})$. Da überdies $\tau(\bar{U})$ abgeschlossen ist, ist $\tau(\bar{U})$ und damit $\tau(U)$ in \mathfrak{E} nirgends dicht.

\mathfrak{R} hat nach Voraussetzung eine abzählbare Umgebungsbasis. Wir können deshalb \mathfrak{R} durch abzählbar viele Umgebungen U , ausschöpfen, derart, daß $\tau(U_v)$ in \mathfrak{E} nirgends dicht liegt. Das ergibt sofort, daß $\tau(\mathfrak{R})$ keine offene Menge von \mathfrak{E} enthält.

Wir zeigen jetzt eine dem Satz 9 entsprechende Aussage über Abbildungen durch holomorphe Funktionen:

Satz 11. *Es sei \mathfrak{R} ein n -dimensionaler komplexer Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis, es seien $f_1 \dots f_k$, $k \geq n$, endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen, die eine nirgends entartete Abbildung τ von \mathfrak{R} in den C^k vermitteln. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und komplexen Zahlen $a_{v\mu}$, $v = 1 \dots n$, $\mu = 1 \dots k$, wenigstens eine Matrix $'a_{v\mu}$, $|'a_{v\mu} - a_{v\mu}| < \varepsilon$, derart, daß die Funktionen $\sum_{\mu=1}^k 'a_{v\mu} f_\mu$ eine nirgends entartete Abbildung von \mathfrak{R} in den C^n vermitteln.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über $k \geq n$. Der Satz ist für $n = k$ richtig. In diesem Falle ist $w_v = \sum 'a_{v\mu} f_\mu$, $v = 1 \dots n$, genau dann eine nirgends entartete Abbildung, wenn $\| 'a_{v\mu} \| \neq 0$ ist. Sei Satz 11 für alle $'k < k$ bewiesen. Wir zeigen dann seine Gültigkeit für k .

Da τ den Raum \mathfrak{R} nirgends entartet abbildet, gibt es nach Satz 1 um jeden Punkt $x \in \mathfrak{R}$ eine Umgebung U , die durch τ eigentlich in eine Hyperkugel H um $\tau(x)$ abgebildet wird. $\tau(U) \cap H$ ist deshalb eine analytische Menge in H , deren Dimension dort gleich n ist.

Sicher gibt es zu $a_{v\mu}$ eine Matrix $'a_{v\mu}$, $|a_{v\mu} - 'a_{v\mu}| < \frac{\varepsilon}{2}$, bei der $\| 'a_{v\mu} \| \neq 0$, $v, \mu = 1 \dots n$, ist. Die Matrix $b_{v\mu} = 'a_{v\mu}$, $v = 1 \dots n$, $\mu = 1 \dots k$, $b_{n+\nu, \mu} = \delta_{\nu\mu}$, $\nu = 1 \dots k - n - 1$, ist dann eine Matrix vom Rang $k - 1$. Durch $c_v = \sum b_{v\mu} w_\mu$, $v = 1 \dots k - 1$, wird daher eine Schar $S(c_v)$ von komplexen Geraden gegeben. Satz 9 besagt, daß es eine Matrix $'b_{v\mu}$, $|b_{v\mu} - 'b_{v\mu}| < \delta$, $v = 1 \dots k - 1$, vom Rang $k - 1$ gibt, derart, daß alle Geraden $'c_v = \sum 'b_{v\mu} w_\mu$ die Menge $\tau(U) \cap H$ nur in isolierten Punkten schneiden. Die Abbildung $*\tau: w_v = g_v = \sum 'b_{v\mu} f_\mu$, $v = 1 \dots k - 1$, bildet dann U nirgends entartet in den C^{k-1} ab. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Zahlen $a_{v\mu}$, $|\tilde{a}_{v\mu} - a_{v\mu}| < \delta$, $v = 1 \dots n$, $\mu = 1 \dots k - 1$, derart, daß $\sum_{\mu=1}^{k-1} \tilde{a}_{v\mu} g_\mu$ eine nirgends entartete Abbildung von U vermittelt. $w_v = \sum 'a_{v\mu} f_\mu$

mit $'a_{\nu\mu} = \sum_{\kappa} \tilde{a}_{\nu\kappa} b_{\kappa\mu}$ ist dann die gesuchte Abbildung von U . Es gilt, wenn δ hinreichend klein gewählt ist: $|'a_{\nu\mu} - a_{\nu\mu}| < \varepsilon$.

Aus Hilfssatz 3 folgt unmittelbar, daß es zu endlich vielen holomorphen Funktionen h_1, \dots, h_k , die einen komplexen Raum \mathfrak{E}^n nirgends entartet abbilden, und zu einer beliebigen kompakten Teilmenge N von \mathfrak{E}^n immer eine positive Zahl ε gibt, derart, daß alle Systeme von k in \mathfrak{E}^n holomorphen Funktionen $'h_i$ mit $|'h_i - h_i| < \varepsilon$ in \mathfrak{E}^n eine Umgebung von N nirgends entartet abbilden. Wir können nun in \mathfrak{R} je eine Folge von Umgebungen U_κ und V_κ , $V_\kappa \subset U_\kappa$, so wählen, daß in jedem U_κ Satz 11 für k richtig ist und daß $\bigcup V_\kappa$ den ganzen Raum \mathfrak{R} überdeckt, und Koeffizienten $a_{\nu\mu}^{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3, \dots$, so bestimmen, daß

$$1. |a_{\nu\mu}^{\kappa+1} - a_{\nu\mu}^{\kappa}| < \varepsilon_\kappa, \quad \sum \varepsilon_\kappa < \varepsilon \text{ ist,}$$

2. $\sum a_{\nu\mu}^{\kappa} f_\mu$ eine nirgends entartete Abbildung einer Umgebung von $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} V_\kappa$ definiert,

3. wenn $|a_{\nu\mu}^{\kappa} - \tilde{a}_{\nu\mu}^{\kappa}| < \varepsilon_\kappa$ gilt, $z_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \tilde{a}_{\nu\mu}^{\kappa} f_\mu$ auch noch eine nirgends entartete Abbildung einer Umgebung von $\bigcup_{\nu=1}^n \bar{V}_\nu$ ist. $'a_{\nu\mu} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} a_{\nu\mu}^{\kappa}$ ist eine Koeffizientenmatrix mit den in Satz 11 verlangten Eigenschaften für \mathfrak{R} . Die Gültigkeit von Satz 11 ist damit für \mathfrak{R} bewiesen.

Satz 12. Ist \mathfrak{R} ein n -dimensionaler K -vollständiger Raum, so gibt es in \mathfrak{R} n holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_n , die eine nirgends entartete Abbildung τ von \mathfrak{R} in den C^n vermitteln.

Beweis. Da \mathfrak{R} nach Satz 8 ein abzählbares Umgebungssystem besitzt, gibt es eine Folge $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_{\nu+1} \supset \mathfrak{B}_\nu$, von relativ kompakt in \mathfrak{R} enthaltenen Bereichen, die \mathfrak{R} ausschöpft. Wegen der K -Vollständigkeit von \mathfrak{R} gibt es zu jedem \mathfrak{B}_ν endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $g_\nu^{(1)} \dots g_\nu^{(n)}$, die \mathfrak{B}_ν nirgends entartet in den C^n abbilden. Nach Satz 11 können wir dann in \mathfrak{B}_ν n in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_\nu^{(1)} \dots f_\nu^{(n)}$ finden, die eine nirgends entartete Abbildung τ^ν von \mathfrak{B}_ν in den C^n vermitteln. Aus Hilfssatz 3 ergibt sich, daß zu \mathfrak{B}_ν eine positive Zahl ε_1 existiert, derart, daß alle in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen $'f_\nu^{(1)}$ mit $|'f_\nu^{(1)} - f_\nu^{(1)}| < \varepsilon_1$ in \mathfrak{B}_ν noch \mathfrak{B}_1 nirgends entartet abbilden. Die Funktionen $f_1^{(1)} \dots f_n^{(1)}, g_1^{(3)} \dots g_n^{(3)}$ vermitteln eine nirgends entartete Abbildung von \mathfrak{B}_3 . Nach Satz 11 gibt es deshalb n Funktionen $f_\nu^{(2)} = \sum a_{\nu\mu} f_\mu^{(1)} + \sum b_{\nu\mu} g_\mu^{(3)}$, $|f_\nu^{(2)} - f_\nu^{(1)}| < \text{Min}(\varepsilon_1, \frac{1}{2})$ in \mathfrak{B}_ν , die eine nirgends entartete Abbildung τ^2 von \mathfrak{B}_3 definieren. Setzen wir dieses Verfahren zur Konstruktion von Abbildungen $\tau^\mu: z_\nu = f_\nu^{(\mu)}(x)$, $\nu = 1 \dots n$, fort, die folgenden Bedingungen genügen:

1. τ^μ ist nirgends entartet in $\mathfrak{B}_{\mu+1}$,

$$2. |f_\nu^{(\mu+1)} - f_\nu^{(\mu)}| < \text{Min}\left(\varepsilon_\mu, \frac{1}{\mu}\right) \text{ in } \mathfrak{B}_{\mu+1},$$

3. $\varepsilon_\mu > 0$ ist so klein, daß alle Funktionen $'f_\nu$ mit $|'f_\nu - f_\nu^{(\mu)}| \leq \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \varepsilon_\nu$ in $\mathfrak{B}_{\mu+1}$

noch eine nirgends entartete Abbildung von \mathfrak{B}_μ vermitteln, so konvergieren die Folgen $f_\nu^{(\mu)}$ mit wachsendem μ gegen Grenzfunktionen f_ν . Die f_ν bilden nach Konstruktion \mathfrak{R} nirgends entartet ab.

Wir konstruieren nun ein zu \mathfrak{R} analytisch äquivalentes Riemannsches Gebiet über dem C^n .

Satz 13. Vermitteln die holomorphen Funktionen f_1, \dots, f_n eine nirgends entartete Abbildung Φ von \mathfrak{R} in den C^n , so ist (\mathfrak{R}, Φ) ein Riemannsches Gebiet über dem C^n .

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R}$ eine Umgebung U gibt, derart, daß (U, Φ) eine analytisch-verzweigte Überlagerung von $\Phi(U)$ ist. Nach Satz 1 gibt es um x eine relativkompakte Umgebung U und um $\Phi(x)$ eine Hyperkugel H , derart, daß Φ die Umgebung U eigentlich in H abbildet. Sei K die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von U . Da Φ nirgends entartet ist, ist die Funktionaldeterminante Δ der Abbildung Φ in $U - K$ nicht identisch Null. Das Nullstellengebilde von Δ , das rein $n-1$ -dimensional ist, läßt sich nach einem Satz von R. REMMERT und K. STEIN³⁶⁾ über die „Fortsetzung von analytischen Mengen“ in die Menge K , die dünn von zweiter Ordnung ist, zu einer analytischen Menge A von U fortsetzen. Es sei U so klein gewählt, daß K in einer in U analytischen Menge A enthalten ist. Setzen wir noch $A = A \cup A'$, so ist nach einem Projektionssatz von R. REMMERT³⁷⁾ $M = \Phi(A)$ eine analytische Menge in H . Man sieht leicht ein, daß

1. $U - \Phi^{-1}(M)$ lokal topologisch auf $H - M$ abgebildet wird,

2. daß es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ gibt, derart, daß $V - \Phi(M)$ zusammenhängend ist.

Ferner sind alle übrigen Forderungen der Definition 1 erfüllt.

Somit ist gezeigt, daß (U, Φ) eine analytisch-verzweigte Überlagerung von H ist. Damit ist Satz 13 bewiesen.

Fassen wir nun die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen in einem Hauptsatz zusammen!

Satz A. Jeder K -vollständige, n -dimensionale komplexe Raum \mathfrak{R} ist zu einem Riemannschen Gebiet über dem C^n analytisch äquivalent. \mathfrak{R} besitzt deshalb eine abzählbare Umgebungsbasis.

§ 4. Äquivalenz der holomorph-konvexen RIEMANNschen Gebiete und der holomorph vollständigen Räume.

Im folgenden wollen wir unter einem Rechteckgebiet R im Raume von n komplexen Veränderlichen $z_r = u_r + i v_r$, $r = 1 \dots n$, ein Gebiet verstehen, das durch Ungleichungen $|u_r| < a_r$, $|v_r| < b_r$ gegeben werden kann. Es gelte:

$$0 < '''a_r < ''a_r < 'a_r < a_r, \quad 0 < ''''b_r < ''b_r < 'b_r < b_r,$$

$$0 < ''''\delta < '''\delta < ''\delta < '\delta < \delta < a_1, \quad 0 < ''''r < ''r < 'r < r < r.$$

Wir definieren:

1. Q_1 bzw. Q_2 sei das Gebiet der Punkte $\{(z_1 \dots z_n) \in R, -a_1 < u_1 < \delta\}$ bzw. der Punkte $\{(z_1 \dots z_n) \in R, -\delta < u_1 < a_1\}$.

³⁶⁾ R. REMMERT und K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263—306 (1953).

³⁷⁾ Vgl. R. REMMERT, loc. cit.¹⁹⁾.

2. D sei das Gebiet $Q_1 \cap Q_2$.

3. \mathfrak{R} sei ein komplexer Raum, der durch eine eigentliche, nirgends entartete, holomorphe Abbildung $\Phi: \mathfrak{R} \rightarrow R$ in R abgebildet ist. Ein Punkt $x \in \mathfrak{R}$ heiße über $\Phi(x)$ gelegen. Unter $\mathfrak{R} \cap D$ sei der Teilraum der Punkte von \mathfrak{R} verstanden, die über D liegen. (Analoges für $\mathfrak{R} \cap Q_i$ u. a.)

Bezeichnet $C: \{|u_r| < c_r, |v_r| < d_r\}$ ein Rechteckgebiet des C^n , so werden wir unter ' C (bzw. " C , " C) das Gebiet $\{|u_r| < 'c_r, |v_r| < 'd_r\}$ (bzw. $\{|u_r| < ''c_r, |v_r| < ''d_r\}$ usw.) verstehen.

Es gilt nun folgender fundamentaler Satz:

Satz 14. (Okasches Heftungslemma)²⁸⁾. Sind $\mathfrak{R} \cap Q_i$ holomorph vollständige Räume und ist auf $\mathfrak{R} \cap D$ eine holomorphe Funktion g gegeben, so gibt es auf jedem $\mathfrak{R} \cap ''''Q_i$, $i = 1, 2$, eine holomorphe Funktion g_i , derart, daß $g_2 - g_1 = g$ auf $\mathfrak{R} \cap ''''D$ ist. Gilt $|g| < M$ auf $\mathfrak{R} \cap 'D$, so lassen sich die g_i zu jeder kompakten Teilmenge $N_i \subset \mathfrak{R} \cap ''''Q_i$ so bestimmen, daß $|g_i(N_i)| < KM$ gilt. K ist dabei unabhängig von g .

Beweis. $\mathfrak{R} \cap D$ ist nach Voraussetzung ein holomorph vollständiger Raum. Es gibt deshalb endlich viele holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_k in $\mathfrak{R} \cap D$, die $\mathfrak{R} \cap 'D$ normal einbetten und deren Betrag in $\mathfrak{R} \cap 'D$ kleiner als $1 - r$ ist. Im Gebiet ' $P: \{(z_1, \dots, z_n) \in 'D, |w_r| < 1 + 'r\}$ des $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_k$ -Raumes ist deshalb die Menge $B: \{(\Phi(x), f_r(x)), x \in \mathfrak{R} \cap 'D\}$ eine normal eingebettete analytische Menge. Bezeichne σ die eindeutige holomorphe Abbildung $(\Phi(x), f_r(x)) \rightarrow x$ von B auf $\mathfrak{R} \cap 'D$ und sei $\hat{g} = g \sigma$! Nach Voraussetzung gilt $|g| < M$ in $\mathfrak{R} \cap 'D$. Daher ist auch $|\hat{g}| < M$ auf B . Wir stützen uns nun auf den von K. OKA und H. CARTAN bewiesenen Fundamentalsatz (vgl. § 1). In unserem Falle gilt: Es gibt ein \hat{q} , $|\hat{q}| < K_0 M$, in ' P , derart, daß $\hat{g} = \hat{q}$ auf $B \cap ''P$ ist. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

1. ' U sei im $\xi, \omega_1, \dots, \omega_k$ -Raum das Gebiet der Punkte $\{|Re \xi| < ''\delta, |Im \xi| < ''b_1, 1 - ''r < |\omega_r| < 1 + ''r\}$.

2. ' S_1 bzw. ' S_2 sei im $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_k$ -Raum das Gebiet $\{-'a_1 < u_1 < -''\delta, (z_1, \dots, z_n) \in 'R, |w_r| < 1 + 'r\}$ bzw. das Gebiet $\{''\delta < u_1 < 'a_1, (z_1, \dots, z_n) \in 'R, |w_r| < 1 + 'r\}$.

Es werde nun im Gebiet ' $P \times ''U$ die Funktion:

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2\pi i (\xi - z_1)(\omega_1 - w_1) \dots (\omega_k - w_k)}$$

betrachtet. $\underline{\lambda}$ hat keine Polstellen auf $(B \cap 'S_1) \times ''U$, da für die Punkte von $B: |w_r| < 1 - ''r$ gilt. Daher erhält man eine Cousin-I-Verteilung in $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i) \times ''U$, wenn man in $(\mathfrak{R} \cap 'D) \times ''U$ die meromorphe Funktion $\lambda = \underline{\lambda} \sigma^{-1}$ und in $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i \cap 'S_i) \times ''U$ die identisch verschwindende Funktion vorgibt. γ_1, γ_2 seien je eine Lösung dieser Cousin-I-Verteilung für $(\mathfrak{R} \cap Q_1) \times ''U$ bzw. für $(\mathfrak{R} \cap Q_2) \times ''U$. Es gilt auf $(\mathfrak{R} \cap 'D) \times ''U$, daß $\gamma_i - \lambda$ holomorph ist.

$\mathfrak{R} \cap 'D$ ist konvex in bezug auf $\mathfrak{R} \cap 'Q_i$. Folglich ist auch $(\mathfrak{R} \cap 'D) \times ''U$ konvex in bezug auf $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i) \times ''U$. Da $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i)$ und damit auch $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i) \times ''U$ holomorph vollständige Räume sind, gilt für $(\mathfrak{R} \cap 'D) \times ''U$ in bezug

²⁸⁾ Vgl. K. OKA, loc. cit.²¹⁾. Der hier in besonderer Terminologie bewiesene Satz ist im wesentlichen das dort bewiesene Heftungslemma.

auf $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i) \times ''U$ der Approximationssatz. Es existieren in $(\mathfrak{R} \cap 'Q_i) \times ''U$ holomorphe Funktionen $\alpha_i(x, \xi, \omega_1 \dots \omega_k)$, derart, daß in $(\mathfrak{R} \cap ''D) \times ''''U$:

$$|\gamma_i - \lambda - \alpha_i| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ beliebig klein positiv})$$

ist. Setzen wir dann $\lambda_i = \gamma_i - \alpha_i$, so ist $|\lambda_i - \lambda| < \varepsilon$ in $(\mathfrak{R} \cap ''D) \times ''''U$ und dort holomorph. Nach dem Cartan-Okaschen Satz gibt es daher unabhängig von der Wahl der Approximationsfunktionen α_i eine Konstante $K_1 > 0$, derart, daß $\hat{\mu}_i = (\lambda_i - \lambda) \sigma$ auf $(B \cap ''''P) \times ''''U$ Spur einer in $''''P \times ''''U$ holomorphen Funktion $\hat{\mu}_i$, $|\hat{\mu}_i| < \varepsilon K_1$, ist. Bilden wir nun in $\mathfrak{R} \cap ''''Q_i$:

$$g_i^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_i} d\xi \int_{|\omega_j|=1} \dots \int \lambda_i(x, \xi, \omega_1 \dots \omega_k) \hat{g}(\xi, z_2(x) \dots z_n(x), \omega_1 \dots \omega_k) d\omega_1 \dots d\omega_k,$$

wobei wir mit $z_r(x)$ die die Abbildung Φ definierenden Funktionen und mit \mathfrak{C}_i eine differenzierbare Kurve in bezug auf einen Punkt $x \in \mathfrak{R} \cap ''''Q_i$ bezeichnen, die im Rechteck $|u_1| < ''''\delta$, $|v_1| < ''''b_1$ den Punkt $z_1 = -i''''b_1$ mit dem Punkt $z_1 = +i''''b_1$ verbindet, derart, daß $z_1(x)$ rechts von \mathfrak{C}_2 und links von \mathfrak{C}_1 liegt. \mathfrak{C}_i sei ferner so orientiert, daß die S_1 links von \mathfrak{C}_i liegt. Es gilt, daß \mathfrak{C}_1 homotop zu \mathfrak{C}_2 ist.

In $\mathfrak{R} \cap ''''D$ ist dann:

$$\begin{aligned} g_2^{(1)}(x) - g_1^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi i)^k} \left[\int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int \mu_2 \hat{g} d\omega - \int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int \mu_1 \hat{g} d\omega \right] \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2^{-1}} d\xi \int \dots \int \lambda \hat{g} d\omega \\ &\quad \text{(mit } d\omega = d\omega_1 \dots d\omega_k \text{ und } \mu_i = \lambda_i - \lambda). \end{aligned}$$

Der letzte Teil dieser Summe ist gleich g . Setzen wir

$$g^{(1)} = g - (g_2^{(1)} - g_1^{(1)}) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int (\mu_1 - \mu_2) \hat{g} d\omega$$

und $\hat{g}^{(1)} = g^{(1)} \sigma$ in $B \cap ''''P$, so erhalten wir durch:

$$\hat{g}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) \hat{g} d\omega \text{ eine Funktion in } ''''P, \text{ deren Spur auf } B \cap ''''P \text{ die Funktion } \hat{g}^{(1)} \text{ ist. In } ''''P \text{ gilt: } |\hat{g}^{(1)}| < 4 K_0 K_1 M \varepsilon ''''b_1 < \frac{1}{2}, \text{ wenn } \varepsilon \text{ hinreichend klein gew\u00e4hlt ist. Wir setzen nun:}$$

$$\hat{g}^{(v)} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) \hat{g}^{(v-1)} d\omega,$$

$$g^{(v)} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_1} d\xi \int \dots \int (\mu_1 - \mu_2) \hat{g}^{(v-1)} d\omega,$$

$$g_i^{(v)} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathfrak{C}_i} d\xi \int \dots \int \lambda_i \hat{g}^{(v-1)} d\omega \quad \text{und} \quad g^0 = g!$$

$g^{(v)}\sigma$ ist immer Spur von $\hat{g}^{(v)}$ und es gilt $|\hat{g}^{(v)}| < \frac{1}{2^v} M$ in ${}''''P$. Ferner ist $g_2^{(v)} - g_1^{(v)} = g^{(v-1)} - g^{(v)}$ in $\mathfrak{R} \cap {}''''D$.

Ist N_i eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathfrak{R} \cap {}''''Q_i$, so gibt es, wie man aus der Definition von $g_i^{(v)}$ unmittelbar ersieht, eine von g unabhängige Konstante K , derart, daß $|g_i^{(v)}(N_i)| < \frac{K}{2^{v+1}} M$ ist. $\sum_{v=1}^{\infty} g_i^{(v)}(x)$ konvergiert also gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{R} \cap {}''''Q_i$ gegen eine holomorphe Grenzfunktion $g_i(x)$. Es gilt deshalb: $g_2 - g_1 = \sum g_2^{(v)} - \sum g_1^{(v)} = \sum (g^{(v-1)} - g^{(v)}) = g$. Auf N_i ist ferner $|g_i(x)| < KM$. g_i und K erfüllen also die in Satz 14 verlangten Bedingungen. Damit ist Satz 14 bewiesen.

Aus Satz 14 folgt, daß \mathfrak{R} selbst ein holomorph vollständiger Raum ist. Wir zeigen:

Satz 15. Sind $\mathfrak{R} \cap Q_i$ holomorph vollständige Räume, so ist auch \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum.

Beweis. Können wir zeigen, daß $\mathfrak{R} \cap {}''''R$ ein holomorph vollständiger Raum ist, so kann \mathfrak{R} , da man $|a_v - {}''''a_v|$, $|b_v - {}''''b_v|$ beliebig klein machen kann, durch eine Folge in bezug auf \mathfrak{R} konvexer, holomorph vollständiger Räume ausgeschöpft werden. Nach Satz 7 ist \mathfrak{R} dann selbst ein holomorph vollständiger Raum.

Damit $\mathfrak{R} \cap {}''''R$ holomorph vollständig ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{R} \cap {}''''R$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, die durch endlich viele in $\mathfrak{R} \cap {}''''R$ holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ normal eingebettet wird.

2. Zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in \mathfrak{R} \cap {}''''R$ gibt es immer eine in $\mathfrak{R} \cap {}''''R$ holomorphe Funktion f , bei der $f(x) \neq f(y)$ gilt.

Wir zeigen zunächst, daß 1. erfüllt ist. Es gelte etwa $x \in \mathfrak{R} \cap {}''''Q_1$. Wir legen um x eine Umgebung \mathfrak{B} , die relativ kompakt in $\mathfrak{R} \cap {}''''Q_1$ enthalten ist. Nach Voraussetzung gibt es nun in $\mathfrak{R} \cap Q_1$ endlich viele holomorphe Funktionen ${}''f_1 \dots {}''f_k$, die \mathfrak{B} normal einbetten.

$\mathfrak{R} \cap D$ ist konvex in bezug auf $\mathfrak{R} \cap Q_2$. Wir können deshalb in $\mathfrak{R} \cap Q_2$ holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ finden, derart, daß in $\mathfrak{R} \cap D$: $|{}''f_v - f_v| < \tilde{\varepsilon}$ ist. Setzen wir $g^{(v)} = f_v - {}''f_v$ und sind $g_i^{(v)}$ Funktionen nach Satz 14, derart, daß $g^{(v)} = g_2^{(v)} - g_1^{(v)}$, $|g_i^{(v)}| < K\tilde{\varepsilon}$ in \mathfrak{B} ist, so gilt $({}''f_v - g_1^{(v)}) - (f_v - g_2^{(v)}) = 0$ in $\mathfrak{R} \cap {}''''D$. Es sei $f_v = {}''f_v - g_1 = f_v - g_2$ in $\mathfrak{R} \cap {}''''R$. In $\mathfrak{B} \cap H$ ist dann: $|f_v - {}''f_v| < K\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Wählen wir ε hinreichend klein, so betten nach Satz 3 die Funktionen f_v eine Umgebung von x normal ein. Somit ist 1. bewiesen.

Es werde jetzt gezeigt, daß 2. erfüllt ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\Phi(x), \Phi(y) \in {}''''Q_i$, $i = 1$ oder 2 ,

b) $\Phi(x), \Phi(y) \notin D$, $\Phi(x) \in {}''''Q_1$, $\Phi(y) \in {}''''Q_2$.

Liegt Fall a) nicht vor, so kann man δ immer so klein wählen und die Punkte so bezeichnen, daß Fall b) eintritt.

Im Falle a): $\Phi(x), \Phi(y) \in {}''''Q_1$ sei f eine holomorphe Funktion in $\mathfrak{R} \cap Q_1$, derart, daß $f(x) \neq f(y)$ ist. Nach dem Approximationssatz gibt es in $\mathfrak{R} \cap Q_2$

eine holomorphe Funktion $''f$, so daß auf $\mathfrak{R} \cap 'D$ die Ungleichung $|''f - 'f| < \varepsilon$ gilt. Sind dann g_1, g_2 Funktionen nach Satz 14 zu $g = ''f - 'f$, so gilt: $(''f - g_2) - ('f - g_1) = 0$ in $\mathfrak{R} \cap ''''D$ und $|g_1(x)|, |g_1(y)| < \varepsilon K$. Es ist daher $f(x) \neq f(y)$, wenn wir $f = 'f - g_1 = ''f - g_2$ setzen und ε hinreichend klein gewählt ist.

Im Falle b) legen wir um $\Phi(x), \Phi(y)$ relativ kompakt in $''''R - \bar{D}$ enthaltene Hyperkugeln $H_v, v = 1, 2$. Da die Bereiche H_1 bzw. $D \cup H_2$ konvex in bezug auf Q_1 bzw. Q_2 sind, sind die Bereiche $\mathfrak{R} \cap H_1$ bzw. $\mathfrak{R} \cap (D \cup H_2)$ konvex in bezug auf $\mathfrak{R} \cap Q_1$ bzw. $\mathfrak{R} \cap Q_2$. Nach dem Approximationssatz können wir deshalb in $\mathfrak{R} \cap Q_1$ eine holomorphe Funktion $'f$ und in $\mathfrak{R} \cap Q_2$ eine holomorphe Funktion $''f$ wählen, derart, daß $|'f| < \varepsilon$ in $\mathfrak{R} \cap H_1, |''f - 1| < \varepsilon$ in $\mathfrak{R} \cap H_2$ und $|''f - 'f| < \varepsilon$ in $\mathfrak{R} \cap 'D$ gilt. Bilden wir wieder zu $g = ''f - 'f$ die Funktionen g_1, g_2 , so ist in $\mathfrak{R} \cap ''''D: ('f - g_2) - ('f - g_1) = 0$. Also ist $f = 'f - g_1 = ''f - g_2$ eine holomorphe Funktion in $\mathfrak{R} \cap ''''R$. In x gilt $|f - 'f| < K\varepsilon$, in $y: |f - ''f| < K\varepsilon$. Somit ist sicher $f(x) \neq f(y)$, wenn ε hinreichend klein gewählt ist. Damit ist Satz 15 bewiesen.

Man kann Satz 15 benutzen, von lokalen Eigenschaften eines komplexen Raumes auf globale Eigenschaften zu schließen. Es seien wieder die gleichen Bezeichnungen 1. bis 3. wie bei Satz 14 gewählt.

Satz 16. *Erfüllt \mathfrak{R} die C-Bedingung, so ist \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum.*

Beweis. Da \mathfrak{R} der C-Bedingung genügt, gibt es nach Satz 4 um jeden Punkt $x \in \mathfrak{R}$ eine beliebig kleine Umgebung, die ein holomorph vollständiger Raum ist. Da Φ eigentlich und nirgends entartet abbildet, besteht $\{\Phi^{-1}\Phi(x)\}$ aus endlich vielen Punkten $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{R}$. Sicher existiert in \mathfrak{R} eine Umgebung U von $x_1 \dots x_s$, die ein holomorph vollständiger Raum ist. Schlagen wir dann um $\Phi(x)$ eine Hyperkugel $H \subset R$, die so klein ist, daß $\mathfrak{R} \cap H \subset U$ gilt, so ist $\mathfrak{R} \cap H$ ein holomorph vollständiger Raum. Zu jedem Punkt $\Phi(x), x \in \mathfrak{R}$, existiert eine solche Hyperkugel H . Ferner ist die Menge $\{\Phi(x), x \in \mathfrak{R}\}$ abgeschlossen in R . Wir können deshalb Konstanten:

$$\begin{aligned} a_v^\mu, \tilde{a}_v^{\mu+1}, b_v^\mu, \tilde{b}_v^{\mu+1}, v = 1 \dots n, \mu = 0 \dots s, \\ -a_v < a_v^0 < a_v^1 < \tilde{a}_v^1 < a_v^2 < \dots < a_v^s < \tilde{a}_v^s < \tilde{a}_v^{s+1} < a_v, -b_v < b_v^0 < b_v^1 < \tilde{b}_v^1 < \\ < \dots < b_v^s < \tilde{b}_v^s < \tilde{b}_v^{s+1} < b_v, \end{aligned}$$

so bestimmen, daß $\mathfrak{R} \cap G_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ holomorph vollständige Räume sind, wobei $G_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ das Rechteckgebiet $\{a_v^{\alpha_v} < u_v < \tilde{a}_v^{\alpha_v+1}, b_v^{\beta_v} < v_v < \tilde{b}_v^{\beta_v+1}\}$ bezeichnet. Mehrmalige Anwendung des Satzes 15 ergibt sofort, daß $\mathfrak{R} \cap \tilde{R}, \tilde{R}: \{a_v^0 < < u_v < \tilde{a}_v^{s+1}, b_v^0 < v_v < \tilde{b}_v^{s+1}\}$ ein holomorph vollständiger Raum ist. Da $|a_v + a_v^0|, |a_v - \tilde{a}_v^{s+1}|, |b_v + b_v^0|, |b_v - \tilde{b}_v^{s+1}|$ beliebig klein gemacht werden kann, folgt mit Satz 7 die Behauptung des Satzes 16.

Um zu zeigen, daß jedes die C-Bedingung erfüllende, holomorph-konvexe Riemannsche Gebiet \mathfrak{G} über dem $w_1 \dots w_m$ -Raum ein holomorph vollständiger Raum ist, genügt es wegen Satz 7 zu zeigen, daß jedes analytische Polyeder \mathfrak{R} von \mathfrak{G} ein holomorph vollständiger Raum ist; denn \mathfrak{G} ist durch analytische Polyeder ausschöpfbar.

Sei $\tilde{R}: \{|u_v| < a_v, |v_v| < b_v\}$ ein Rechteckgebiet des $z_1 \dots z_k$ -Raumes, werde \mathfrak{R} durch die Bedingungen $\{x \in \mathfrak{G}, (f_1(x) \dots f_k(x)) \in \tilde{R}\}$ ($f_1 \dots f_k$ holomorph in \mathfrak{G}) definiert und sei ferner mit $w_v = w_v(x)$, $v = 1 \dots m$, die Projektion von \mathfrak{G} auf die Grundpunkte bezeichnet. Auf \mathfrak{R} ist $|w_v(x)| < c$. Bezeichnen wir dann mit R das Rechteckgebiet $\{|u_v| < a_v, |v_v| < b_v, |u_\mu| < c, |v_\mu| < c, v = 1 \dots k, \mu = k+1 \dots k+m\}$ des $z_1 \dots z_{k+m}$ -Raumes, so bildet die holomorphe Abbildung

$\Phi: z_1 = f_1(x) \dots z_k = f_k(x), z_{k+1} = w_1(x) \dots z_{k+m} = w_m(x)$ das Polyeder \mathfrak{R} eigentlich und nirgends entartet in R ab. (\mathfrak{R}, Φ) genügt den bei den Sätzen 14, 15, 16 gemachten Voraussetzungen. Da \mathfrak{R} ferner wie \mathfrak{G} die C -Bedingung erfüllt, folgt aus Satz 16, daß \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum ist. Wir haben damit folgenden allgemeinen Satz gewonnen:

Satz B. *Ein holomorph-konvexes Riemannsches Gebiet über dem C^n , das der C -Bedingung genügt, ist ein holomorph vollständiger Raum.*

(Eingegangen am 1. Dezember 1954.)

Derivations on Commutative Normed Algebras.

By

I. M. SINGER and J. WERMER in New York City and Providence, Rhode Island.

A *derivation* D on an algebra is a transformation on the algebra such that

- (i) $D(a + b) = D(a) + D(b)$
- (ii) $D(\lambda a) = \lambda D(a)$, λ any scalar
- (iii) $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.

We are concerned with derivations on commutative Banach algebras over the complex field, where by a Banach algebra we mean a normed algebra \mathfrak{A} which is complete in its norm. The *radical* of \mathfrak{A} is the intersection of all maximal ideals M in \mathfrak{A} which are such that \mathfrak{A}/M has a unit. If the radical reduces to the zero element, \mathfrak{A} is called *semi-simple*.

A derivation on \mathfrak{A} is said to be *bounded* if

- (iv) $\sup_{\|a\|=1} \|D(a)\| = \|D\| < \infty$

Theorem 1¹): Let \mathfrak{A} be a commutative Banach algebra and D a bounded derivation on \mathfrak{A} . Then D maps \mathfrak{A} into its radical. In particular, if \mathfrak{A} is semi-simple, $D = 0$.

Proof of Theorem 1: A non-zero linear functional f on \mathfrak{A} is called *multiplicative* if $f(ab) = f(a)f(b)$ for all a, b in \mathfrak{A} . We need the following result, due to GELFAND:

(1) If f is multiplicative, $|f(a)| \leq \|a\|$ for each a . Since D is bounded, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|D^n\|}{n!} < \infty$ if $t < \infty$, and so for any complex number λ the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n D^n}{n!}$ converges to a bounded operator on \mathfrak{A} which we call $e^{\lambda D}$. For finite-dimensional algebras it is well-known²) that $e^{\lambda D}(ab) = e^{\lambda D}(a)e^{\lambda D}(b)$ for a, b in \mathfrak{A} . Guided by the formal process, we proceed as follows:

¹) SLOV showed in his paper "On a property of rings of functions", Doklady Akad. Nauk SSSR. (N.S.) 58, 985—988 (1947), that the algebra of all infinitely differentiable functions on an interval cannot be normed so as to be a Banach algebra. Prof. I. KAPLANSKY conjectured that the "reason" for this was that non-zero derivations could not exist on a commutative semisimple Banach algebra. Theorem 1 proves this conjecture for bounded derivations. It seems probable that hypothesis (iv) is superfluous.

²) See CHEVALLEY: "Theory of Lie Groups", p. 137. Princeton Univ. Press. (1946).

Fix a multiplicative functional f and a complex number λ and set $\varphi_\lambda(a) = f(e^{\lambda D}(a))$, a in \mathfrak{A} . Then φ_λ is a linear functional and we claim φ_λ is multiplicative. For by (i) and (iii),

$$\frac{D^n(ab)}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{D^i(a)}{i!} \frac{D^j(b)}{j!}$$

Hence

$$\varphi_\lambda(ab) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n f(D^n(ab))}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{i+j=n} \frac{f(D^i(a)) \cdot f(D^j(b))}{i! \cdot j!}$$

Also

$$\varphi_\lambda(a) \cdot \varphi_\lambda(b) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i f(D^i(a))}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j f(D^j(b))}{j!} \right)$$

Since the series in the preceding line converge absolutely, it follows that $\varphi_\lambda(ab) = \varphi_\lambda(a) \varphi_\lambda(b)$. Hence by (1), we have

$$(2) \quad |\varphi_\lambda(a)| \leq \|a\| \text{ for each } a \text{ in } \mathfrak{A} \text{ and each } \lambda. \text{ But } \varphi_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n f(D^n(a))}{n!}$$

is an entire function of λ for a fixed a . By (2) this entire function is bounded in the whole plane. Hence it is a constant. Hence $f(D^n(a)) = 0$, $n \geq 1$. In particular $f(D(a)) = 0$. But f was an arbitrary multiplicative functional and so $D(a)$ is annihilated by every multiplicative functional. Hence $D(a)$ lies in the radical, which is the assertion of the theorem.

Applications of Theorem 1:

WIELANDT has shown [Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik, Math. Ann. 121, 21 (1949—50)] that if a, b are bounded operators on a normed vector space, then $a b - b a \neq 1$. We can use Theorem 1 to strengthen this result as follows:

Corollary 1.1: Let a, b be bounded operators on a Banach space and assume that $a b - b a$ lies in the uniformly closed algebra generated by a and 1. Then $a b - b a$ is a generalized nilpotent, i. e. has a spectrum which consists only of zero.

Proof: Let \mathfrak{A} be the uniformly closed algebra generated by 1 and a . For any bounded operator c , let $D(c) = c b - b c$. Then D is a derivation on the algebra of all bounded operators. We assert that D maps \mathfrak{A} into itself. For $D(a) \in \mathfrak{A}$ by hypothesis. If P is a polynomial, $D(P(a)) = P'(a) \cdot D(a)$ and so $D(P(a))$ is in \mathfrak{A} . Finally, if c is any element of \mathfrak{A} , c is a limit of polynomials in a and so $D(c)$ is in \mathfrak{A} . Thus D is a derivation of \mathfrak{A} . Finally D is bounded, since $\|D(c)\| \leq 2 \|b\| \|c\|$. By Theorem 1, then, D maps \mathfrak{A} into its radical. Thus $D(a)$ is in the radical of \mathfrak{A} . Hence by well-known results,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(D(a))^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \text{ and so } D(a) = a b - b a$$

is a generalized nilpotent; Q.E.D.

For other extensions of WIELANDT's Theorem, see P. R. HALMOS, "Commutators of operators II", Amer. J. of Math. 76, 191—198 (1954).

Corollary 1.2³): Let C^∞ denote the algebra of all infinitely differentiable complex-valued functions on an interval. Then there exists no norm under which C^∞ is a Banach algebra.

Proof: Suppose there is such a norm. For each f in C^∞ set $Df = f'$. Then D is a derivation on C^∞ . We can show that D is bounded.

For consider any point t_0 in the interval, and let φ_{t_0} be the functional which maps f into $f'(t_0)$. For $n = 1, 2, \dots$ set $L_n(f) = \frac{f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - f(t_0)}{\frac{1}{n}}$.

Now the maps: $f \rightarrow f(t_0)$ and $f \rightarrow f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)$ are multiplicative and hence bounded linear functionals. It follows that L_n is a bounded linear functional for each n . Now $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f'(t_0) = \varphi_{t_0}(f)$. Hence by a well-known result the functional φ_{t_0} is bounded.

To show D bounded it suffices, by a theorem of BANACH, to show that if $f_n \rightarrow f$ and $Df_n \rightarrow g$ then $Df = g$. But if $f_n \rightarrow f$, $f'_n(t) \rightarrow f'(t)$ for each t by the preceding, and so

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) = f'(t) = Df(t)$$

for each t . Hence $Df = g$. Thus D is bounded.

Now C^∞ is semi-simple since $f(t) = 0$ for all t implies $f = 0$. Hence by Theorem 1, $D = 0$. But this is false. Hence the assertion of the theorem must hold.

Derivations into Larger Algebras.

Let \mathfrak{A} be a commutative Banach algebra which is embedded in some larger algebra B as closed subalgebra. Let D be a (bounded) linear transformation of \mathfrak{A} into B . Since $\mathfrak{A} \subseteq B$, the product of a and $D(b)$ is defined in B if a, b are in \mathfrak{A} . D is called a (bounded) *derivation of \mathfrak{A} into B* if, when a_1, a_2 are in \mathfrak{A} ,

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) a_2 + a_1 D(a_2).$$

What algebras \mathfrak{A} admit derivations into some commutative extension B ? We need the following notion:

A (bounded) *point derivation* of \mathfrak{A} is a (bounded) linear functional d_φ associated with a multiplicative linear functional φ such that

$$d_\varphi(a_1 a_2) = d_\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) + \varphi(a_1) d_\varphi(a_2).$$

Theorem 2: If there exists a non-zero (bounded) point derivation d_φ of \mathfrak{A} , then there exists a commutative extension B of \mathfrak{A} and a non-zero (bounded) derivation D of \mathfrak{A} into B . If \mathfrak{A} is semi-simple, B can be taken to be semi-simple.

If $\mathfrak{A} \subseteq B$ and if D is a non-zero (bounded) derivation of \mathfrak{A} into B but not into the radical of B , then there exists a non-zero (bounded) point derivation of \mathfrak{A} .

Proof: Let B consist of all pairs (a, λ) , a in \mathfrak{A} , λ a complex number, i.e. B is the direct sum of \mathfrak{A} with the complex numbers. Multiplication is defined by:

³) Originally proved by SILOV, cf. footnote 1).

$(a_1, \lambda_1) \cdot (a_2, \lambda_2) = (a_1 a_2, \lambda_1 \lambda_2)$. The norm in B is given by $\|(a, \lambda)\| = \max(\|a\|, |\lambda|)$. It is easy to check that B is a commutative Banach algebra and is semi-simple if \mathfrak{A} is.

Let now φ be a multiplicative functional on \mathfrak{A} and d an associated point derivation. Let \mathfrak{A}_1 be the set of all (a, λ) with $\lambda = \varphi(a)$. The map: $a \rightarrow (a, \varphi(a))$ is an algebraic isomorphism of \mathfrak{A} onto \mathfrak{A}_1 which preserves norm since $|\varphi(a)| \leq \|a\|$. We identify \mathfrak{A} with \mathfrak{A}_1 so that \mathfrak{A} is embedded in B , as closed subalgebra of B .

D is defined by $D((a, \varphi(a))) = (0, d(a))$. Then D is linear.

$$\begin{aligned} D((a_1, \varphi_1(a)) \cdot (a_2, \varphi_2(a))) &= D(a_1 a_2, \varphi_1(a) \varphi_2(a)) \\ &= (0, d(a_1 a_2)) = (0, d(a_1) \varphi_2(a) + \varphi_1(a) d(a_2)) \\ &= (0, d(a_1)) (a_2, \varphi_2(a)) + (a_1, \varphi_1(a)) (0, d(a_2)). \end{aligned}$$

Hence D is a derivation. It is bounded if d is bounded.

To prove the partial converse, we note that since $D(\mathfrak{A})$ is not in the radical of B , (where D is the given derivation of \mathfrak{A} into B), there exists some multiplicative functional φ on B whose restriction to $D(\mathfrak{A})$ is not zero. Define d on \mathfrak{A} by $d(a) = \varphi(D(a))$. Then d is not zero and

$$\begin{aligned} d(a_1 a_2) &= \varphi(D(a_1 a_2)) = \varphi(D(a_1) \cdot a_2 + a_1 D(a_2)) \\ &= \varphi(D(a_1)) \varphi(a_2) + \varphi(a_1) \varphi(D(a_2)) \\ &= d(a_1) \varphi(a_2) + \varphi(a_1) d(a_2) \end{aligned}$$

i.e. d is a point derivation on \mathfrak{A} . d is bounded if D is.

Note: In the construction in the preceding proof, the maximal ideal space of B was disconnected. One can however, give an example of a bounded derivation from an algebra \mathfrak{A} into a larger algebra B , where the space of maximal ideals of B is connected.

Suppose $1 \in \mathfrak{A}$. Then point derivations can be interpreted in terms of ideals as follows. Let $M_\varphi = \{a \mid \varphi(a) = 0\}$, where φ is a multiplicative linear functional. Then M_φ is a maximal ideal in \mathfrak{A} . Let M_φ^2 be the set of linear combinations of squares of elements of M_φ and let $\overline{M_\varphi^2}$ be the closure of M_φ^2 . Then non-zero (bounded) point derivations associated with φ exist if and only if $M_\varphi^2 \neq \overline{M_\varphi^2} \neq M_\varphi$. For if so, we can find a linear non-zero (bounded) functional l annihilating M_φ^2 and 1. Then l is a (bounded) point derivation associated with φ . For any element a in \mathfrak{A} can be written as: $a = a' + \varphi(a) \cdot 1$, a' in M_φ . Then

$$\begin{aligned} l(a_1 a_2) &= l((a'_1 + \varphi(a_1) \cdot 1) (a'_2 + \varphi(a_2) \cdot 1)) \\ &= l(a'_1 a'_2 + \varphi(a_1) a'_2 + a'_1 \varphi(a_2) + \varphi(a_1) \varphi(a_2) \cdot 1) \\ &= \varphi(a_1) l(a'_2) + l(a'_1) \varphi(a_2). \end{aligned}$$

Conversely, if d is a non-zero (bounded) point derivation associated with the multiplicative functional φ , then $d(M_\varphi) \neq 0$ and $d(M_\varphi^2) = 0$, ($d(\overline{M_\varphi^2}) = 0$), whence $M_\varphi^2 \neq \overline{M_\varphi^2} \neq M_\varphi$; consequently we have the:

Corollary 2.1. *Assume \mathfrak{A} is semi-simple with unit. \mathfrak{A} has no non-zero (bounded) derivations into a semi-simple commutative extension B if and only if $M_\varphi^2 = M_\varphi (\overline{M}_\varphi^2 = M_\varphi)$ for all multiplicative φ .*

Corollary 2.2. *The algebra $C(X)$ of all continuous functions on a compact Hausdorff space X has no non-zero derivations into any semi-simple commutative extension B .*

Proof: It suffices to show that $M_\varphi^2 = M_\varphi$ for all φ . Now M_φ consists of all functions f vanishing at a point x . If $f \in M_\varphi$, the real and imaginary parts of f vanish at x . Suppose f is real; then we can write $f = f^+ - f^-$ where f^+, f^- are nonnegative, continuous and vanish at x . They have continuous square roots. Hence $f \in M_\varphi^2$ and all is proved.

Added in Proof: In a paper "On the Spectra of Commutators" (Proc. Amer. Math. Soc. 5, No. 6, Dec. 1954, pp. 929—931) C. R. PUTNAM has proved the following result: "If A, B are bounded operators on a Hilbert space and $C = AB - BA$, and if $AC = CA$ and $BC = CB$, then the spectrum of C consists of 0 alone." By considering the derivation D with $D(a) = aB - Ba$ on the algebra generated by A and C , PUTNAM's theorem is readily seen to be a consequence of our Theorem 1.

U.C.L.A. and Columbia Univ. and Brown Univ.

(Eingegangen am 20. Dezember 1954.)

Smallest Lattice-Point Covering Convex Set.

By

JUAN J. SCHÄFFER in Montevideo.

1. Some years ago, L. A. SANTALÓ proposed the following problem [3]:

Consider in a plane the square lattice of points with integral coordinates with respect to a pair of rectangular axes. A plane set F will be called a covering set if, for any position of F in the plane, it contains at least one of the lattice points. The problem consists in finding, among all covering sets, that (or those) of least area.

J. L. MASSERA and the present author discussed this problem at some length in [2], with special reference to the case of convex sets. Criteria were given for some kinds of "minimality". In a later paper, [5], the present author pursued this method, and also used an analytic method to find the smallest convex covering set of width 1.

Somewhat earlier, D. B. SAWYER [4], also using analytic methods, found the smallest convex covering set having a centre. In both the cases mentioned, the smallest set was found to be the set F_0 consisting of a unit square and two segments of a parabola, the angle formed by the tangent to the parabola and the side of the square being $\pi/4$ (see figure 1). Its area is $4/3$.

In this paper we shall prove that F_0 is indeed the smallest among all convex covering sets (with no further restrictions). The proof draws heavily upon some methods of [4] and [5], but for convenience this paper is self-contained, except for the result on convex curves quoted in the proof of Lemma 1. The main result is stated in Theorem 2.

This paper was first presented at the Mathematical Seminar of the University of Zürich, at the suggestion of Profs. B. L. VAN DER WAERDEN and J. J. BURCKHARDT, to whom the author wishes to express his thanks; he is also indebted to the latter for calling his attention to the work of SAWYER.

2. We shall require some preliminary notations and results. The term *lattice* will always refer to a unit square lattice. The term *covering set* will always designate a *closed convex* set, which is covering in the sense defined above. It is plainly indifferent for the verification of the covering property whether we consider the set placed in the lattice plane or the lattice placed in any position on a plane containing the set. This remark will be very useful.



Fig. 1.

It is obvious that a covering set must have interior points; for if it had not, being convex, it would be contained in a straight line, and this can be placed on the lattice so as to contain no lattice point.

From now on, the term *covering set* will refer only to *bounded* sets; this is no loss of generality, since a convex unbounded set with interior points has infinite area. (It can in fact be shown that an unbounded convex covering set always contains a bounded one.)

Lemma 1. *Every covering set contains a unit square.*

Proof: Let F be a covering set, f its boundary. Since F is bounded and has interior points, f is a closed convex curve, and there exists a square S having its four vertices on f (for the proof, see [1]). Since F is convex, S is contained in F . We now place F on the lattice in such a way that the centre of S and the centre of a lattice square coincide and the sides of the two squares be parallel. Since F is convex, it is entirely contained in the union of the two strips whose intersection is S . If the length of the sides of S were < 1 , these strips would be interior to the strips whose intersection is the lattice square; hence they, and therefore F , would contain no lattice points, contradicting the assumption that F is a covering set. Hence the length of the sides of S is ≥ 1 and therefore F contains a unit square.

From now on we shall single out a specific unit square S_0 contained in F . Consider the lines of support of F which are parallel to the sides of S_0 . They form two strips containing F . Let $r = 1 + b$ and s be the widths of these strips, so chosen that

$$(1) \quad 1 \leq 1 + b = r \leq s.$$

It follows that $b \geq 0$.

Lemma 2. *If F is a covering set, then $s \geq \sqrt{2}$, and any of the following conditions:*

- a) $\text{diam. } F \geq 2$,
- b) $s > 5/3$,
- c) $b \geq 4/13$,

implies that area $F > 4/3$.

Proof: Since the boundaries of the strips above defined are lines of support, they contain points of F . Therefore F certainly contains the square S_0 and triangles having their base on each side of S_0 and their vertex on each line of support. Considering their combined areas we have:

$$(2) \quad \text{area } F \geq 1 + (r-1)/2 + (s-1)/2 = (r+s)/2.$$

Now F is contained in a rectangle of sides r and s . Therefore, taking into account (1) and (2),

$$\begin{aligned} (\text{diam. } F)^2 &\leq r^2 + s^2 \leq r^2 + s^2 + 2(r-1)(s-1) = (r+s-1)^2 + 1 \\ &\leq (2(\text{area } F) - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

and hence, if $\text{diam. } F \geq 2$, then $2(\text{area } F) - 1 \geq \sqrt{3} > 5/3$, and therefore $\text{area } F > 4/3$.

We shall next show that

$$(3) \quad s \geq \sqrt{2}.$$

If (3) did not hold, then, by (1), F would be contained in a square of sides of length $s < \sqrt{2}$. Such a square, however, is not a covering set, as is most easily seen by placing it on the lattice at an angle of $\pi/4$; this contradicts the assumption that F is a covering set.

If $s > 5/3$ we have, from (1) and (2), area $F > (1 + 5/3)/2 = 4/3$ as was to be proved. If $b \geq 4/13$ we have, from (2) and (3), area $F \geq (17/13 + \sqrt{2})/2 > 4/3$, as is readily verified.

We may therefore in the following preliminary discussion restrict ourselves to those covering sets which satisfy:

$$(A) \quad \text{diam. } F < 2 \quad \sqrt{2} \leq s \leq 5/3 \quad 0 \leq b < 4/13 < \sqrt{2} - 1$$

We shall now introduce a pair of coordinate axes; the y -axis shall be one of the edges of the strip of width $r = 1 + b$ (this strip is thus defined by $0 \leq x \leq 1 + b$). The x -axis may be chosen as one of the edges of S_0 , say in such a way that S_0 lie above it.

We now imagine a unit square with diagonally opposite vertices placed on the edges of the strip of width r ; this is possible, since under (A) $r < \sqrt{2}$. We denote with B and B' the abscissae of the remaining vertices. It follows immediately that

$$(4) \quad B = (1 + b - \sqrt{2 - (1 + b)^2})/2 \quad B' = (1 + b + \sqrt{2 - (1 + b)^2})/2 \quad B + B' = 1 + b$$

and from these values or the geometrical definition

$$(5) \quad b \leq B < B' \leq 1$$

with equality at either end if and only if $b = 0$.

In the closed interval $B \leq x \leq B'$ we now define the functions

$$(6) \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad z(x) = 1 + b - f(x).$$

$f(x)$ is clearly monotone decreasing, $z(x)$ monotone increasing, and both map the interval $[B, B']$ onto itself. Thus, $f(B) = z(B') = B'$, $f(B') = z(B) = B$. Furthermore $f(f(x)) = x$ identically, and finally, from $1 = x^2 + (f(x))^2 = x^2 + (1 + b - z(x))^2$ we have, for $B < x < B'$,

$$(7) \quad dz(x)/dx = x/(1 + b - z(x)) > 0.$$

We also require the following result:

Lemma 3. For any x_0 , $B < x_0 < B'$, define $x_1 = z(x_0)$, \dots , $x_{i+1} = z(x_i)$. Then $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = B$.

Proof: For $B < x < B'$, we certainly have $x^2 - (B + B')x + BB' < 0$, or $x > (x^2 + BB')/(B + B')$. Since $B < x < B'$ implies $B < f(x) < B'$, we have, by (6), $f(x) > (1 + BB' - x^2)/(B + B')$, and from (6) and (4), $z(x) < B + B' - (1 + BB' - x^2)/(B + B')$. Hence

$$z(x) - B < \frac{x^2 - 1 + B^2}{B + B'} = \frac{x^2 - (f(B'))^2}{B + B'} = \frac{x^2 - B^2}{B + B'}.$$

Since by assumption $B < x_0 < B'$, it follows from (6) that $B < x_i < B'$ for all i , and thus

$$x_{i+1} - B < \frac{B + x_i}{B + B'} (x_i - B) < x_i - B$$

so that $x_{i+1} < x_i$, and therefore by induction $x_i < x_0$ for all i . We now set

$$(8) \quad a = (B + x_0)/(B + B') < 1.$$

In the above inequality we have now more precisely

$$x_{i+1} - B < \frac{B + x_i}{B + B'} (x_i - B) < a \cdot (x_i - B)$$

and by induction $(x_{i+1} - B) < a^i \cdot (x_0 - B)$ whence, by (8), the lemma follows.

3. We are now ready to examine the covering set more closely. According to our previous choice of coördinates, the square S_0 is the set of points defined by $0 \leq y \leq 1$, $t \leq x \leq 1 + t$. For t we have the obvious restrictions $0 \leq t$, $1 + t \leq 1 + b$, whence $0 \leq t \leq b$. It now follows from (5) that

$$(9) \quad t \leq B < B' \leq 1 + t$$

where equality holds at either end if and only if $b = 0$.

Since F is convex and $x = 0$, $x = 1 + b$ are lines of support, we may represent F as the set of points satisfying

$$(10) \quad 0 \leq x \leq 1 + b \quad -h_2(x) \leq y \leq 1 + h_1(x)$$

where $h_1(x)$, $h_2(x)$ are single-valued continuous functions of x for $0 \leq x \leq 1 + b$. Since F contains S_0 , (10) implies

$$(11) \quad h_1(x) \geq 0 \quad h_2(x) \geq 0 \quad t \leq x \leq 1 + t.$$

Consider now a point P on the upper boundary arc of F , such that its abscissa lies between B and B' . Say, $P = (x_0, 1 + h_1(x_0))$, $B < x_0 < B'$. Since $B' \leq 1$ [by (5)], there exists a point Q , $x_Q = 0$, such that $y_Q < y_P$ and $PQ = 1$. We find $Q = (0, 1 - f(x_0) + h_1(x_0))$. On the perpendicular at Q to PQ consider the point R such that $x_R > 0$, and $QR = 1$. Obviously

$$(12) \quad R = (f(x_0), 1 - x_0 - f(x_0) + h_1(x_0)).$$

We wish to prove that R lies in F . To do this, we consider the lattice to which P , Q , R belong as lattice points. P is in F by assumption. By (A), the only other lattice points which might lie in F are those whose distance from P is < 2 . This leaves 8 points to consider. Excepting Q and R , they are (see fig 2):

$$S = (-f(x_0), 1 + x_0 - f(x_0) + h_1(x_0)) \quad T = (x_0 - f(x_0), 1 + x_0 + h_1(x_0))$$

$$U = (2x_0 - f(x_0), 1 + x_0 + f(x_0) + h_1(x_0)) \quad V = (2x_0, 1 + f(x_0) + h_1(x_0))$$

$$W = (2x_0 + f(x_0), 1 - x_0 + f(x_0) + h_1(x_0)) \quad X = (x_0 + f(x_0), 1 - x_0 + h_1(x_0))$$

Clearly S lies outside the strip $0 \leq x \leq 1 + b$ containing F , and hence outside F . We now examine X . From the proof of Lemma 3 we have $x_1 = z(x_0) < x_0$, whence by (6), $x_0 + f(x_0) > 1 + b$. Thus X also lies outside the strip. (This is evident from the geometrical definition of B , B' and consideration

of the square $PQRX$.) The point W , which lies to the right of X , cannot belong to the strip either.

Let $\theta = \arccos x_0$. Then $f(x_0) = \sin \theta$. If $\theta > \pi/4$, the point T lies to the left of Q and hence outside the strip. If $\theta \leq \pi/4$, we use (11) and (9), and find $y_T = 1 + x_0 + h_1(x_0) \geq 1 + x_0 = 1 + \cos \theta \geq 1 + \sqrt{2}/2 > 5/3$. Since there are points of F with $y = 0$ (the lower side of S_0), T belonging to F would imply $s \geq y_T - 0 > 5/3$, which contradicts assumption (A). A similar argument applies to V and a fortiori to U .

It follows that the only lattice points besides P which may be in F are Q and R . Assume now that R were not in F . We could then displace the lattice slightly upward; since F is closed, the displacement may be chosen sufficiently small so that no new lattice point comes to lie in F ; but P now lies outside F , and the only lattice point which may still lie in F is Q . This, however, may be also removed by a slight leftward displacement of the lattice,

thus leaving no lattice point at all in F . This, however, contradicts the assumption that F is a covering set. Hence R lies in F .

Comparing (12) with (10) we find $1 - x_0 - f(x_0) + h_1(x_0) \geq -h_2(f(x_0))$. Since P was arbitrary as long as $B < x_0 < B'$, we have $h_1(x) + h_2(f(x)) \geq x + f(x) - 1$ for all x , $B < x < B'$; but since $h_1(x)$, $h_2(x)$, $f(x)$ are continuous, the inequality holds for the closed interval $[B, B']$.

We might have considered the point Q on the right-hand boundary of the strip instead of the left; the argument would have followed in a similar way; and substituting x by $1 + b - x$ for convenience we should have obtained $h_1(1 + b - x) + h_2(1 + b - f(x)) \geq x + f(x) - 1$ for all x in $[B, B']$. We have thus proved the following result:

Theorem 1. *If F is a covering set satisfying (A), and $h_1(x)$, $h_2(x)$ are defined by (10), then these functions satisfy, for all x , $B \leq x \leq B'$ the inequalities*

$$(13a) \quad h_1(x) + h_2(f(x)) \geq x + f(x) - 1$$

$$(13b) \quad h_1(1 + b - x) + h_2(1 + b - f(x)) \geq x + f(x) - 1$$

(Note: It can be proved (see [5]) that, if $b = 0$, these conditions together with (11) are also sufficient for covering.)

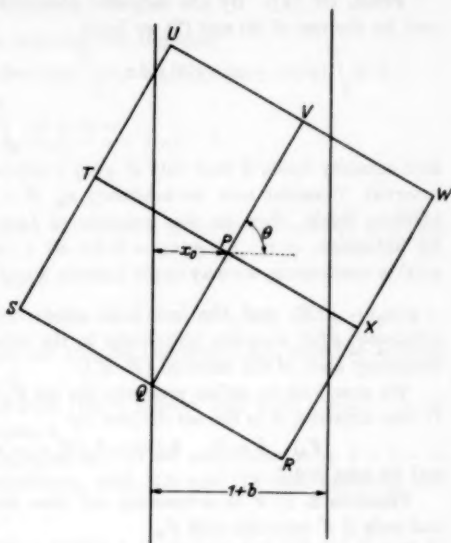


Fig. 2.

4. Before proving our main theorem we require one more auxiliary result.

Lemma 4. Let $\varphi(x)$ be a continuous function defined for $B \leq x \leq B'$ and satisfying $\varphi(x) + \varphi(z(x)) \geq 0$ for every x in this interval. Then $\int_B^{B'} \varphi(x) dx \geq 0$, and equality holds if and only if $\varphi(x) = 0$ identically in the whole interval.

Proof. (cf. [4]). By the assumed inequality and the continuity of $\varphi(x)$, and by the use of (6) and (7) we have

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_B^{B'} [\varphi(x) + \varphi(z(x))] x dx &= \int_B^{B'} \varphi(x) x dx + \int_B^{B'} \varphi(y) \cdot (1+b-y) dy \\ &= (1+b) \cdot \int_B^{B'} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

and equality holds if and only if $\varphi(x) + \varphi(z(x)) = 0$ identically in the whole interval. Consider now an arbitrary x_0 , $B < x_0 < B'$. If the last-mentioned identity holds, then, in the notation of Lemma 3, $\varphi(x_0) + \varphi(x_1) = 0$, and, by induction, $\varphi(x_{i+1}) + \varphi(x_i) = 0$ for all i , or $\varphi(x_i) = (-1)^i \cdot \varphi(x_0)$. Since $\varphi(x)$ is continuous, we may apply Lemma 3 and obtain $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^i \times \varphi(x_0) = \varphi(B)$, and the last limit exists only if $\varphi(x_0) = 0$. Since x_0 was arbitrary, $\varphi(x)$ vanishes identically in the interior, and by continuity on the boundary also, of the interval $[B, B']$.

We now wish to define precisely the set F_0 mentioned in the introduction. In our notation, it is the set defined by

$$(F_0) \quad b = 0, \quad h_1(x) = h_2(x) = -x^2 + x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

and its area is $4/3$.

Theorem 2. If F is a covering set, then area $F \geq 4/3$, equality holding if and only if F coincides with F_0 .

Proof: We shall divide the proof into several steps:

I. If F does not satisfy condition (A), then, by Lemma 2, area $F > 4/3$, and the theorem is proved. We may therefore assume that F satisfies (A). To evaluate the area of F we split it into two parts:

1) the area in the strip $t \leq x \leq 1+t$. According to (10) this area is $A_1 = \int_t^{1+t} [1 + h_1(x) + h_2(x)] dx = 1 + \int_t^{1+t} (h_1(x) + h_2(x)) dx$. Since by (11) the integrand in the last integral is non-negative, we may write by (9): $A_1 \geq 1 + \int_B^{B'} (h_1(x) + h_2(x)) dx$, where equality holds, by (9), if $b = 0$ (and, as is easily proved but not relevant to our purpose, only in that case).

2) the area outside the strip $t \leq x \leq 1+t$. This consists at least of the area of two triangles with their bases on the sides of S_0 and their vertices on the lines $x = 0$, $x = 1+b$. Their joint height being b , we have: $A_2 \geq b/2$, with equality certainly if $b = 0$.

Combining, we have

$$(14) \quad \text{area } F = A_1 + A_2 \geq 1 + b/2 + \int_B^{B'} (h_1(x) + h_2(x)) dx$$

with equality if (and indeed only if) $b = 0$.

II. We define, for $B \leq x \leq B'$, the continuous function

$$(15) \quad h(x) = (h_1(x) + h_2(1+b-x))/2.$$

If in (13b) we substitute x by $f(x)$ and take into account (6), and then add the result to (13a), we obtain, by (6) and (15)

$$(16) \quad h(x) + h(z(x)) \geq x + f(x) - 1.$$

We next define, in the same interval, the function

$$h_b(x) = (-x^2 + (1+b)x - b/2)/(1+b).$$

It is easy to verify

$$(17) \quad h_b(x) + h_b(z(x)) = x + f(x) - 1.$$

We also compute

$$(18) \quad A(b) = 1 + b/2 + 2 \int_B^{B'} h_b(x) dx = 1 + b/2 + (1/3) \sqrt{2 - (1+b)^2} \left(1 + \frac{2b^2}{1+b}\right)$$

and a simple calculation shows that

$$(19) \quad A(b) \geq 1 + b/2 + (1/3) \sqrt{2 - (1+b)^2} \geq 4/3$$

if $0 \leq b < 4/13$ (which is true in our case by condition (A)), equality holding at either end if and only if $b = 0$.

III. By subtraction of (17) from (16) it follows that $\varphi(x) = h(x) - h_b(x)$ satisfies the assumption of Lemma 4.

In the second half of the integral in (14) we substitute x by $1+b-x$, and taking into account (4), combining with (15) and (18) and applying (19) and Lemma 4 we have

$$(20) \quad \begin{aligned} \text{area } F &\geq 1 + b/2 + \int_B^{B'} (h_1(x) + h_2(1+b-x)) dx = 1 + b/2 + 2 \int_B^{B'} h(x) dx \\ &= A(b) + 2 \int_B^{B'} (h(x) - h_b(x)) dx \geq A(b) \geq 4/3 \end{aligned}$$

which proves the first part of the theorem.

IV. It remains to investigate the case of equality in (20). By (19), (14) and Lemma 4, this is the case if and only if $b = 0$ and $h(x) = h_b(x)$ identically in $B \leq x \leq B'$. We are thus left with

$$(21) \quad b = 0, \quad h_0 = -x^2 + x, \quad h_1(x) + h_2(1-x) = 2h_0(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

From (21) we have in particular $h_1(0) + h_2(1) = 0$, but by (11) this implies, since $t = 0$, $h_0(0) = 0$,

$$(22) \quad h_1(0) = h_2(1) = 0.$$

Adding (13a) and (13b) (x being replaced by $f(x)$ in the latter), we now obtain, by (21), the identity $h_0(x) + h_0(z(x)) = x + f(x) - 1$, and so equality holds in both formulae (13), which now become

$$\begin{aligned} h_1(x) + h_2(f(x)) &= x + f(x) - 1 \\ h_1(1 - f(x)) + h_2(1 - x) &= x + f(x) - 1. \end{aligned}$$

Subtraction and use of (6) give

$$(23) \quad h_1(x) - h_2(1-x) = h_1(z(x)) - h_2(1-z(x))$$

identically. Consider an arbitrary x_0 , $0 < x_0 < 1$. In the notation of Lemma 3, (23) implies

$$h_1(x_0) - h_2(1-x_0) = h_1(x_1) - h_2(1-x_1) = \cdots = h_1(x_i) - h_2(1-x_i)$$

for all i . Since $h_1(x)$ and $h_2(x)$ are continuous, Lemma 3, together with (22), implies

$$h_1(x_0) - h_2(1-x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} (h_1(x_i) - h_2(1-x_i)) = h_1(0) - h_2(1) = 0$$

and since x_0 was arbitrary, we have for all x , $0 < x < 1$,

$$h_1(x) - h_2(1-x) = 0$$

and by continuity this holds for the closed interval $[0, 1]$. Combining with (21) and considering that $h_0(x) = h_0(1-x)$ identically,

$$h_1(x) = h_2(x) = h_0(x) = -x^2 + x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

But this is precisely the relationship defining F_0 .

V. To complete the proof it remains to show that F_0 is actually a covering set. This has been done repeatedly (see [2], [4], [5]). A simple proof is as follows:

Let θ be the angle between a unit lattice vector and the x -axis of our coordinate system. If $\theta = 0$ or $\pi/2$, the unit square S_0 ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) contained in F_0 certainly contains a lattice point. We may therefore assume $0 < \theta < \pi/2$. Consider the point $P = (\cos \theta, 1 + h_0(\cos \theta))$ and the points Q and R , constructed as in the proof of Theorem 1 (see figure 3). Since the inequalities (13) are now identities, R lies on the lower boundary of F_0 . Consider also the reflections P' , Q' , R' of P , Q , R , with respect to the centre $(1/2, 1/2)$ of F_0 . By construction, PQ , QR , $P'Q'$, $Q'R'$ are parallel to the lattice

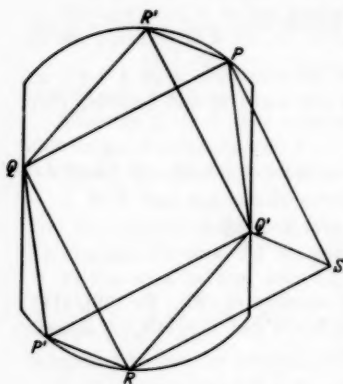


Fig. 3.

axes. Consider the unit square $PQRS$. Since its sides are parallel to the lattice axes, it contains at least one lattice point. We claim that the hexagon $PR'QP'RQ'$ also contains at least one lattice point. For, if the lattice point in $PQRS$ lie in the quadrilateral $PQRQ'$ it already lies in the hexagon; otherwise it lies either in the triangle $PQ'S$, and then another lattice point lies in $QP'R$ (and hence in the hexagon), since the latter triangle is the image of the former under a unit translation parallel to PQ , and hence carrying the lattice onto itself; or else it lies in the triangle $SQ'R$, and then, for similar reasons, another lattice point lies in $PR'Q$ (and hence in the hexa-

gon). Our claim is thus proved, and since the hexagon is contained in F_0 , we have shown that F_0 contains a lattice point. Since this is true for all values of θ , F_0 is a covering set, as was to be proved. The proof of the theorem is thus complete.

Added in proof. In a letter dated January 26, 1955, Dr. D. B. SAWYER has kindly communicated to the author an alternative proof, closely following the lines of [4], found independently by him after this paper had been accepted for publication. Dr. SAWYER's proof has also been submitted to a mathematical journal.

References.

- [1] CHRISTENSEN, C.: Kvadrat indskrevet i konveks figur. Matematisk Tidsskrift B 1950, 22—26. — [2] MASSERA, J. L., y J. J. SCHÄFFER: Figura mínima que cubre puntos de una red. Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística, Montevideo 2, 55—74 (1951). — [3] SANTALÓ, L. A.: Geometría integral de figuras ilimitadas. Publicaciones del Instituto de Matemáticas, Rosario 1, 54. — [4] SAWYER, D. B.: On the covering of lattice points by convex regions. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, Ser. (2), 4, 284—292 (1953). — [5] SCHÄFFER, J. J.: Figura mínima que cubre puntos de una red. Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística, Montevideo, (in print).

(Eingegangen am 4. Januar 1954.)

Zur Theorie der Modifikationen.

I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume.

Von

HANS GRAUERT und REINHOLD REMMERT in Münster (Westf.).

Einleitung.

In der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen kennt man seit langem analytisch inäquivalente komplexe Mannigfaltigkeiten, die im Hinblick auf ihre funktionentheoretischen Eigenschaften in vielerlei Hinsicht als nicht wesentlich voneinander verschieden erscheinen. Es gelten z. B. in allen mehrfach-projektiven komplexen Räumen die bekannten Sätze von HURWITZ-WEIERSTRASS¹⁾ und CHOW²⁾, die aussagen, daß in solchen Räumen meromorphe Funktionen stets rationale Funktionen und analytische Mengen stets algebraische Mengen sind. Aus dem Satz von HURWITZ-WEIERSTRASS folgt insbesondere, daß die Körper der meromorphen Funktionen bei allen mehrfach-projektiven Räumen gleicher Dimension isomorph sind. Der Grund für dieses Verhalten kann darin gesehen werden, daß zwei mehrfach-projektive Räume gleicher Dimension durch gewisse Abänderungsprozesse auseinander hervorgehen, unter denen viele funktionentheoretische Eigenschaften invariant sind.

Im Falle zweier komplexer Veränderlichen lassen sich z. B. der Osgoodsche Raum $P^1 \times P^1$ (kartesisches Produkt zweier Riemannscher Zahlenkugeln P^1) und der einfach-projektive Raum P^2 durch folgenden Abänderungsprozeß ineinander überführen: Im Raum $P^1 \times P^1$ wende man im Schnittpunkt s_0 der beiden unendlich fernen komplexen Geraden G_1 und G_2 den von H. HOPF

¹⁾ K. WEIERSTRASS hat den in Rede stehenden Satz für den Fall des Osgoodschen Raumes in der Arbeit: Untersuchungen über die $2r$ -fach periodischen Funktionen von r Veränderlichen, Crelles Journal 89, 1—8 (1880), ohne Beweis ausgesprochen; den ersten Beweis gab A. HURWITZ: Beweis des Satzes, daß eine einwertige Funktion beliebig vieler Variablen, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist, Crelles Journal 95, 201—206 (1883).

Für beliebige mehrfach-projektive komplexe Räume wurde der Satz von D. JACKSON bewiesen: Note on rational functions of several complex variables. Crelles Journal 146, 185—188 (1916).

²⁾ W. L. CHOW: On compact analytic varieties. Amer. Journ. of Math. 71, 893—914, (1949). Wegen weiterer Beweise siehe: H. KNESER: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51); H. CARTAN: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Proceed. Intern. Congr. of Math. 1950, vol. I, S. 152—164; R. REMMERT und K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263—306 (1953); H. CARTAN: Séminaire 1953/54, Exp. XIV sowie W. STOLL: Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen. Math. Z. 60, 287—304 (1954).

beschriebenen σ -Prozeß³⁾ an, d. h. man setze in s_0 in bestimmter Weise eine Riemannsche Zahlenkugel P_0^1 ein. Die unendlich fernen Punkte des entstandenen Raumes X bestehen alsdann aus den drei komplexen Geraden G_1, G_2, P_0^1 , von denen G_1 und G_2 unter sich keinen und mit P_0^1 jeweils genau einen Schnittpunkt haben. Andererseits zeigt sich, daß man ebenfalls den Raum X erhält, wenn man in den Schnittpunkten s_1, s_2 der Achsen des einfach-projektiven Raumes P^2 mit der unendlich fernen Geraden P_0^1 den σ -Prozeß anwendet. Die eingesetzten Sphären stimmen dann mit den obigen Geraden G_1 und G_2 überein. — Der Übergang von $P^1 \times P^1$ zu P^2 kann also durch den σ -Prozeß und seine Umkehrung beschrieben werden⁴⁾. Der σ -Prozeß nebst seiner Umkehrung stellt aber, wie man aus der algebraischen Geometrie⁵⁾ weiß, einen Abänderungsprozeß dar, der auf die Funktionentheorie in vielerlei Hinsicht keinen Einfluß hat.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, allgemein solche im Sinne der Funktionentheorie „zulässigen Abänderungsprozesse“ zu untersuchen und insbesondere danach trachten, diejenigen Abänderungsprozesse näher zu beschreiben, die die Ringe der holomorphen bzw. die Körper der meromorphen Funktionen invariant lassen. Einen ersten Schritt in dieser Richtung taten H. BEHNKE und K. STEIN⁶⁾. Ausgehend von der Frage nach den möglichen Abschließungen des n -dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n gelangten sie zum Begriff der „Modifikation“, der als eine erste Präzisierung des Begriffes der „funktionentheoretisch zulässigen Abänderung“ angesehen werden kann.

Sind zwei komplexe Räume X und X' (das sind komplexe Mannigfaltigkeiten mit algebroiden Singularitäten; genaue Definition siehe § 1) vorgegeben und ist N eine abgeschlossene Punktmenge in X , so daß $X - N$ nicht leer und zusammenhängend ist, so heißt nach H. BEHNKE und K. STEIN der komplexe Raum X' eine Modifikation von X in N , wenn $X - N$ Teilgebiet von X' ist, und wenn es zu jeder Umgebung $U(N) \subset X$ und zu jedem Punkt $x \in N = X - (X - N)$ eine Umgebung $U'(x) \subset X'$ gibt, derart, daß $U'(x) \cap (X - N)$ in $U(N) - N$ enthalten ist. — Durch diese Definition wird in der Tat ein Abänderungsprozeß beschrieben: der komplexe Raum X wird durch Ersetzen der Menge $N \subset X$ durch die Punkte einer neuen Menge N' zu einem komplexen Raum X' abgeändert.

³⁾ H. HOFF: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. appl. Serie V, 10, 169–182 (1951), sowie H. HOFF: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. 29, 132–155 (1955).

⁴⁾ Generell lassen sich zwei mehrfach-projektive komplexe Räume gleicher Dimension durch einen verallgemeinerten σ -Prozeß (monoidale Transformation) und seine Umkehrung ineinander überführen. Vgl. hierzu: E. KREYSZIG: Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 128, 479–492 (1955); gewisse Resultate der vorliegenden Arbeit sind hier für komplexe Mannigfaltigkeiten bereits angegeben.

⁵⁾ Nach W. V. D. HODGE und D. PEDOE: Methods of Algebraic Geometry III, Cambridge University Press (1954), S. 222 ist ein σ -Prozeß nebst seiner Umkehrung eine birationale Transformation.

⁶⁾ H. BEHNKE und K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124, 1–16 (1951).

Der vorliegenden Arbeit liegt ebenfalls der soeben angegebene Modifikationsbegriff zugrunde. Wir fordern allerdings nicht, daß $X - N$ ein Teilgebiet von X ist, sondern lediglich, daß es ein Teilgebiet $X - N$ von X gibt, das durch eine holomorphe Abbildung τ auf $X - N$ eindeutig bezogen ist. Im übrigen setzen wir voraus, daß die abgeschlossene Menge N lokal jeweils in einer von X verschiedenen analytischen Menge enthalten ist (zur genauen Definition vgl. Def. 1, § 1). Einfache Beispiele zeigen nun⁷⁾, daß bei solchen allgemeinen Modifikationen nicht zu erwarten ist, daß funktionentheoretische Invarianzaussagen, wie sie hier interessieren, gelten können. Daher engen wir den allgemeinen Begriff der Modifikation sofort durch eine Zusatzforderung zum Begriff der stetigen Modifikation ein. Wir nennen einen komplexen Raum X eine stetige Modifikation eines komplexen Raumes X , wenn X eine Modifikation von X ist und wenn jede Umgebung U eines beliebigen Punktes aus der zu ersetzenden Menge $N \subset X$ bei Ersetzung der in U liegenden Punkte von N durch Punkte von N in eine Umgebung eines jeden dieser neuen Punkte übergeht (präzise Fassung siehe Def. 3, § 1). Es zeigt sich (Satz 2, § 2), daß eine Modifikation X eines komplexen Raumes X genau dann eine stetige Modifikation ist, wenn die eindeutige holomorphe Modifikationsabbildung τ von $X - N$ auf $X - N$ zu einer holomorphen (nicht notwendig eindeutigen) Abbildung von X in X fortsetzbar ist. Man könnte daher die Fortsetzbarkeit der Modifikationsabbildung τ direkt zur Definition der stetigen Modifikation erheben. Eine solche Definition scheint den Verff. jedoch nicht angemessen, da sie sich zu sehr von der intuitiven Grundvorstellung der stetigen Modifikation, die rein topologischer Natur ist, entfernen würde.

Bei einer stetigen Modifikation kann die Menge $N \subset X$ stets so klein gewählt werden, daß kein Punkt von N nur durch einen Punkt von N ersetzt wird (Satz 3, § 2); solche Modifikationen nennen wir wesentliche Modifikationen. Für wesentliche Modifikationen zeigen wir (Satz 4, § 2), daß die Menge N stets eine analytische Menge in X ist, die, falls der Raum X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, entweder leer oder rein $(n - 1)$ -dimensional ist.

Bei einer stetigen wesentlichen Modifikation ist die Menge $N \subset X$ im allgemeinen noch keine analytische Menge in X , wie ein Beispiel in § 4 zeigt. Das erreicht man erst, wenn man den Begriff der stetigen Modifikation noch weiter zum Begriff der eigentlichen Modifikation einschränkt (Satz 5, § 3). Unter einer eigentlichen Modifikation X eines komplexen Raumes X wird dabei eine stetige Modifikation verstanden, bei der die (fortgesetzte) Modifikationsabbildung τ von X in X eine eigentliche Abbildung im Sinne von N. BOURBAKI⁸⁾ ist, d. h. bei der die Urbildmengen kompakter Mengen kompakt sind.

Bei einer eigentlichen wesentlichen Modifikation eines n -dimensionalen komplexen Raumes X ist die Menge N stets eine höchstens $(n - 2)$ -dimen-

⁷⁾ Vgl. hierzu auch W. STOLL: Über meromorphe Modifikationen. Habilitationsschrift Tübingen 1954, S. 7.

⁸⁾ N. BOURBAKI: Topologie Générale, 2. Aufl., Chap. 1, § 10.9.

sionale analytische Menge in X (Satz 7, § 3). Daraus folgt (Satz 8, § 3), daß bei jeder eigentlichen Modifikation die Ringe der holomorphen und die Körper der meromorphen Funktionen der Räume X und X' kanonisch isomorph sind. Eigentliche Modifikationen sind daher „funktionentheoretisch zulässige Änderungen“ im eingangs erwähnten Sinne.

§ 3 enthält ferner noch eine Aussage über den komplexen Raum X in der Umgebung der eingesetzten Menge N . Wir beweisen, daß in hinreichender Nähe jeder irreduziblen Komponente von N keine mit dieser Komponente gleichdimensionale analytische Menge liegen kann, die von derselben verschieden ist (Satz 10). Mittels dieses Kriteriums kann gezeigt werden, daß der komplex-projektive Raum P^n nicht durch eine eigentliche wesentliche Modifikation aus einem zu ihm analytisch inäquivalenten komplexen Raum erzeugt werden kann.

§ 4 enthält Beispiele für Modifikationen. Es wird insbesondere eine eigentliche wesentliche Modifikation angegeben, in der die Menge N nicht von der maximalen Dimension $n-1$ und mithin der komplexe Raum X keine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

§ 1. Der Begriff der Modifikation.

Wir stellen in diesem Paragraphen grundlegende Begriffe zusammen. Es ist zweckmäßig, neben komplexen Mannigfaltigkeiten sogleich komplexe Räume zu betrachten. Zu dem Zwecke führen wir zunächst den Begriff der analytisch-verzweigten Überlagerung ein⁹⁾.

Ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum R heißt eine *analytisch-verzweigte Überlagerung* des n -dimensionalen Einheitspolyzylinders $Z^n: \{|z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}$, wenn folgendes gilt:

1. R ist durch eine stetige eigentliche Abbildung Φ auf Z^n bezogen. Der Punkt $r \in R$ heißt über dem Punkt $z = \Phi(r) \in Z^n$ gelegen. Über jedem Punkt $z \in Z^n$ liegen nur endlich viele Punkte von R .

2. Es gibt eine (evtl. leere) analytische Menge M in Z^n , derart, daß $\Phi^{-1}(M)$ in R nirgends dicht liegt und daß $\tilde{R} = R - \Phi^{-1}(M)$ durch Φ lokal-topologisch auf $Z^n - M$ bezogen ist.

3. Zu jedem Punkt $r \in R$ gibt es beliebig kleine Umgebungen¹⁰⁾ $U(r)$, derart, daß $U(r) - U(r) \cap \Phi^{-1}(M)$ zusammenhängend ist^{10a)}.

Die Punkte von R , in denen Φ nicht lokal-topologisch ist, heißen Verzweigungspunkte von R . Unter der Dimension von R wird die komplexe Dimension des Polyzylinders Z^n verstanden.

⁹⁾ Wir führen in dieser Arbeit den Begriff des komplexen Raumes im Anschluß an H. BEHNKE und K. STEIN loc. cit.⁹⁾ ein. H. CARTAN: Séminaire 1951/52, Exp. XIII und Séminaire 1953/54, Exp. VI gibt eine andere Definition (espace analytique général). Jeder komplexe Raum im Sinne von H. CARTAN ist ein komplexer Raum im Sinne von H. BEHNKE und K. STEIN.

¹⁰⁾ Unter Umgebungen werden im folgenden stets offene Mengen verstanden.

^{10a)} Man kann zeigen, daß Φ eine offene Abbildung von R auf Z^n ist; vgl. hierzu die demnächst erscheinende Arbeit der Verf.: Analytisch verzweigte Überlagerungen und komplexe Räume.

In analytisch-verzweigten Überlagerungen läßt sich der grundlegende Begriff der holomorphen (und damit dann auch der meromorphen) Funktion einführen.

Eine stetige, komplex-wertige Funktion g auf einer offenen Menge $W \subseteq R$ heißt eine holomorphe Funktion auf W , wenn es zu jedem Punkt $r \in R \cap W$ eine Umgebung $U(r) \subseteq W$ gibt, die durch Φ topologisch auf $\Phi(U(r)) \subseteq \mathbb{C}^n$ abgebildet wird, derart, daß $g \circ \Phi^{-1}$ eine holomorphe Funktion in $\Phi(U(r))$ ist.

Eine Abbildung $\Gamma: W \rightarrow \mathbb{C}^n$ einer offenen Menge $W \subseteq R$ in den \mathbb{C}^n werde holomorph genannt, wenn die die Abbildung beschreibenden Funktionen $z_v = f_v(r)$ ($v = 1, \dots, n$; $r \in W$) holomorphe Funktionen auf W sind.

Sind R, R' (mit zugehörigen Projektionsabbildungen Φ, Φ') zwei analytisch-verzweigte Überlagerungen, so heißt eine stetige Abbildung $\Gamma: W \rightarrow R'$ einer offenen Menge $W \subseteq R$ in R' eine holomorphe Abbildung, wenn $\Phi' \circ \Gamma: W \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung ist. Ist $\Gamma: W \rightarrow R'$ eine holomorphe eindeutige Abbildung von W auf $\Gamma(W)$, so ist die Umkehrabbildung $\Gamma^{-1}: \Gamma(W) \rightarrow W$ ebenfalls eine holomorphe Abbildung^{10b)}.

Unter einer *komplex-analytischen Struktur* auf einem Hausdorffschen Raum X wird folgendes verstanden:

1. X ist mit einer Überdeckung \mathfrak{U} von lokalen Koordinatensystemen (U_j, ψ_j) ($j \in J$, J eine Indexmenge) versehen. Dabei wird unter einem lokalen Koordinatensystem (U, ψ) eine offene Menge $U \subseteq X$ verstanden, die durch eine fest vorgegebene topologische Abbildung $\psi: U \rightarrow W$ auf eine offene Menge W einer analytisch-verzweigten Überlagerung R bezogen ist.

2. Sind (U_i, ψ_i) und (U_j, ψ_j) zwei lokale Koordinatensysteme aus \mathfrak{U} mit nichtleerem Durchschnitt $U_i \cap U_j$, so ist die topologische Abbildung $\psi_j \circ \psi_i^{-1}: \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$ eine holomorphe Abbildung. Wir sagen, (U_i, ψ_i) und (U_j, ψ_j) hängen holomorph zusammen.

3. Ist (U, ψ) ein lokales Koordinatensystem, das mit sämtlichen $(U_j, \psi_j) \in \mathfrak{U}$ holomorph zusammenhängt, so gilt $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ (Maximalitätsforderung).

Erfüllt eine vorgegebene Überdeckung \mathfrak{U} zunächst nur die Bedingungen 1. und 2., so kann man \mathfrak{U} durch Maximalisierung zu einer komplex-analytischen Struktur machen.

Einen zusammenhängenden Hausdorffschen Raum X mit einer fest vorgegebenen komplex-analytischen Struktur nennen wir einen *komplexen Raum*. Ihm kommt eine eindeutige bestimmte komplexe Dimension zu (denn alle R_j sind gleichdimensional). Ist X ein n -dimensionaler komplexer Raum, so schreiben wir: $X = X^n$.

Ein Punkt x eines komplexen Raumes X heißt ein *uniformisierbarer Punkt* von X , wenn es ein lokales Koordinatensystem $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ gibt, derart, daß $x \in U$ und ψ die Menge U auf die triviale Überlagerung des Einheitspolyzylinders, d. h. also auf den Einheitspolyzylinder selbst abbildet. Ein komplexer Raum mit lauter uniformisierbaren Punkten heißt eine *komplexe Mannigfaltigkeit*.

In jedem offenen zusammenhängenden Teil X^* eines komplexen Raumes (bzw. einer komplexen Mannigfaltigkeit) X wird in natürlicher Weise durch

^{10b)} Dies ist nicht völlig trivial. Man hat zum Beweise im wesentlichen zu zeigen, daß Γ eine offene Abbildung ist. Vgl. H. GRAUERT und R. REMMERT loc. cit. ^{10a)}.

die komplex-analytische Struktur von X eine komplex-analytische Struktur induziert, die X^* zu einem komplexen Raum (bzw. einer komplexen Mannigfaltigkeit) macht. Ferner ist das kartesische Produkt zweier komplexer Räume (bzw. zweier komplexer Mannigfaltigkeiten) in natürlicher Weise mit einer komplex-analytischen Struktur versehen und mithin ein komplexer Raum (bzw. eine komplexe Mannigfaltigkeit).

Die Gesamtheit aller uniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes X bildet eine komplexe Mannigfaltigkeit \check{X} , die eine dichte zusammenhängende Teilmenge von X ist.

Die Begriffe der holomorphen und meromorphen Funktion sowie der holomorphen Abbildung von komplexen Räumen ineinander usw. lassen sich nun in bekannter Weise definieren; wir gehen darauf nicht näher ein. Dagegen ist es unzweckmäßig, die analytische Menge als gleichzeitiges Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen zu definieren, da es noch unbekannt ist, ob es auf jeder analytisch-verzweigten Überlagerung R eine holomorphe Funktion f gibt, deren Verzweigungsverhalten mit dem von R übereinstimmt. Vielmehr heiße eine Teilmenge M eines komplexen Raumes X eine *analytische Menge* in X , wenn es zu jedem Punkt von X eine Umgebung U gibt, derart, daß $M \cap U$ Bildmenge einer eigentlichen, nirgends entarteten, holomorphen Abbildung λ von endlich vielen komplexen Räumen $'X_1, \dots, 'X_k$ in U ist. Eine holomorphe Abbildung λ eines komplexen Raumes $'X$ in einen komplexen Raum X heißt dabei nirgends entartet, wenn $\lambda^{-1}(x)$ für $x \in X$ stets aus isolierten Punkten besteht. Unter der Dimension einer analytischen Menge A in einem Punkt $x \in A$ verstehen wir die maximale Dimension der komplexen Räume $'X_1, \dots, 'X_k$, deren λ -Bild x enthält. Es läßt sich zeigen, daß die Dimension von A unabhängig von der Wahl der $'X_1, \dots, 'X_k$ definiert ist^{10c)}.

Man kann zeigen, daß das gleichzeitige Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen immer eine analytische Menge ist. Umgekehrt kann man jede analytische Menge einer komplexen Mannigfaltigkeit lokal als gleichzeitiges Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen darstellen¹¹⁾.

Für analytische Mengen im hier definierten Sinne gelten ähnliche Resultate wie für analytische Mengen in komplexen Mannigfaltigkeiten. Zum Beispiel zerlegt eine niederdimensionale analytische Menge in einem komplexen Raum den Raum nicht und liegt dort nirgends dicht^{10c)}.

Ist X irgendein komplexer Raum und M irgendeine irreduzible analytische Menge in X , so kann M im allgemeinen nicht als ein komplexer Raum (bzgl. der induzierten Struktur) aufgefaßt werden. Der Menge M läßt sich jedoch ein komplexer Raum Y zuordnen: In jedem Punkt $x \in M$ zerfällt M in endlich viele analytische Primkeime p_x . Bildet man die Menge aller Paare (x, p_x) , wo $x \in M$, so läßt sich in $\{(x, p_x)\}$ in natürlicher Weise eine Topologie

^{10c)} Vgl. hierzu wieder H. GRAUERT und R. REMMERT, loc. cit. ^{10a)}, wo grundlegende Aussagen dieser Art exakt bewiesen werden.

¹¹⁾ Dieser Satz wurde von R. REMMERT bewiesen: Holomorphe und meromorphe Abbildungen analytischer Mengen, erscheint demnächst in den Math. Ann.; vgl. ferner: K. STEIN: Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Colloque de Topologie de Strasbourg, Avril 1954.

und eine komplex-analytische Struktur einführen, so daß die Abbildung $(x, p_x) \rightarrow x$ stetig und holomorph ist. Dadurch wird $\{(x, p_x)\}$ zu einem komplexen Raum Y . Wir nennen Y den durch M erzeugten komplexen Raum^{11a)}. — Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und hat M nur gewöhnliche Punkte, so ist Y eine zu M analytisch homöomorphe komplexe Mannigfaltigkeit. Ist M nicht irreduzibel, so kann in analoger Weise ein nicht zusammenhängender komplexer Raum Y definiert werden, dessen zusammenhängende Komponenten den irreduziblen Komponenten von M entsprechen.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir nun den Begriff der Modifikation ein. Wir folgen mit einer geringfügigen Abweichung der Definition von H. BEHNKE und K. STEIN¹²⁾.

Def. 1: Ein Quintupel $(X, 'X, \tau, N, X)$ heiße eine Modifikation, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $'X, X$ sind gleichdimensionale komplexe Räume; $'N$ bzw. N sind abgeschlossene, evtl. leere Mengen in $'X$ bzw. X , die von $'X$ bzw. X verschieden sind.

2. Es gibt zu jedem Punkt $x \in N$ eine zusammenhängende Umgebung $U(x)$ mit einer $N \cap U(x)$ umfassenden analytischen Menge $M \neq U$. (Wir sagen: N ist dünn in X .)

3. $\tau: X - N \rightarrow X - N$ bildet den Raum $'X - N$ eineindeutig und holomorph auf den Raum $X - N$ ab.

4. Ist U eine beliebige Umgebung von N , so enthält die Vereinigung von $\tau^{-1}(U - N)$ mit $'N$ stets eine Umgebung von $'N$.

Wir sagen auch: Der komplexe Raum $'X$ ist eine Modifikation des komplexen Raumes X bzw. der komplexe Raum $'X$ geht durch eine Modifikation in der Menge $N \subseteq X$ aus dem komplexen Raum X hervor.

Die Bedingung 4. stimmt mit der Forderung b) bei H. BEHNKE und K. STEIN überein¹²⁾.

Def. 2: Zwei Modifikationen $(X_i, 'N_i, \tau_i, N_i, X_i)$ ($i = 1, 2$) werden äquivalent genannt, wenn gilt: $'X_1 = 'X_2$, $X_1 = X_2$ und $\tau_1^{-1}(x) = \tau_2^{-1}(x)$ für jedes $x \in X_1 - (N_1 \cup N_2)$.

Als Beispiel¹³⁾ einer Modifikation betrachten wir das Quintupel $(X, 'N, \tau, N, X)$, wobei $'X$ bzw. X den zweidimensionalen Osgoodschen Raum mit den Variablen $'z_1, 'z_2$ bzw. z_1, z_2 bezeichnen soll und $'N$ bzw. N die komplexen Geraden $'z_1 = 0$ bzw. $z_1 = 0$ sein sollen. τ sei die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 'z_1 \\ z_2 &= 'z_2 \cdot e^{i\tau_1^{-1}} \end{aligned}$$

vermittelte Abbildung. Man überlegt sofort, daß eine Modifikation im Sinne von Definition 1 vorliegt; man sieht ferner, daß die in X meromorphe Funktion z_2 vermöge τ in die Funktion $'z_2 \cdot e^{i\tau_1^{-1}}$ übergeht, die auf $'N$ wesentlich singulär ist. Ebenso gibt es analytische Mengen in X (z. B. sämtliche Ebenen $z_2 = a$

^{11a)} Hinsichtlich der genauen Beschreibung vgl. H. GRAUERT und R. REMMERT, loc. cit. ^{10a)}.

¹²⁾ H. BEHNKE und K. STEIN loc. cit. ⁶⁾.

¹³⁾ Siehe W. STOLL, loc. cit. ⁷⁾.

mit $a \neq 0$, $a \neq \infty$), deren durch τ vermitteltes Bild in $'X$ auf der Ebene $'z_1 = 0$ wesentliche Singularitäten hat.

Das angegebene Beispiel zeigt, daß der eingeführte Begriff der Modifikation für unsere Belange noch zu weit gefaßt ist. Wir schränken ihn daher durch eine Verschärfung der Bedingung 4., Def. 1 ein.

Def. 3: Eine Modifikation $('X, 'N, \tau, N, X)$ heiße eine stetige Modifikation, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

4'. Ist (U_j) , $j \in J$, eine beliebige offene Überdeckung von N , so enthält jede Menge $\tau^{-1}(U_j - U_j \cap N) \cup 'N$ eine offene Menge V_j , derart, daß die Vereinigung $\bigcup_{j \in J} V_j$ eine Umgebung von $'N$ ist.

Diese Definition kann als eine Präzisierung dessen angesehen werden, was man sich intuitiv unter einer zulässigen Einsetzung einer Menge $'N$ in eine Menge N vorstellt. Man möchte jedenfalls erreichen, daß eine jede Umgebung U eines beliebigen Punktes $x \in N$ nach erfolgter Ersetzung der Punkte von $U \cap N$ durch gewisse Punkte von $'N$ in eine Umgebung $'U$ dieser Punkte übergeht. Das aber wird genau durch Definition 3 gewährleistet. Man sieht am obigen Beispiel, daß bei allgemeinen Modifikationen diese Eigenschaft gewissen Umgebungen $U(x)$ nicht zukommt.

§ 2. Eigenschaften stetiger Modifikationen.

Eine grundlegende Eigenschaft stetiger Modifikationen formulieren wir in

Hilfssatz 1: Ist $('X, 'N, \tau, N, X)$ eine stetige Modifikation, so ist die Abbildung $\tau: 'X - 'N \rightarrow X - N$ in jeden Randpunkt von $'N$ stetig fortsetzbar.

Beweis: Sei $'x \in 'N$ irgendein Randpunkt von $'N$; sei $'x_r \in 'X - 'N$ irgendeine gegen $'x$ konvergierende Folge. Um zu zeigen, daß $\tau('x_r) \in X - N$ gegen einen Punkt $x \in N$ konvergiert, wählen wir eine offene Überdeckung (U_j) von N durch relativ-kompakte Mengen U_j . Der Punkt $'x$ ist in wenigstens einer der Mengen V_j enthalten, die nach Definition 3 den U_j zugeordnet sind. Da fast alle $'x_r$ in der Menge $V_j - V_j \cap 'N$ liegen und dieselbe durch τ in $U_j - U_j \cap N$ abgebildet wird, liegen fast alle $\tau('x_r)$ in $U_j - U_j \cap N$. Die Folge $\tau('x_r)$ besitzt daher einen Häufungspunkt x auf N . Da die Überdeckung (U_j) von N beliebig fein gewählt werden kann, kann es nicht zwei verschiedene Häufungspunkte geben. Aus diesem Grunde ist x unabhängig von der Wahl der Folge $'x_r$ eindeutig durch den Punkt $'x$ bestimmt. Erklärt man nun als τ -Bild von $'x$ den Punkt x , so hat man die gewünschte stetige Fortsetzung von τ .

Aus Hilfssatz 1 folgt

Satz 1: Ist $('X, 'N, \tau, N, X)$ eine stetige Modifikation, so gibt es zu jedem Punkt $'x \in 'N$ eine zusammenhängende Umgebung $'U$ mit einer $'N \cap 'U$ umfassenden analytischen Menge $'M \neq 'U$. ($'N$ ist dünn in $'X$.)

Den Beweis dieses Satzes stützen wir auf eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von T. RADÓ¹⁴⁾: Eine in einem komplexen Raum X stetige und außerhalb ihrer Nullstellen holomorphe Funktion ist holomorph in X .

¹⁴⁾ T. RADÓ: Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. 20, 1—6 (1924); H. BEHNKE und K. STEIN loc. cit.⁴⁾ und H. CARTAN: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. 125, 49—50 (1952).

Wir zeigen zunächst: $'N$ ist in einer Umgebung $'U$ eines jeden Randpunktes $'x \in 'N$ dünn. Sei $x = \tau('x)$ das Bild der nach Hilfssatz 1 in $'x$ stetig fortgesetzten Abbildung τ . In einer Umgebung $U(x)$ existiert eine holomorphe, nirgends identisch verschwindende Funktion f , die auf $U \cap N$ verschwindet. Sei $'U$ eine zusammenhängende Umgebung von $'x$, derart, daß alle Punkte von $'U$, die nicht zum offenen Kern von $'N$ gehören, durch die fortgesetzte Abbildung τ in U abgebildet werden. Die Funktion $f \cdot \tau$ ist in $'U - 'N \cap 'U$ holomorph und wird durch die Forderung $f \cdot \tau('N \cap 'U) = 0$ zu einer in ganz $'U$ stetigen Funktion $'f$ fortgesetzt. Nach dem verallgemeinerten Satz von T. RADÓ ist dann $'f$ in ganz $'U$ holomorph und damit $'N \cap 'U$ im Nullstellengebilde einer in $'U$ holomorphen Funktion enthalten, die nach Konstruktion in $'U$ nicht identisch verschwindet.

Zeigen wir noch: jeder Punkt von $'N$ ist Randpunkt von $'N$, so ist offenbar Satz 1 bewiesen. Angenommen, es gäbe einen inneren Punkt $'x_0 \in 'N$. Sei $'x(t)$ eine $'x_0$ mit einem Randpunkt $'x$ von $'N$ verbindende Kurve. Wegen der Abgeschlossenheit von $'N$ gäbe es von $'x_0$ her einen ersten Randpunkt $'x_1$ von $'N$ auf $'x(t)$. In jeder Umgebung von $'x_1$ lägen dann innere Punkte von $'N$. Das aber ist nach dem bereits bewiesenen unmöglich, denn in einer zusammenhängenden Umgebung $'U('x_1)$ ist $'N$ in einer von $'U$ verschiedenen analytischen Menge enthalten.

Anmerkung: Satz 1 steht in enger Beziehung zu einem von H. BEHNKE und K. STEIN bewiesenen Satz¹⁵⁾. Die dort gemachte Voraussetzung, daß N im Nullstellengebilde einer in einer vollen Umgebung $U(N)$ definierten, nirgends identisch verschwindenden, holomorphen Funktion enthalten ist, konnte hier durch die schwächere Bedingung 2. der Def. 1 ersetzt werden.

Es schließt sich an:

Satz 2: Eine Modifikation $(X, 'N, \tau, N, X)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $\tau: X - 'N \rightarrow X - N$ zu einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow X$ von X in X fortsetzbar ist.

Beweis: Ist $\tau: X - 'N \rightarrow X - N$ zu einer holomorphen und also auch stetigen Abbildung $\tau: X \rightarrow X$ von X in X fortsetzbar, so ist die vorgegebene Modifikation, wie man unmittelbar sieht, stetig. Wir beweisen die Umkehrung. Da nach Satz 1 die Menge $'N$ sicher nirgends dicht in X ist, ist $\tau: X - 'N \rightarrow X - N$ nach Hilfssatz 1 zu einer stetigen Abbildung von X in X fortsetzbar. Da ferner $'N$ in der Umgebung $'U$ eines jeden Punktes $'x \in 'N$ in einer analytischen Menge $'M \neq 'U$ enthalten ist, so folgt nach einem bekannten Satz von RIEMANN über hebbare Singularitäten die Behauptung.

Im folgenden werden ausschließlich stetige Modifikationen betrachtet. Unter τ werde fortan stets die nach Satz 2 fortgesetzte Modifikationsabbildung von X in X verstanden.

Ist $(X, 'N, \tau, N, X)$ irgendeine stetige Modifikation, so kann man in vielen Fällen eine äquivalente Modifikation $(X, \hat{N}, \tau, \hat{N}, X)$ finden, bei der die Menge \hat{N} in der Menge N echt enthalten ist. Ein einfaches Beispiel hierzu wird durch die stetige Modifikation $(C^n, '0, \tau, 0, C^n)$ gegeben, wobei $'0$ bzw. 0

¹⁵⁾ H. BEHNKE und K. STEIN loc. cit⁹⁾, Satz 2, S. 14.

den Nullpunkt des n -dimensionalen komplexen Zahlenraumes und τ die identische Abbildung dieses Raumes auf sich bezeichnet. Die angegebene Modifikation ist äquivalent zur trivialen Modifikation (C^n, A, τ, A, C^n) , wobei A bzw. A die leere Menge ist.

Wir betrachten im folgenden Modifikationen, die nicht von dieser Beschaffenheit sind.

Def. 4: Eine stetige Modifikation $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$ heißt eine stetige wesentliche Modifikation, wenn es keine äquivalente stetige Modifikation $(X, \hat{N}, \tau, \hat{N}, X)$ gibt, derart, daß die Menge \hat{N} echt in der Menge \dot{N} enthalten ist.

Aus dieser Definition folgt sofort:

Eine stetige Modifikation $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$ ist dann und nur dann wesentlich, wenn es keine äquivalente stetige Modifikation $(X, \hat{N}, \tau, \hat{N}, X)$ gibt, derart, daß die Menge \hat{N} echt in der Menge \dot{N} enthalten ist.

Es gilt weiter

Satz 3: Zu jeder stetigen Modifikation $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$ gibt es genau eine äquivalente stetige, wesentliche Modifikation $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$. Die Menge \dot{N} ist eine (evtl. leere) analytische Menge in X , die keine isolierten Punkte enthält.

Zum Beweise sind größere Vorbereitungen erforderlich. Wir führen zunächst den Begriff des lokalen Ranges einer holomorphen Abbildung ein.

Seien X und X zwei komplexe Räume (nicht notwendig gleicher Dimension), sei $\tau: X \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung von X in X . Ist $x \in X$ irgendein Punkt, so verstehen wir unter der Fasermenge von τ über x die in X analytische (evtl. leere) Menge $\tau^{-1}(x)$ ^{15a)}.

Unter dem lokalen Rang r der Abbildung τ in einem Punkt $x \in X$ verstehen wir die natürliche Zahl $n - k$, wobei n die Dimension von X und k die Dimension derjenigen analytischen Menge bezeichnet, die aus sämtlichen durch x laufenden, in X irreduziblen Komponenten der Fasermenge von τ über $\tau(x)$ besteht.

Es gilt nun der

Satz: Die Gesamtheit der Punkte $x \in X$, in denen der lokale Rang einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow X$ kleiner als eine fest vorgegebene natürliche Zahl ist, bildet eine analytische Menge in X ¹⁶⁾.

Nennt man einen Punkt $x \in X$ eine Entartungsstelle der holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow X$, wenn der lokale Rang von τ in x kleiner als die komplexe Dimension von X ist, so folgt insbesondere:

Die Gesamtheit aller Entartungsstellen einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow X$ bildet eine analytische Menge in X (Entartungsmenge der Abbildung τ).

Nun zum Beweis von Satz 3! Es sei $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$ die vorgegebene stetige Modifikation. Wir definieren als Menge \dot{N} die Entartungsmenge der Abbildung τ und als Menge \dot{N} die Menge $X - \tau(X - \dot{N})$. \dot{N} ist nach dem

^{15a)} Daß bei der hier gegebenen Definition der analytischen Menge die Urbilder analytischer Mengen bezüglich holomorpher Abbildungen analytische Mengen sind, ist nicht selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises. Vgl. hierzu H. GRAUERT und R. REMMERT, loc. cit. ^{10a)}.

¹⁶⁾ Vgl. R. REMMERT sowie auch K. STEIN, loc. cit. ¹¹⁾.

vorstehenden eine analytische Menge in $'X$ und nach Definition in $'N$ enthalten; daraus folgt, daß \dot{N} in N enthalten und mithin dünn in X ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\tau: X - \dot{N} \rightarrow X - \dot{N}$ eine eindeutige offene Abbildung ist. Wir ziehen folgenden, weiter unten bewiesenen Hilfssatz heran.

Hilfssatz 2: *Es seien $X, 'X$ zwei n -dimensionale komplexe Räume; es sei $\tau: X \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung von X in X . Dann ist τ eine offene Abbildung in jeder offenen Teilmenge von $'X$, die keine Entartungsstellen von τ enthält).*

Aus diesem Hilfssatz folgt zunächst, daß τ eine offene Abbildung von $'X - \dot{N}$ auf $X - \dot{N}$ ist. Daher ist \dot{N} eine abgeschlossene Menge in X .

Wäre $\tau: X - \dot{N} \rightarrow X - \dot{N}$ nicht eindeutig, so gäbe es zwei verschiedene Punkte $'x_1, 'x_2$ in $'X - \dot{N}$ mit $\tau('x_1) = \tau('x_2) = x$. Nach Hilfssatz 2 existieren punktfremde Umgebungen $'U('x_1)$ und $'U('x_2)$ sowie eine Umgebung $U(x)$, derart, daß jeder Punkt aus $U(x)$ Bild wenigstens eines Punktes aus $'U('x_1)$ und $'U('x_2)$ ist. Da N dünn in X ist, gäbe es also auch einen Punkt $\tilde{x} \in U(x) - U(x) \cap N$ mit dieser Eigenschaft. Das ist jedoch nicht möglich, da jeder Punkt aus $X - N$ genau ein τ -Urbild hat.

Nach Konstruktion enthält \dot{N} keine isolierten Punkte. Weiter ist klar, daß bei jeder zu $(X, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X)$ äquivalenten Modifikation $(X, \hat{N}, \tau, \hat{N}, X)$ die Menge \hat{N} die Menge \dot{N} umfaßt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 2. Da die Behauptung des Hilfssatzes lokaler Natur ist, dürfen wir annehmen, daß $'X$ und X analytisch verzweigte Überlagerungen $'R$ und R mit den zugehörigen Überlagerungsabbildungen Φ und ϕ sind. Es sei $\tau: R \rightarrow R$ in R nirgends entartet. Wir haben zu zeigen, daß es um jeden Punkt $x \in R$ eine beliebig kleine Umgebung $'V(x)$ gibt, derart, daß $\tau('V)$ eine Umgebung von $x = \tau(x)$ überdeckt.

Die Abbildung $\Phi \tau$ ist in $'R$ nirgends entartet. Nach einem Satz über Abbildungen durch holomorphe Funktionen^{10a)} gibt es daher um $'x$ eine beliebige kleine Umgebung $'V$ und um $\Phi(x)$ eine Hyperkugel H , derart, daß $\Phi \tau$ den Bereich $'V$ eigentlich in H abbildet. $'V$ wird daher durch τ eigentlich in $V = \tau^{-1}(H) \subset R$ abgebildet. $\Phi \tau$ hat als nicht entartete Abbildung in den uniformisierbaren Punkten von R eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante Δ . Die in $'V$ abgeschlossene Hülle der Nullstellenmenge von Δ ist eine analytische Menge $'A_1$ in $'V$ ^{10b)}. Wir setzen $'A = 'A_1 \cup \Phi^{-1}('M)$, wobei $'M$ eine analytische Menge ist, über der alle Verzweigungspunkte von $'R$ liegen. $A = \tau('A)$ ist eine analytische Menge in V ; denn A ist Bild einer eigentlichen, nirgends entarteten holomorphen Abbildung des durch $'A$ erzeugten komplexen Raumes $*'A$ in V . A ist eine niederdimensionale analytische Menge in V und liegt deshalb dort nirgends dicht. Ist U ein zusammenhängender Teilbereich von V , so ist offenbar $U - U \cap A$ auch zusammenhängend.

^{10a)} Vgl. H. GRAUERT: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 223—259 (1955), Satz 1.

^{10b)} Vgl. R. REMMERT, loc. cit.¹¹⁾

Es sei nun $U \subset V$ eine zusammenhängende Umgebung von x . Wir zeigen, daß $\tau(V) \supset U$ gilt. Da τ die Menge $'U - \tau^{-1}(A) \cap 'U$ mit $'U = \tau^{-1}(U) \cap 'V$ eigentlich und lokal-topologisch in $U - U \cap A$ abbildet und $U - U \cap A$ zusammenhängend ist, muß jeder Punkt von $U - U \cap A$ ein Urbild in $'U - 'U \cap \tau^{-1}(A)$ haben. Ferner ist jeder Punkt x_0 von $A \cap U$ Konvergenzpunkt einer gegen x_0 konvergierenden Punktfolge $x_i \in U - U \cap A$. $\tau^{-1}(x_i)$ hat wenigstens einen Häufungspunkt $'x_0$ in $'U$. Offenbar gilt $\tau('x_0) = \tau(x_0)$. Also ist jeder Punkt von U Bildpunkt von $'U$ und damit von $'V$. Wir haben gezeigt, daß das τ -Bild jeder offenen Menge von $'R$ eine offene Menge in R ist. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Nunmehr beweisen wir einen grundlegenden Satz über stetige wesentliche Modifikationen.

Satz 4: Ist $(X^n, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X^n)$ eine stetige wesentliche Modifikation und ist X^n eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, so ist die Menge \dot{N} eine entweder leere oder rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge in X^n .

Die Behauptung dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem auch an sich interessanten

Hilfssatz 3: Es sei λ eine holomorphe Abbildung eines n -dimensionalen komplexen Raumes Y^n in eine komplexe Mannigfaltigkeit X^n ; es sei M eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in Y^n , derart, daß λ in $Y^n - M$ eindeutig ist. Dann bildet λ den Gesamttraum Y^n eindeutig in X^n ab. (Y^n ist also insbesondere eine komplexe Mannigfaltigkeit)¹⁷⁾.

Beweis: Wäre der Hilfssatz falsch, so gäbe es einen komplexen Raum Y^n minimaler Dimension n , für den die Aussage des Satzes nicht richtig ist. Da Hilfssatz 3 eine lokale Eigenschaft ausdrückt, dürfen wir annehmen, daß Y^n einer analytisch-verzweigten Überlagerung R^n des Einheitspolyzylinders Z^n äquivalent ist und daß λ die Überlagerung R^n in den komplexen Zahlenraum C^n abbildet. Die Entartungsmenge K der Abbildung λ ist eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in R^n ; denn K ist notwendig in M enthalten. Man sieht analog wie im Beweise von Satz 3 (unter Benutzung von Hilfssatz 2), daß λ in $R^n - K$ eindeutig ist. Wir zeigen, daß jede irreduzible Komponente von K vermöge λ auf genau einen Punkt des C^n abgebildet wird. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine in R^n irreduzible Komponente K' von K , derart, daß $\lambda(K')$ mindestens zwei verschiedene Punkte enthielte. Es seien etwa die z_1 -Koordinaten dieser Punkte voneinander verschieden. Wir betrachten dann in einer Umgebung W eines Punktes $x' \in K'$, in die keine von K' verschiedene Komponente von K eindringt, die durch x' laufende Niveaufäche F der in W holomorphen Funktion $z_1 \cdot \lambda$. F ist eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische

¹⁷⁾ Es gilt folgende Verallgemeinerung von Hilfssatz 3: Es sei λ eine holomorphe Abbildung eines n -dimensionalen komplexen Raumes Y^n in eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit X^n ; es sei M eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in Y^n , derart, daß in jedem uniformisierbaren Punkt von $Y^n - M$ die Funktionalmatrix der Abbildung λ den Rang n hat. Dann ist Y^n eine komplexe Mannigfaltigkeit, und die Funktionalmatrix von λ ist in jedem Punkt von Y^n vom Range n . — Zum Beweis vgl.: H. GRAUERT und R. REMMERT: Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen und Anwendungen auf einen Satz von OKA.

Menge in W und schneidet K' und mithin K in einer höchstens $(n-3)$ -dimensionalen analytischen Menge^{17a)}, da die Funktion $z_1 \cdot \lambda$ auf K' nicht konstant ist.

Die Beschränkung λ^* von λ auf F ist eine Abbildung von F in die $(n-1)$ -dimensionale analytische Ebene $\{z_1 = z_1 \cdot \lambda(x')\} \subset C^n$; sie kann daher als eine Abbildung von F in einen C^{n-1} aufgefaßt werden.

Bilden wir nun den durch F erzeugten $(n-1)$ -dimensionalen (nicht notwendig zusammenhängenden) komplexen Raum Y^{n-1} (vgl. hierzu § 1) und bezeichnen wir mit λ' die λ^* in kanonischer Weise zugeordnete holomorphe Abbildung von Y^{n-1} in den C^{n-1} , so ist zunächst klar, daß λ' höchstens in derjenigen, nicht höher als $(n-3)$ -dimensionalen analytischen Teilmenge von Y^{n-1} entartet ist, die über $F \cap K'$ liegt. (Man beachte, daß alle Punkte von $F - K'$ gewöhnliche Punkte von F sind und mithin bei der Bildung von Y^{n-1} die Menge F in der Nachbarschaft dieser Punkte „nicht geändert“ wird.) Weiter gibt es aber auch mindestens eine zusammenhängende Komponente Y_1^{n-1} von Y^{n-1} , derart, daß λ' in gewissen über K' liegenden Punkten von Y_1^{n-1} wirklich entartet ist. In der Tat! Durch den Punkt $x' \in K'$ läuft nach Voraussetzung eine mindestens eindimensionale, in Y^n analytische Menge, die durch λ auf den Punkt $\lambda(x') \in C^n$ abgebildet wird. Diese Menge ist in F und mithin auch in einer der in W irreduziblen Komponenten von F enthalten. Bezeichnen wir mit F_1 eine solche Komponente und mit Y_1^{n-1} den zugehörigen zusammenhängenden komplexen Raum, so hat λ' in Y_1^{n-1} Entartungspunkte.

Somit hat sich ergeben, daß für das Paar Y_1^{n-1}, λ' die Behauptung von Hilfssatz 3 falsch ist. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß n minimal sein sollte. Also wird doch jede irreduzible Komponente von K durch λ auf genau einen Punkt des C^n abgebildet.

Sei nun Z_1^n ein ganz im Innern von Z^n gelegener Polyzylinder, sei R_1^n der über Z_1^n gelegene Teil von R^n . In R_1^n zerfällt $K \cap R_1^n$ in höchstens endlich viele irreduzible Komponenten. Bezeichnen wir mit y_1, \dots, y_s die λ -Bilder dieser Komponenten, so ist $\lambda(R_1^n - K \cap R_1^n)$ ein Gebiet G im C^n mit den Punkten y_1, \dots, y_s als Randpunkten, denn andernfalls wäre λ in $R_1^n - K \cap R_1^n$ nicht eindeutig. Da λ den Raum $R^n - K$ eindeutig abbildet und jeder Randpunkt von $R_1^n - K \cap R_1^n$, der nicht zu K gehört, innerer Punkt von $R^n - K$ ist, ist jedes λ -Bild eines Randpunktes von $R_1^n - K \cap R_1^n$ ein Randpunkt von G . Daher sind y_1, \dots, y_s keine isolierten Randpunkte von G .

Es gibt um jeden Randpunkt y von G , der von y_1, \dots, y_s verschieden ist, eine Umgebung $U \subset C^n$, die aus G einen holomorph-konvexen Bereich heraus-schneidet. Ist nämlich x das eindeutig bestimmte λ -Urbild von y in $R^n - K$, so ist R^n in der Umgebung von x uniformisierbar. Es gibt daher um x in $R^n - K$ eine holomorph-konvexe Umgebung V . Der Durchschnitt derselben mit R_1^n ist wieder holomorph-konvex, da R_1^n holomorph-konvex ist. Das λ -Bild von V ist dann eine gewünschte Umgebung U des Randpunktes y .

^{17a)} Der Durchschnitt analytischer Mengen ist eine analytische Menge; vgl. H. GRAUERT UND R. REMMERT, loc. cit. ^{10a)}.

Wir benutzen nun den folgenden

Satz: Es sei G ein Gebiet in C^n ; es seien y_1, \dots, y_s nichtisolierte Randpunkte von G . Um jeden Randpunkt y von G , der von y_1, \dots, y_s verschieden ist, gebe es eine Umgebung $U(y) \subset C^n$, die aus G einen holomorph-konvexen Bereich heraus-schneidet. Dann ist in G die Funktion $q(z) = -\ln r(z)$ eine stetige plurisubharmonische Funktion. ($r(z)$ = euklidischer Abstand des Punktes $z \in G$ vom Rande von G).¹⁸⁾

Mittels der durch diesen Satz gegebenen Funktion q bilden wir nun in $R_1^n - K \cap R_1^n$ die stetige plurisubharmonische Funktion $\varphi^* = q \cdot \lambda$. Dieselbe strebt bei Annäherung an die Punkte von $K \cap R_1^n$ gegen $+\infty$. Das aber ist nicht möglich, da $K \cap R_1^n$ eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in R_1^n ist und allgemein der Satz gilt: Ist ψ eine plurisubharmonische Funktion in einem n -dimensionalen komplexen Raum X außerhalb einer höchstens $(n-2)$ -dimensionalen, in X analytischen Menge, so ist ψ eindeutig zu einer in ganz X plurisubharmonischen Funktion fortsetzbar¹⁸⁾.

Damit ist Hilfssatz 3 und mithin auch Satz 4 bewiesen.

Anmerkung: Satz 4 ist im allgemeinen falsch, wenn der komplexe Raum X nichtuniformisierbare Punkte enthält. Das zeigt ein in § 4 angegebenes Beispiel.

Wir fügen noch an:

Satz 5: Ist (X, N, τ, N, X) eine stetige Modifikation, so gibt es einen natürlichen Umkehrhomomorphismus τ^* des Körpers $k(X)$ der auf X meromorphen Funktionen in den Körper $k(X)$ der auf X meromorphen Funktionen. τ^* bildet den Ring $\mathfrak{O}(X)$ der auf X holomorphen Funktionen in den Ring $\mathfrak{O}(X)$ der auf X holomorphen Funktionen ab. Es gibt weiter, falls τ den Raum X auf X abbildet, einen natürlichen Umkehrhomomorphismus $\hat{\tau}$ des Verbandes $V(X)$ der in X analytischen Mengen in den Verband $V(X)$ der in X analytischen Mengen.

Dieser Satz ist wegen Satz 2 trivial.

In Satz 5 ist τ^* im allgemeinen kein Isomorphismus von $k(X)$ auf $k(X)$. Die offenbar stetige Modifikation $(E, A, \tau, z_\infty, P^1)$, wobei E die offene z -Ebene, A die leere Menge, τ die identische Abbildung von E in die Riemannsche Zahlenkugel P^1 und z_∞ den unendlich fernen Punkt von P^1 bezeichnet, liefert ein Gegenbeispiel; denn die Funktion $e^z \in k(E)$ hat kein τ^* -Urbild in $k(P^1)$. Ebenfalls ist, wenn τ eine Abbildung von X auf X ist, $\hat{\tau}$ im allgemeinen kein Isomorphismus von $V(X)$ auf $V(X)$. Hierfür werden wir ein Beispiel im § 4 angeben.

Satz 5 zeigt, daß der Begriff der stetigen Modifikation in gewisser Hinsicht die Eigenschaften der in der Einleitung beschriebenen Abänderungsprozesse hat. Um Modifikationen zu erhalten, unter denen die algebraische Struktur der Ringe der holomorphen bzw. der Körper der meromorphen Funktionen völlig invariant ist, ist es notwendig, den Modifikationsbegriff noch weiter einzuschränken.

¹⁸⁾ Hinsichtlich des Beweises vgl.: H. GRAUERT und R. REMMERT loc. cit.¹⁷⁾.

§ 3. Eigentliche Modifikationen.

Def. 5: Eine stetige Modifikation (X, N, τ, N, X) heiße eine eigentliche Modifikation, wenn $\tau: X \rightarrow X$ eine eigentliche Abbildung von X in X ist.

Man überlegt sofort, daß bei einer eigentlichen Modifikation die Abbildung $\tau: X \rightarrow X$ den Raum X auf den Raum X abbildet.

Es gilt nun

Satz 6: Ist (X, N, τ, N, X) eine eigentliche Modifikation, so ist das τ -Bild einer jeden in X analytischen Menge eine analytische Menge in X .

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden, hier nicht zu beweisenden Satzes.

Satz: Ist $\tau: X \rightarrow X$ eine eigentliche holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X auf den komplexen Raum X , so ist das τ -Bild M einer jeden in X analytischen Menge M eine analytische Menge in X . Ist τ in jedem Punkt von M entartet, so ist die Dimension von M kleiner als die Dimension von $M^{(1)}$.

Nach Satz 3 ist jede stetige Modifikation (X^n, N, τ, N, X^n) quivalent mit einer stetigen wesentlichen Modifikation $(X^n, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X^n)$, bei der \dot{N} eine analytische Menge in X^n und $\dot{N} = X^n - \tau(X^n - \dot{N})$ ist. Bei eigentlichen Modifikationen gilt $\dot{N} = \tau(\dot{N})$, da τ den Raum X^n auf X^n abbildet. Mithin ist in einem solchen Fall \dot{N} ebenfalls eine analytische Menge. Ihre Dimension ist nach dem vorstehenden Satz höchstens $n - 2$, da τ nach Konstruktion der höchstens $(n - 1)$ -dimensionalen analytischen Menge \dot{N} in jedem Punkt von \dot{N} entartet ist. Damit haben wir gewonnen:

Satz 7: Zu jeder eigentlichen Modifikation (X^n, N, τ, N, X^n) gibt es genau eine quivalente eigentliche wesentliche Modifikation $(X^n, \dot{N}, \tau, \dot{N}, X^n)$, bei der \dot{N} und \dot{N} analytische Mengen sind. \dot{N} ist höchstens $(n - 2)$ -dimensional.

In jeder eigentlichen, wesentlichen Modifikation (X^n, N, τ, N, X^n) werden also, wenn das τ -Bild jeder irreduziblen Komponente von N eine rein $(n - 1)$ -dimensionale analytische Menge ist, die Räume X^n und X^n vermöge τ eineindeutig und holomorph aufeinander bezogen. Das kann so gedeutet werden, daß in solchen Fällen die Menge nur „durch sich selbst“ ersetzt werden kann.

Für den Fall $n = 1$ folgt: Jede eigentliche Modifikation einer Riemannschen Fläche ist der identischen Modifikation quivalent.

Satz 5 verschärft sich bei eigentlichen Modifikationen in folgender Weise:

Satz 8: Ist (X, N, τ, N, X) eine eigentliche Modifikation, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus τ^* des Körpers $k(X)$ der auf X meromorphen Funktionen auf den Körper $k(X)$ der auf X meromorphen Funktionen. τ^* bildet den Ring $\mathfrak{O}(X)$ der auf X holomorphen Funktionen auf den Ring $\mathfrak{O}(X)$ der auf X holomorphen Funktionen ab. Die Umkehrung $\hat{\tau}^{-1}$ des natürlichen Umkehrhomomorphismus $\hat{\tau}$ des Verbandes $V(X)$ der in X analytischen Mengen in den Verband $V(X)$ der in X analytischen Mengen ist zu einem Homomorphismus von $V(X)$ auf $V(X)$ fortsetzbar.

¹⁹⁾ Vgl. R. REMMERT sowie auch K. STEIN loc. cit.¹¹⁾.

Beweis: Der erste Teil des Satzes ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, daß jede meromorphe bzw. holomorphe Funktion f auf $'X$ das τ^* -Bild einer meromorphen bzw. holomorphen Funktion f auf X ist, d. h. daß es ein $f \in k(X)$ bzw. $f \in \mathfrak{S}(X)$ gibt mit $f' = \tau \cdot f$.

Wir dürfen annehmen, daß die vorgelegte Modifikation wesentlich ist. Wir bilden dann auf $X^n - N$ die meromorphe bzw. holomorphe Funktion $f' \cdot \tau^{-1}$. Diese ist, da N eine höchstens $(n - 2)$ -dimensionale analytische Menge in X^n ist, nach bekannten Sätzen zu einer meromorphen bzw. holomorphen Funktion f auf X^n fortsetzbar. Es gilt $f' = \tau f$.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, definieren wir einen Homomorphismus $\hat{\tau}$ von $V('X)$ auf $V(X)$ durch die τ -Projektion der in $'X$ analytischen Mengen in X . Diese Definition ist wegen Satz 6 sinnvoll. Da $\hat{\tau} \cdot \hat{\tau}$ die identische Abbildung von $V(X)$ auf sich vermittelt, ist somit Satz 8 bewiesen.

Den Begriff der eigentlichen Modifikation benutzen wir, um eine Äquivalenzrelation in der Menge aller komplexen Räume einzuführen.

Def. 6: Zwei komplexe Räume X und Y heißen verwandt, wenn es endlich viele komplexe Räume X_0, X_1, \dots, X_r mit $X_0 = X, X_r = Y$ gibt, derart, daß für alle ϱ ($0 < \varrho \leq r$) der Raum X_ϱ eine eigentliche Modifikation des Raumes $X_{\varrho-1}$ oder $X_{\varrho-1}$ eine eigentliche Modifikation von X_ϱ ist.

Aus Satz 8 folgt sofort:

Satz 9: In verwandten komplexen Räumen sind die Körper der meromorphen Funktionen und die Ringe der holomorphen Funktionen kanonisch isomorph²⁰⁾.

Beispiele verwandter komplexer Räume werden durch die mehrfach-projektiven komplexen Räume gleicher Dimension gegeben²¹⁾.

Wir geben noch eine für gewisse Fragen nützliche Charakterisierung der Menge $'\dot{N}$ einer eigentlichen wesentlichen Modifikation $('X, 'N, \tau, \dot{N}, X)$ an. Dabei müssen wir allerdings voraussetzen, daß der Raum X (und damit auch $'X$) eine abzählbare Basis hat, d. h. daß es abzählbar viele offene Mengen in X gibt, derart, daß jede weitere offene Menge in X als Vereinigung von gewissen dieser Mengen darstellbar ist.

Satz 10: Sei $('X, 'N, \tau, \dot{N}, X)$ eine eigentliche wesentliche Modifikation, bei der X und $'X$ komplexe Räume mit abzählbarer Basis sind. Besteht dann $'K$ aus rein k -dimensionalen irreduziblen Komponenten von $'\dot{N}$, so gibt es eine Umgebung $'U('K)$, derart, daß jede in $'X$ analytische, rein k -dimensionale Menge, die in $'U('K)$ enthalten ist, bereits in $'K$ liegt.

Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 4: Ist M eine rein k -dimensionale analytische Menge in einem komplexen Raum Y mit abzählbarer Basis, so gibt es eine Umgebung $V(M)$,

²⁰⁾ Für die Verbände der analytischen Mengen ist eine entsprechende Aussage nicht so einfach zu formulieren; vgl. hierzu jedoch die demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit der Verf.: Zur Theorie der Modifikationen II.

²¹⁾ Vgl. E. KREYSZIG loc. cit.⁴⁾.

in der keine höher als k -dimensionale analytische Menge von Y enthalten ist^{21a)}).

Beweis: Man konstruiert zunächst leicht unter Verwendung einer abzählbaren Basis der offenen Mengen von Y eine Folge V_r von Umgebungen von M mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Durchschnitt $\bigcap_{r=1}^{\infty} V_r$ stimmt mit M überein.

b) Ist $A \subset Y$ irgendeine kompakte Menge, so ist $V_{r+1} \cap A$ relativ kompakt in $V_r \cap A$ enthalten.

Es sei nun B_μ eine Y ausschöpfende Folge von offenen, relativ-kompakten Mengen in Y . Wäre die Aussage des Hilfssatzes falsch, so gäbe es ein μ_0 , derart, daß in jedem V_r eine rein ' k -dimensionale' ($k > k$), in Y analytische Menge M_r läge, von der eine irreduzible Komponente in $V_r \cap B_{\mu_0}$ eindrange. Denn andernfalls könnte man zu jedem μ ein $r(\mu)$ finden, so daß keine ' k -dimensionale' ($k > k$), in $V_{r(\mu)}$ enthaltene analytische Menge von Y Punkte mit B_μ gemeinsam hätte.

Als dann wäre $\bigcup_{\mu=1}^{\infty} V_{r(\mu)} \cap B_\mu$ eine Umgebung von M mit der im Hilfssatz behaupteten Eigenschaft.

Aus Forderung b) für die Folge V_r ergibt sich, daß $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_r \cap (Y - M)$ eine analytische Menge in $Y - M$ ist. Da die Dimension derselben in jedem ihrer Punkte größer als die Dimension von M ist, so folgt aus einem bekannten Satz über die Verteilung der Singularitäten einer analytischen Menge²²⁾, daß $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_r$ abgeschlossen in Y und dort eine analytische Menge ist. Das aber ist nicht möglich. Nach Konstruktion der M_r gibt es nämlich eine Folge von Punkten $x_r \in M_r \cap B_{\mu_0}$, die sich gegen einen Punkt $x \in M$ häuft. In der Umgebung von x kann $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_r$ keine analytische Menge sein; denn dieselbe würde in beliebiger Nähe von x notwendig stets aus abzählbar unendlich vielen irreduziblen Komponenten bestehen, was einem bekannten Zerlegungssatz für analytische Mengen widerspricht. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 10 konstruieren wir zunächst eine Umgebung U von K , die keine irreduzible Komponente von N enthält, die nicht in K liegt und

^{21a)} Die Forderung, daß der Raum Y^n eine abzählbare Basis besitzt, ist für die Gültigkeit von Hilfssatz 4 wesentlich. Ersetzt man nämlich nach H. HOPF loc. cit.²⁾, sowie E. CALABI und M. ROSENBLITH loc. cit.²⁴⁾, jeden Punkt x der Ebene $z_1 = 0$ in $P^1 \times P^1$ durch eine Trägersphäre S_x , der der z_1 -Richtung entsprechende Punkt fehlt, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit Y^2 , die dieser Forderung nicht genügt. Die Menge der Punkte auf S_x , die der z_1 -Richtung entsprechen, bilden eine nulldimensionale analytische Menge in Y^2 . Man zeigt leicht, daß jede Umgebung U dieser Menge aus den Punkten einer vollen Umgebung der Ebene $z_1 = 0$ des $P^1 \times P^1$ besteht. In dieser und damit auch in U liegen aber im Gegensatz zum Hilfssatz 4 überabzählbar viele eindimensionale analytische Mengen $z_1 = c$, $c \neq 0$.

²²⁾ Vgl. R. REMMERT und K. STEIN loc. cit.³⁾ sowie W. ROTHSTEIN: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. 126, 221—238 (1953); ferner: H. CARTAN: Séminaire 1953/54 Exp. XIII u. XIV.

deren Dimension größer oder gleich k ist. Bezeichnet man mit $''K$ die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten von \dot{N} , die nicht zu $'K$ gehören, so ist $'K \cap ''K = \dot{K}$ eine höchstens $(k-1)$ -dimensionale analytische Menge in $'X$. Wir wählen nach Hilfssatz 4 eine Umgebung V_1 von \dot{K} , die keine höher als $(k-1)$ -dimensionale analytische Menge von $'X$ enthält und weiter eine Umgebung V_2 von $'K - \dot{K}$, die keinen Punkt mit $\dot{N} - 'K$ gemeinsam hat. Dann hat $'V = V_1 \cap V_2$ offenbar die oben angegebene Eigenschaft.

Die Menge $K = \tau('K)$ ist eine höchstens $(k-1)$ -dimensionale analytische Menge in X , da τ auf $'K$ entartet ist. Nach Hilfssatz 4 gibt es um K eine Umgebung V , in der keine k -dimensionale, in X analytische Menge liegt. Die Menge $'U = \tau^{-1}(V) \cap 'V$ ist dann eine Umgebung von $'K$ mit der in Satz 10 behaupteten Eigenschaft. In der Tat: Sei $'K_1$ irgendeine in $'U$ gelegene, rein k -dimensionale, in $'X$ analytische Menge. Würde $'K_1$ nicht in $'K$ enthalten sein, so wäre wegen der Konstruktion von $'V$ die Abbildung τ nicht überall auf $'K_1$ entartet. Daher müßte $\tau('K_1)$ eine in X analytische Menge von der Dimension k sein. Das ist jedoch wegen $\tau('K_1) \subset V$ nicht möglich. Satz 10 ist mithin bewiesen.

Als Anwendung von Satz 10 merken wir etwa an, daß der einfach-projektive Raum P^n keine eigentliche wesentliche Modifikation eines zu ihm analytisch inäquivalenten komplexen Raumes sein kann, da in beliebiger Nähe einer beliebigen irreduziblen k -dimensionalen algebraischen Menge A gleichdimensionale irreduzible algebraische Mengen liegen, die von A verschieden sind²³⁾.

§ 4. Beispiele von Modifikationen.

Ein wichtiges Beispiel einer eigentlichen wesentlichen Modifikation stellt der Hopfsche σ -Prozeß dar, der sich wie folgt beschreiben läßt: Faßt man die Gesamtheit der eindimensionalen analytischen Ebenen durch den Nullpunkt 0 des C^n in bekannter Weise als $(n-1)$ -dimensionalen komplex-projektiven Raum P^{n-1} auf und ordnet man jedem Punkt $z \in C^n - 0$ die z mit 0 verbindende analytische Ebene zu, so erhält man eine holomorphe Abbildung $\gamma: C^n - 0 \rightarrow P^{n-1}$ des $C^n - 0$ auf den P^{n-1} . Der Graph G_0^n von γ ist eine singularitätenfrei in $(C^n - 0) \times P^{n-1}$ liegende n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Gleiches gilt für die abgeschlossene Hülle G^n von G_0^n in $C^n \times P^{n-1}$. Bezeichnet man mit σ die Projektion von G^n in C^n und mit \dot{N} die über 0 liegende Menge von G^n , so ist $(G^n, \dot{N}, \sigma, 0, C^n)$ eine eigentliche wesentliche Modifikation, die man den Hopfschen σ -Prozeß nennt. \dot{N} ist dem P^{n-1} analytisch äquivalent: die komplexe Mannigfaltigkeit G^n entsteht also aus dem C^n durch Einsetzen des $(n-1)$ -dimensionalen komplex-projektiven Raumes P^{n-1} in den Nullpunkt 0 des C^n .

Mittels des σ -Prozesses geben wir nun ein nichttriviales Beispiel einer stetigen, nichteigentlichen, wesentlichen Modifikation (X, \dot{N}, τ, N, X) an. Es sei $X = C^2$, N eine auf der Ebene $z_1 = 0$ liegende, gegen den Nullpunkt 0 konvergierende Punktfolge x_n , die 0 enthält.

²³⁾ Allgemeine Bedingungen dafür, daß ein komplexer Raum keine eigentliche wesentliche Modifikation eines zu ihm analytisch inäquivalenten komplexen Raumes sein kann, werden in der unter ²⁰⁾ zitierten Arbeit der Verff. angegeben.

Durch gleichzeitige Anwendung des σ -Prozesses auf jeden der Punkte $x_r \neq 0$ und durch Einsetzen einer Trägersphäre in 0, aus der der zur z_2 -Richtung gehörende Punkt entfernt ist, erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit $'X$, die in natürlicher Weise durch eine holomorphe Abbildung τ auf X bezogen ist²⁴⁾. Bezeichnen wir mit $'N$ die Gesamtheit der für die x_r eingesetzten Punkte, so ist $(X, 'N, \tau, N, X)$ eine stetige wesentliche Modifikation. Diese Modifikation ist nicht eigentlich, denn die analytische Menge $'N \subset X$ wird durch τ auf die nichtanalytische Menge $\left\{ \bigcup_{r=1}^{\infty} x_r \right\} \subset C^2$ abgebildet. Jedoch bildet τ im

Gegensatz zu dem im Anschluß an Satz 5 gegebenen Beispiel den Raum $'X$ auf X ab.

Als zweites Beispiel geben wir eine eigentliche wesentliche Modifikation $(X^{n+1}, 'N, \tau, N, X^{n+1})$ an, bei der X^{n+1} eine $(n+1)$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $'N$ eine singularitätenfrei in X^{n+1} liegende Riemannsche Zahlenkugel ist ($n \geq 2$).

Im $2n$ -dimensionalen, n -fach projektiven Raum $Q^{2n} = \prod_{r=1}^n P_r^2$ mit den in P_r^2 jeweils inhomogenen Koordinaten w_r, z_r ($r = 1, \dots, n$) bezeichne X^{n+1} die durch die Gleichung

$$\frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \dots = \frac{z_n}{w_n}$$

gegebene $(n+1)$ -dimensionale analytische Menge ($n \geq 2$). Jeder vom Nullpunkt 0 verschiedene Punkt $x \in X^{n+1}$ ist ein gewöhnlicher und daher ein uniformisierbarer Punkt von X^{n+1} . Da überdies X^{n+1} irreduzibel ist, ist $X^{n+1} - 0$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. X^{n+1} selbst ist ein $(n+1)$ -dimensionaler komplexer Raum, da man die Punkte von X^{n+1} in einer geeigneten Umgebung des Nullpunktes $0 \in Q^{2n}$ in naheliegender Weise topologisch und holomorph auf eine analytisch-verzweigte Überlagerung des $(n+1)$ -dimensionalen Einheitspolyzylinders abbilden kann.

Auf X^{n+1} existiert eine komplex-eindimensionale Schar $\{E(t)\}$ von n -dimensionalen analytischen Ebenen

$$E(t): \left\{ \frac{z_1}{w_1} = \dots = \frac{z_n}{w_n} = t \right\},$$

wobei t die Punkte einer Riemannschen Zahlenkugel P^1 durchläuft. Durch jeden Punkt $x \in X^{n+1} - 0$ läuft genau eine Ebene $E(t)$ der Schar; alle Ebenen $E(t)$ laufen durch 0.

Modifiziert man jede Komponente P_r^2 von Q^{2n} im Nullpunkt $(w_r, z_r) = (0, 0)$ von P_r^2 durch den Hopfschen σ -Prozeß zu einer Mannigfaltigkeit $'P_r^2$, so ist die Mannigfaltigkeit $'Q^{2n} = \prod_{r=1}^n 'P_r^2$ eine eigentliche wesentliche Modifikation von Q^{2n} . Bezeichnet τ' die zugehörige Modifikationsabbildung, so haben die meromorphen Funktionen

$$f_r = \frac{z_r}{w_r} \cdot \tau' \quad (r = 1, \dots, n)$$

in $'P_r^2$ und mithin auch in $'Q^{2n}$ keine Unbestimmtheitsstellen.

²⁴⁾ Siehe etwa E. CALABI und M. ROSENBLITH: Complex analytic manifolds without countable base, *Proceed. Amer. Math. Soc.* 4, 335–340 (1952). Das in dieser Arbeit angegebene Beispiel wurde mündlich auch von H. HOPF mitgeteilt; vgl. auch H. HOPF, loc. cit. 2).

Die den Ebenen $E(t)$ in $'Q^{2n}$ entsprechenden analytischen Mengen $'E(t)$, die durch die Gleichung

$$'E(t) : \{f_1 = \dots = f_n = t\}$$

gegeben werden, sind das kartesische Produkt der in $'P^n$ analytischen Mengen $\{f_v = t\}$ ($v = 1, \dots, n$). Da diese Mengen in $'P^n$ singularitätenfrei eingelagert und irreduzibel sind, ist auch jede Menge $'E(t)$ irreduzibel und besteht nur aus gewöhnlichen Punkten. Zwei Mengen $'E(t_1)$ und $'E(t_2)$ mit $t_1 \neq t_2$ haben keinen Punkt miteinander gemeinsam. Durch τ' wird jede Menge $'E(t)$ eindeutig und holomorph auf die Ebene $E(t)$ abgebildet.

Wir behaupten nun: Die Gesamtheit aller Mengen $'E(t)$ — d. i. die durch die Gleichung

$$f_1 = \dots = f_n$$

in $'Q^{2n}$ beschriebene analytische Menge — ist eine $(n+1)$ -dimensionale, singularitätenfrei in $'Q^{2n}$ liegende komplexe Mannigfaltigkeit $'X^{n+1}$

Das ergibt sich wie folgt: Bezeichnet $g_v(x)$ bzw. $h_v(x)$ die in $'Q^{2n}$ meromorphe Funktion $w_v \cdot \tau'$ bzw. $z_v \cdot \tau'$ ($v = 1, \dots, n$) und setzt man

$$r_v(x) = |g_v(x)| + |h_v(x)| \quad (v = 1, \dots, n),$$

so wird, wie unmittelbar ersichtlich, eine hinreichend kleine Umgebung eines jeden Punktes $'x \in 'Q^{2n}$ mit $r_v(x) \neq 0$ ($v = 1, \dots, n$) durch τ' eindeutig auf eine Umgebung von $\tau'('x) \in Q^{2n}$ abgebildet. Alle Punkte $'x \in 'X^{n+1}$ mit $r_v(x) \neq 0$ ($v = 1, \dots, n$) sind daher sicher gewöhnliche Punkte von $'X^{n+1}$.

Sei nun etwa $'x_0 \in 'X^{n+1}$ ein Punkt, für den genau r_1, \dots, r_k ($1 \leq k \leq n$) verschwinden. Wir dürfen annehmen, daß die Funktionen $f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, h_{k+1}, \dots, g_n, h_n$ in $'x_0$ endlich sind, denn das kann man stets durch Übergang von f_n zu f_n^{-1} , dem eine Vertauschung von w_n und z_n entspricht, und durch Ausübung einer projektiven Transformation auf die g_v, h_v ($v = k+1, \dots, n$) erreichen. Durch die Funktionen $g_1, \dots, g_k, f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, h_{k+1}, \dots, g_n, h_n$ werden alsdann lokale Koordinaten in einer Umgebung von $'x_0 \in 'Q^{2n}$ definiert. Durch evtl. Vertauschung der g_v mit den h_v erreicht man noch, daß gilt: $g_v(x_0) \neq 0$ ($v = k+1, \dots, n$).

In der Funktionalmatrix der Funktionen $f_2 - f_1, \dots, f_n - f_1$ verschwindet nunmehr die Determinante

$$\frac{\partial(f_2 - f_1, \dots, f_n - f_1)}{\partial(f_2, \dots, f_k, h_{k+1}, \dots, h_n)} = \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & g_{k+1}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & g_n^{-1} \end{vmatrix}$$

im Punkte $'x_0$ nicht. Daher ist $'x_0$ ein gewöhnlicher Punkt von $'X^{n+1}$. Da $'X^{n+1}$ zusammenhängend ist, ist die Behauptung bewiesen.

Jede Menge $'E(t)$ enthält genau einen Punkt $'x(t)$, der vermöge τ' auf den Nullpunkt $0 \in Q^{2n}$ abgebildet wird. Die Menge $'N = \{x(t)\}$ aller dieser

Punkte ist daher eine singularitätenfrei in $'X^{n+1}$ liegende irreduzible eindimensionale analytische Menge, die durch $\gamma: 'x(t) \rightarrow t$ eineindeutig und holomorph auf eine Riemannsche Zahlenkugel P^1 bezogen ist.

Die Beschränkung τ von τ' auf $'X^{n+1}$ bildet $'X^{n+1} - 'N$ eineindeutig und holomorph auf $X^{n+1} - 0$ ab. Das Quintupel $('X^{n+1}, 'N, \tau, 0, X^{n+1})$ ist daher eine wesentliche Modifikation, bei der $'X^{n+1}$ eine $(n+1)$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $'N$ die Riemannsche Zahlenkugel ist. $('X^{n+1}, 'N, \tau, 0, X^{n+1})$ ist sogar eine eigentliche Modifikation, da $'X^{n+1}$ und X^{n+1} kompakt sind.

Das Beispiel zeigt, daß im Falle $n+1 \geq 3$ Satz 4 sogar bei eigentlichen wesentlichen Modifikationen seine Gültigkeit verliert, wenn der komplexe Raum X keine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Der hier angegebene Raum X^{n+1} kann mithin keine komplexe Mannigfaltigkeit sein. Der Punkt 0 ist eine nichtuniformisierbare Stelle. Diese Singularität wird durch die angegebene Modifikation „aufgelöst“.

'Xⁿ⁺¹ ist ein komplex-analytischer Faserraum. Zunächst wird die Menge $'N$ von jeder Menge $'E(t)$ in genau dem einen Punkt $'x(t)$ geschnitten; daher gibt es eine natürliche Abbildung p von $'X^{n+1}$ auf $'N$. p ist eine holomorphe Abbildung. Weiter gibt es zu jedem Punkt $'x(t_0) \in 'N$ eine Umgebung $'V = \{ 'x(t), t \in U(t_0) \}$, derart, daß $p^{-1}('V)$ „trivial gefasert“ ist. Ist nämlich $'V$ eine beliebige solche Umgebung, so wird $p^{-1}('V)$ durch τ' auf die Menge $\{ E(t), t \in U(t_0) \} \subset \subset Q^{2n}$ abgebildet. Ist $U(t_0)$ hinreichend klein gewählt, so sieht man, daß jede Ebene $E(t)$ aus dieser Menge durch die holomorphe Abbildung $\Gamma_w: x \rightarrow (w_1(x), \dots, w_n(x))$ bzw. $\Gamma_z: x \rightarrow (z_1(x), \dots, z_n(x))$ eineindeutig auf einen Osgoodschen Raum $\prod_{r=1}^n P_r^1$ mit den Koordinaten w_1, \dots, w_n bzw. z_1, \dots, z_n

bezogen wird. Die Abbildungen $\Gamma_w: 'x \rightarrow (g_1('x), \dots, g_n('x))$ bzw. $\Gamma_z: 'x \rightarrow (h_1('x), \dots, h_n('x))$ bilden jede Menge $'E(t) \subset p^{-1}('V)$ eineindeutig und holomorph auf $\prod_{r=1}^n P_r^1$ ab. Da ferner die Abbildung $\gamma \cdot p$ verschiedene Mengen $'E(t)$ trennt, wird $p^{-1}('V)$ durch $\Gamma_w \times \gamma \cdot p: 'x \rightarrow (g_1('x), \dots, g_n('x), t)$ bzw. durch die analog zu beschreibende Abbildung $\Gamma_z \times \gamma \cdot p$ eineindeutig und holomorph auf $\prod_{r=1}^n P_r^1 \times U(t_0)$ so abgebildet, daß die Menge $'E(t) \subset p^{-1}('V)$ jeweils

auf die Menge $\prod_{r=1}^n P_r^1 \times t$ bezogen ist. Das besagt aber, daß $'X^{n+1}$ ein komplex-analytischer Faserraum mit der Riemannschen Zahlenkugel P^1 als Basis, dem n -dimensionalen Osgoodschen Raum $\prod_{r=1}^n P_r^1$ als Faser und p als Projektionsabbildung ist. Die im Osgoodschen Raum $\prod_{r=1}^n P_r^1$ wirkende Fasergruppe stimmt, da evtl. statt der Abbildung Γ_w die Abbildung Γ_z zu wählen ist, der eine Ersetzung der w_r durch tw_r , entspricht, mit der Gruppe

$$\{ w_r \rightarrow tw_r, \quad r = 1, \dots, n; \quad t \text{ eine beliebige komplexe Zahl } t \neq 0 \}$$

überein.

Die angegebene Faserung ist analytisch nicht trivial, denn es gibt außer $'N$ keine analytischen Schnittflächen in $'X^{n+1}$, die in hinreichender Nähe von $'N$ verlaufen. Jede solche würde nämlich durch τ auf eine kompakte eindimensionale analytische Menge in X^{n+1} abgebildet, die in einer endlichen Umgebung des Nullpunktes 0 des Q^{2n} enthalten wäre, was nach einem bekannten Satz über analytische Mengen nicht möglich ist²⁵⁾.

Der Raum $'X^{n+1}$ ist im übrigen eine algebraische Mannigfaltigkeit²⁶⁾. Zunächst sind nämlich die Räume $'P_i^2$ solche Mannigfaltigkeiten, da sie durch Anwendung des σ -Prozesses aus den projektiven Räumen P_i^2 entstehen. Als dann ist auch der Raum $'Q^{2n}$ als kartesisches Produkt der $'P_i^2$ eine algebraische Mannigfaltigkeit²⁷⁾. Da $'X^{n+1}$ in $'Q^{2n}$ singularitätenfrei liegt, hat mithin auch $'X^{n+1}$ diese Eigenschaft; denn durch eine singularitätenfreie Einbettung von $'Q^{2n}$ in einen einfach-projektiven Raum wird auch $'X^{n+1}$ singularitätenfrei in diesen Raum eingelagert.

Dem komplexen Raum X^{n+1} kommt ein Interesse an sich zu. Da er nämlich n -dimensionale analytische Mengen enthält, die sich jeweils nur in einem Punkte schneiden, kann er als Beispiel für die folgenden Aussagen dienen:

a) Es gibt m -dimensionale komplexe Räume, in denen meromorphe Funktionen existieren, deren Unbestimmtheitsstellen isoliert liegen.

b) Es gibt m -dimensionale komplexe Räume, in denen rein $(m-1)$ -dimensionale analytische Mengen existieren, die Punkte enthalten, in deren Umgebung die Mengen nicht als Nullstellengebilde von weniger als $(m-1)$ lokal-holomorphen Funktionen darstellbar sind²⁸⁾.

Die Beweise sind auf Grund der vorstehenden Ausführungen sehr einfach.

Zu a): Die auf X^{n+1} meromorphe Funktion $t = t(x)$, die jeder Ebene $E(t)$ den Wert t zuordnet, hat den Nullpunkt 0 als einzige Unbestimmtheitsstelle.

²⁵⁾ Die angegebene Faserung ist auch nicht topologisch trivial. Denn wäre X^{n+1} dem Osgoodschen Raum homöomorph, so müßte das Schnittprodukt $Z_1 \times Z_1 \times Z_1 \times \dots \times Z_n$ der einen unendlich fernen Ebene Z_1 von $'X^{n+1}$ mit sich selbst und den übrigen unendlich fernen Ebenen Z_2, \dots, Z_n von $'X^{n+1}$ einem geraden Vielfachen der Nullzelle homolog sein; dagegen zeigt man leicht, daß $Z_1 \times Z_1 \times Z_1 \times \dots \times Z_n$ der Nullzelle selbst homolog ist.

²⁶⁾ Unter einer algebraischen Mannigfaltigkeit wird eine komplexe Mannigfaltigkeit verstanden, die analytisch äquivalent ist zu einer singularitätenfrei in einem einfach-projektiven komplexen Raum liegenden analytischen Menge.

²⁷⁾ Das kartesische Produkt zweier algebraischer Mannigfaltigkeiten ist eine algebraische Mannigfaltigkeit, da sich jeder mehrfach-projektive komplexe Raum singularitätenfrei und analytisch in einen genügend hochdimensionalen einfachen projektiven komplexen Raum einbetten läßt. Vgl. etwa W. V. D. HODGE und D. PEDOE: *Methods of Algebraic Geometry II*. Cambridge University Press 1952, S. 93—100.

²⁸⁾ K. OKA: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII, Lemme fondamental (suite). Journ. Math. Soc. of Japan 3, 259—278 (1951), hat bereits darauf hingewiesen, daß in m -dimensionalen komplexen Räumen rein $(m-1)$ -dimensionale analytische Mengen nicht immer als Nullstellengebilde einer holomorphen Funktion lokal darstellbar sind. — Jedoch sei ausdrücklich angemerkt, daß in einem beliebigen m -dimensionalen komplexen Raum im Sinne von H. CARTAN jede analytische Menge lokal stets als gemeinsames Nullstellengebilde von nicht mehr als m holomorphen Funktionen beschrieben werden kann. Vgl. hierzu: H. GRAUERT: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch vollständige KÄHLERSche Metrik, erscheint demnächst in den Math. Annalen.

Zu b): Würde sich eine Ebene $E(t_0)$ in einer Umgebung U des Nullpunktes als gemeinsames Nullstellengebilde von weniger als n in U holomorphen Funktionen g_1, \dots, g_s ($s < n$) darstellen, so würden g_1, \dots, g_s auf allen von $E(t_0)$ verschiedenen Ebenen $E(t)$ in U nur im Nullpunkt gemeinsam verschwinden. Andererseits besitzen aber, da jede Ebene $E(t)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, die g_1, \dots, g_s nach dem zweiten Weierstraßschen Satz in $U \cap E(t)$ mindestens eine $(n-s)$ -dimensionale analytische Menge als gemeinsame Nullstellenmenge.

Der im C^{2n} liegende komplexe Raum X^{n+1} hat weiter die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es keine Umgebung des Nullpunktes $0 \in C^{2n}$ gibt, derart, daß $U \cap X^{n+1}$ eindeutig und holomorph auf eine analytische Menge in einer Umgebung des Nullpunktes eines komplexen Zahlenraumes C^r der Dimension $r < 2n$ abbildbar ist. Andernfalls hätten nämlich zwei verschiedene Ebenen $E(t_1)$ und $E(t_2)$ eine mindestens eindimensionale analytische Menge miteinander gemeinsam. — Die analytische Menge X^{n+1} kann also nicht lokal-irreduzibel (und mithin erst recht nicht normal^{28a)}) in einen C^r mit $r < 2n$ eingebettet werden. Indessen gibt es natürlich bereits im C^{n+2} eine in der Umgebung des Nullpunktes analytische Menge, deren zugehöriger komplexer Raum mit $X^{n+1} \cap U$ übereinstimmt, wo U eine geeignete Umgebung von $0 \in C^{n+2}$ ist.

Im vorstehenden Beispiel wurde ein komplexer Raum X mit einer nicht-uniformisierbaren Stelle durch eine eigentliche wesentliche Modifikation in eine komplexe Mannigfaltigkeit $'X$ übergeführt²⁹⁾. Auch das Umgekehrte ist möglich. Bezeichnet man nämlich mit $'X^2$ den Graphen der meromorphen Abbildung $w = z_1^2 \cdot z_2^{-1}$ von C^2 in P^1 und mit τ die Projektion des Graphen $'X^2$ auf C^2 und mit $'N$ die durch diese Projektion in den Nullpunkt des C^2 abgebildete Menge, so zeigt das Beispiel $(X^2, 'N, \tau, 0, C^2)$, daß es auch eigentliche wesentliche Modifikationen gibt, die komplexe Mannigfaltigkeiten in komplexe Räume mit nichtuniformisierbaren Stellen überführen, denn bekanntlich ist die durch die Gleichung $z_1 = \sqrt{z_2 w}$ dargestellte analytische Menge, die mit $'X^2$ übereinstimmt, im Nullpunkt nicht uniformisierbar³⁰⁾. Da die Menge $'N$ mit der Riemannschen Zahlenkugel analytisch äquivalent ist, lehrt das Beispiel $(X^2, 'N, \tau, 0, C^2)$ weiter, daß man in den Nullpunkt 0 des C^2 eine Sphäre P^1 auch so einsetzen kann, daß die sich ergebende Modifikation kein σ -Prozeß ist. Dann hat aber nach einem Satz von H. HOPF der Raum $'X^2$ notwendig nicht-uniformisierbare Punkte³¹⁾.

(Eingegangen am 18. Oktober 1954.)

^{28a)} Zur Theorie der normalen Einbettung einer analytischen Menge vgl. H. GRAUERT loc. cit.^{1a)}, wo sich weitere Literaturhinweise finden.

²⁹⁾ Ein allgemeines Verfahren, zweidimensionale komplexe Räume durch eigentliche Modifikationen in komplexe Mannigfaltigkeiten zu überführen, wurde von F. HIEZBRUCH angegeben: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 126, 1–22 (1953). Für dreidimensionale algebraische Mengen wurde ein solches Verfahren von O. ZARISKI mitgeteilt: Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math. 45, 472–542 (1944). Für den Fall höherer Dimension ist bis heute unbekannt, ob sich algebraische Singularitäten durch eigentliche Modifikationen auflösen lassen.

³⁰⁾ Vgl. H. BEHNKE und K. STEIN loc. cit.⁴⁾.

³¹⁾ Siehe H. HOPF loc. cit.³⁾.

Ein topologischer Beitrag zur Strukturtheorie nichtassoziativer Ringe.

Von

ERNST-AUGUST BEHRENS in Frankfurt am Main.

Einleitung.

Im Jahre 1945 hat N. JACOBSON [1] für die Menge der primitiven Ideale eines assoziativen Ringes eine Topologie angegeben, unter der diese Menge ein bikompakter T_0 -Raum wird. Bereits M. H. STONE [1] hatte 1937 den topologischen Raum der Primideale eines Booleschen Ringes untersucht. Nachdem 1954 in E.-A. BEHRENS [3] die Primideale eines beliebigen nicht-assoziativen Ringes (Naringes) die Hauptrolle spielten, liegt es nahe, für die Menge dieser Primideale eine Topologie wie bei JACOBSON zu erklären und den dabei entstehenden, wieder bikompakten T_0 -Raum für die Strukturtheorie der Naringe nutzbar zu machen.

Das erscheint um so angebrachter, weil einerseits die bisherigen Definitionen eines Radikales für Naringe die zugehörigen halbeinfachen Naringe nur als subdirekte aber nicht als direkte Summe darzustellen gestatten (meist auch nicht bei Voraussetzung sehr scharfer Kettenbedingungen, vgl. BEHRENS [2]), andererseits aber sich auch für nichtassoziative Ringe Beziehungen zwischen dem topologischen Zusammenhang des Strukturraumes und der Darstellung eines halbeinfachen Naringes als direkte Summe herstellen lassen (siehe § 2).

Dabei ergeben sich jedoch mehrere Strukturräume, je nachdem welche Radikal-Definition man zugrunde legt. Der Strukturraum nach dem Radikal von M. F. SMILEY [1] (siehe auch BEHRENS [1]) besteht aus allen maximalen Idealen m des Naringes \mathfrak{o} ; die Punkte des Raumes nach dem Radikal von BEHRENS [2] sind die großmodularen Ideale g bezüglich $F(c) = (c^2 - c)$; und schließlich kann man auch das Radikal von MCCOY [1] (Durchschnitt aller Primideale p) auf Naringe verallgemeinern. Wenn \mathfrak{o} ein Einselement besitzt, ist jedes m ein g und jedes g ein p , so daß die drei Strukturräume M, G, P als topologische Unterräume in dieser Reihenfolge ineinander liegen. Die algebraischen Beziehungen zwischen den Radikalen von \mathfrak{o} spiegeln sich dann in topologischen Einbettungseigenschaften der zugehörigen Strukturräume des Naringes \mathfrak{o} . Dabei wird man auf topologische Sätze über T_0 -Räume geführt, die sich hinterher rein topologisch beweisen lassen, wofür Satz 3 in § 3 ein Beispiel ist.

Das Problem der Darstellung eines halbeinfachen Naringes als direkte Summe direkt unzerlegbarer Naringe läßt sich, wie oben gesagt, durch Untersuchung der Zusammenhangsverhältnisse in bikompakten T_0 -Räumen fördern.

Dazu könnte man sich des Ergebnisses von STONE [1], S. 375—376, bedienen, daß die Untersuchung allgemeiner T_0 -Räume auf die ihrer Abbildungen in bikompakte Boolesche Räume, die wieder eng mit den Booleschen Ringen zusammenhängen, hinausläuft; oder man kann auch nach L. KAPLANSKY [1] den Verband der auf dem bikompakten T_0 -Raum stetigen Funktionen heranziehen, der dann und nur dann direktes Produkt zweier Teilverbände ist, falls sich der Raum in zwei punktfremde, abgeschlossene Teilmengen zerlegen läßt.

§ 1. Strukturräume eines Naringes.

Unter einem Primideal in einem nichtassoziativen Ring (Naring) \mathfrak{o} versteht man ein Ideal \mathfrak{p} , das das Produkt $a \cdot b$ zweier Ideale \mathfrak{a} und \mathfrak{b} nur dann umfaßt, wenn \mathfrak{a} oder \mathfrak{b} in \mathfrak{p} liegt (BEHRENS [3]). Dabei ist $a \cdot b$ das kleinste Ideal, das alle Produkte $a \cdot b$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ enthält. Die Menge der von \mathfrak{o} verschiedenen Primideale in \mathfrak{o} läßt sich durch folgende Definition der abgeschlossenen Mengen zu einem topologischen Raum P machen:

Definition: Sei A eine Menge von Primidealen in \mathfrak{o} , $A \neq \emptyset$. Sei $\mathfrak{D}_A = \cap \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in A$, dann sei $\bar{A} = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{D}_A\}$ die (abgeschlossene) Hülle von A . Ferner sei $\emptyset = \emptyset$. — Wenn $A = \bar{A}$, heiße A abgeschlossen.

Die Zuordnungsvorschrift $A \rightarrow \bar{A}$ genügt den Axiomen von KURATOWSKI (vgl. P. ALEXANDROFF und H. HOPF [1], Kap. I, § 2) für einen topologischen Raum, denn $A \subseteq \bar{A}$ und $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ sind trivial und $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ läßt sich, da alle \mathfrak{p} Primideale sind, so beweisen: Wenn $\mathfrak{p} \in \bar{A} \cup \bar{B}$, sei etwa $\mathfrak{p} \in \bar{A}$, also $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{D}_A \supseteq \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_{A \cup B}$, daher $\mathfrak{p} \in \overline{A \cup B}$. Andererseits, wenn $\mathfrak{p} \notin \bar{A} \cup \bar{B}$, also weder $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{D}_A$ noch $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{D}_B$, dann gilt $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{D}_A \cdot \mathfrak{D}_B$, da \mathfrak{p} Primideal. Wegen $\mathfrak{D}_A \cdot \mathfrak{D}_B \subseteq \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_{A \cup B}$ umfaßt \mathfrak{p} dann auch nicht $\mathfrak{D}_{A \cup B}$, also $\mathfrak{p} \notin \overline{A \cup B}$ q.e.d.

Dieser topologische Raum P ist ein T_0 -Raum, d. h. von zwei Punkten \mathfrak{p} und \mathfrak{q} besitzt mindestens einer eine Umgebung, die den andern Punkt nicht enthält, oder, was bekanntlich auf dasselbe hinausläuft (vgl. ALEXANDROFF-HOPF [1], Kap. I, § 4), aus $\{\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{q}\}$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Beweis: $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{q}\}$ zieht nach sich $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{D}_{\{\mathfrak{q}\}} = \mathfrak{q}$; analog $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$. — Im allgemeinen ist aber P kein T_1 -Raum, d. h. wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, brauchen nicht beide Punkte je eine Umgebung zu besitzen, die den anderen Punkt jeweils nicht enthält, oder gleichbedeutend damit, ein einzelner Punkt \mathfrak{p} braucht keine abgeschlossene Menge zu sein (ALEXANDROFF-HOPF a. a. O.). Wenn nämlich $\{\mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$, ist nur \mathfrak{p} Primoberideal von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. — Falls allerdings in \mathfrak{o} jedes Primideal maximal ist, muß P ein T_1 -Raum sein, z. B. bei dem Ring C der ganzen rationalen Zahlen. Aber selbst für C ist P kein T_2 -Raum, denn zu \mathfrak{p} und \mathfrak{q} , $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, gibt es keine zwei punktfremde Umgebungen.

Beweis: Wenn A aus nur endlich vielen Punkten \mathfrak{p} besteht, ist A abgeschlossen, denn in dem T_1 -Raum P ist jeder Punkt eine abgeschlossene Menge. Wenn A jedoch unendlich viele Punkte \mathfrak{p} enthält, ist $\mathfrak{D}_A = (0)$, also $\bar{A} = P$. Daraus folgt, daß A dann und nur dann abgeschlossen ist, wenn A leer oder der ganze Raum ist oder aus nur endlich vielen Punkten besteht. Die offenen Mengen in P sind also die Komplemente CA der nur endlich

viele Punkte enthaltenden Mengen A sowie natürlich θ und P . Daher ist niemals der Durchschnitt zweier offener, nicht leerer Mengen CA und CB leer, denn fast alle den unendlich vielen Primzahlen entsprechenden Punkte gehören weder zu A noch zu B .

Neben dem Raum P sind noch gewisse topologische Unterräume von P für die Strukturtheorie des Naringes \mathfrak{o} wichtig, nämlich der Raum G der großmodularen Ideale g von \mathfrak{o} und der Raum M der maximalen Ideale m von \mathfrak{o} . Nach BEHRENS [2] ist ein Ideal g großmodular, wenn es ein Element c in \mathfrak{o} gibt, das zwar nicht selbst in g liegt, für das aber das von $c^2 - c$ erzeugte zweiseitige Ideal $F(c) = (c^2 - c)$ in g enthalten ist (modular), und wenn jedes echte Oberideal von g das Element c enthält (großmodular). Statt dessen kann man auch sagen (BEHRENS [2]), g ist großmodular, wenn der Restklassenring \mathfrak{o}/g ein Idempotent, nämlich die Restklasse c' besitzt, das den Durchschnitt aller von $(0')$ verschiedenen Ideale erzeugt. Daraus folgt, daß ein großmodulares Ideal g prim ist; wenn nämlich weder a noch b in g liegen, also die Restklassen a' und b' beide ungleich Null sind, liegt c' sowohl in dem Ideal (a') als auch in (b') , also wegen $c' = c'^2$ auch in $(a') \cdot (b')$, woraus $(a) \cdot (b) \in g$ folgt. — Die Menge G der großmodularen Ideale ist also in dem Raum P enthalten, dessen Topologie eine Topologie in G induziert: A sei eine Menge in G , dann ist $\bar{A} = \{p; p \supseteq \mathfrak{D}_A\}$ und folglich die in G abgeschlossene Hülle von A die Menge $\bar{A} \cap G = \{g; g \supseteq \mathfrak{D}_A\}$. Man könnte also auf die Heranziehung der Primideale ganz verzichten und von vornherein die Topologie in G analog der von P erklären.

Wenn \mathfrak{o} ein Einselement 1 enthält, ist bekanntlich jedes maximale Ideal m prim; es ist aber auch großmodular, denn $1 \notin m$, wohl aber $F(1) = (1^2 - 1) = (0) \subseteq m$, und das einzige von m verschiedene Oberideal von m ist $\mathfrak{o} = (1)$. Daher bildet die Menge M aller maximalen Ideale, wenn $1 \in \mathfrak{o}$, einen topologischen Unterraum von G und daher auch von P :

$$P \supseteq G \supseteq M.$$

Nach einer früheren Bemerkung ist M ein T_1 -Raum.

Das nächste Ziel ist einzusehen, daß diese drei Strukturräume von \mathfrak{o} bikompakt sind. Dazu benutzt man ein auf JACOBSON [1] zurückgehendes

Lemma: Voraussetzung: Mit U sei einer der drei Räume P , G oder M bezeichnet, und es seien die A_i ein System von in U abgeschlossenen Mengen. Beh.: $\cap A_i \neq \theta$ gilt dann und nur dann, wenn es ein Ideal (Punkt) u in U gibt mit $\Sigma \mathfrak{D}_{A_i} \subseteq u$.

Die Summe der Ideale \mathfrak{D}_{A_i} in \mathfrak{o} besteht dabei aus allen Summen von jeweils endlich vielen Elementen aus diesen A_i .

Beweis: Sei $u \in \cap A_i$, also u in jeder der in U abgeschlossenen Mengen A_i enthalten. Daraus folgt $u \supseteq \mathfrak{D}_{A_i}$ für alle i , also auch $u \supseteq \Sigma \mathfrak{D}_{A_i}$. Wenn umgekehrt $\Sigma \mathfrak{D}_{A_i} \subseteq u$, dann liegt u in der in U abgeschlossenen Hülle jedes A_i , also in $\bar{A}_i = A_i$ und damit in $\cap A_i$.

Korollar: Wenn $1 \in \mathfrak{o}$ und die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind, ist $\cap A_i \neq \theta$ äquivalent $\Sigma \mathfrak{D}_{A_i} \neq \mathfrak{o}$.

Beweis: 1. Aus $\cap A_i \neq \emptyset$ folgt $\sum \mathfrak{D}_{A_i} \subseteq u \neq (1)$. — 2. Sei $\sum \mathfrak{D}_{A_i} \neq (1)$. Dann gibt es nach dem Lemma von ZORN in \mathfrak{o} ein maximales, $\sum \mathfrak{D}_{A_i}$ enthaltendes Ideal u , das man für das Ideal u in jedem der drei Räume $U = P, G, M$ nehmen kann.

Satz: Wenn $1 \in \mathfrak{o}$, ist jeder der drei Räume P, G, M bikompakt.

Beweis: Seien wieder die A_i ein System in U abgeschlossener Mengen und $\cap A_i = \emptyset$. Daraus folgt nach dem Korollar $\sum \mathfrak{D}_{A_i} = \mathfrak{o}$, also muß sich 1 darstellen lassen durch $1 = d_1 + \dots + d_n$, $d_k \in \mathfrak{D}_{A_{(k)}}$. Jedes Element a des Naringes \mathfrak{o} läßt sich dann schreiben als $a = a \cdot d_1 + \dots + a \cdot d_n$ und liegt daher bereits in $\mathfrak{D}_{A_{(1)}} + \dots + \mathfrak{D}_{A_{(n)}}$. Aus $\sum_{k=1}^n \mathfrak{D}_{A_{(k)}} = \mathfrak{o}$ folgt, wieder nach dem Korollar, $A_{(1)} \cap \dots \cap A_{(n)} = \emptyset$ und daraus, daß U bikompakt ist.

§ 2. Darstellung eines halbeinfachen Naringes als direkte Summe und topologischer Zusammenhang.

Daß jedem zum Naring \mathfrak{o} isomorphen Ring dieselben topologischen Räume P, G und M zugeordnet sind, ist klar. Aber auch bei Restklassenbildung nach dem jeweils zugehörigen Radikal ändert sich der Raum nicht; das soll Folgendes heißen: Der Durchschnitt $R = \cap \mathfrak{p}$ aller Primideale \mathfrak{p} von \mathfrak{o} ist das Radikal von \mathfrak{o} nach MCCOY [1], analog sind $B = \cap \mathfrak{g}$ bzw. $S = \cap \mathfrak{m}$ die Radikale von BEHRENS [2] bzw. von SMILEY [1] (vgl. auch BEHRENS [2]). Bezeichnet nun wieder U einen der drei Räume P, G, M und $\text{Rad } \mathfrak{o}$ das zugehörige Radikal $R(\mathfrak{o})$ bzw. $B(\mathfrak{o})$ bzw. $M(\mathfrak{o})$, so werden wegen $\text{Rad } \mathfrak{o} = \cap u$, $u \in U$, beim natürlichen Homomorphismus von \mathfrak{o} auf $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\text{Rad } \mathfrak{o}$ die Ideale u aus \mathfrak{o} eindeutig auf die Ideale u' aus \mathfrak{o}' unter Erhaltung aller Durchschnitte abgebildet. Daraus folgt die Gleichheit der zu \mathfrak{o} und \mathfrak{o}' gehörenden topologischen Räume U bzw. U' . Das legt nahe die

Definition: P, G und M sind die bzw. zu den Radikalen von MCCOY, BEHRENS und SMILEY gehörenden Strukturräume von \mathfrak{o} .

Der nach MCCOY halbeinfache Ring $\mathfrak{o}/R(\mathfrak{o})$ ist subdirekte Summe primer Ringe, d. h. von Ringen, in denen aus $(a) \cdot (b) = (0)$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$ (siehe dazu BEHRENS [3]). Analog ist $\mathfrak{o}/B(\mathfrak{o})$ subdirekte Summe von Ringen, bei denen der Durchschnitt aller Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ von einem Idempotent erzeugt wird; und schließlich ist $\mathfrak{o}/S(\mathfrak{o})$ subdirekte Summe von einfachen Ringen mit Einselementen. Die Darstellung eines Naringes \mathfrak{o} als subdirekte Summe gibt aber über die Struktur von \mathfrak{o} nicht so gut Aufschluß wie die Darstellung als direkte Summe. Die Frage nach einer solchen Darstellung läßt sich nun ins Topologische wenden auf Grund des folgenden, auf primitive Ideale in assoziativen Ringen zurückgehenden Satzes von JACOBSON [1]:

Satz 1: Vor.: U sei einer der drei Strukturräume P, G, M des Naringes \mathfrak{o} , $1 \in \mathfrak{o}$. \mathfrak{o} sei halbeinfach im Sinne des zu U gehörenden Radikales. Beh.: \mathfrak{o} ist dann und nur dann direkte Summe zweier halbeinfacher Ringe, wenn U nicht zusammenhängend ist.

Beweis 1.: Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \oplus \mathfrak{o}_2$ direkte Summe und $U_i = \{u; u \geq \mathfrak{o}_i\}$, $i = 1, 2$. Behauptet wird, daß $U = U_1 \cup U_2$ eine Zerlegung von U in zwei punkt-

fremde, abgeschlossene Mengen ist. Es ist dabei klar, daß U_1 in U abgeschlossen ist. Ferner ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}_1$ isomorph \mathfrak{o}_2 , wobei die Ideale u_2 von \mathfrak{o}_2 eindeutig denjenigen Idealen u von \mathfrak{o} entsprechen, die \mathfrak{o}_1 enthalten. Daraus folgt $U_1 \neq \emptyset$, analog $U_2 \neq \emptyset$. — Da \mathfrak{o}_2 halbeinfach, also der Durchschnitt aller u_2 aus \mathfrak{o}_2 gleich (0) ist, ist wegen $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}_1 \cong \mathfrak{o}_2$ in \mathfrak{o} das Ideal $\mathfrak{D}_{U_1} = \mathfrak{o}_1$, analog $\mathfrak{D}_{U_2} = \mathfrak{o}_2$. Nun zieht $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 = \mathfrak{D}_{U_1} + \mathfrak{D}_{U_2}$, zusammen mit der Abgeschlossenheit von U_1 und U_2 , nach dem Korollar aus § 1 nach sich $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Schließlich ist auch $U_1 \cup U_2 = U$, denn läge etwa der Punkt u_0 aus U weder in U_1 noch in U_2 , wäre also das Ideal u_0 weder von \mathfrak{o}_1 noch von \mathfrak{o}_2 Oberideal, dann wäre auch nicht $\mathfrak{o}_1 \cdot \mathfrak{o}_2$ in u_0 enthalten, da ja nach § 1 alle Ideale u prim sind; das widerspricht aber $\mathfrak{o}_1 \cdot \mathfrak{o}_2 \subseteq \mathfrak{o}_1 \cap \mathfrak{o}_2 = (0) \subseteq u_0$. — 2. Umkehrung: $U = U_1 \cup U_2$ sei eine Zerlegung von U in zwei punktfremde, abgeschlossene Teilmengen, und es sei $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{D}_{U_i}$, $i = 1, 2$. Wieder nach dem Korollar aus § 1 ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2$. Weiter ist $\mathfrak{o}_1 \cap \mathfrak{o}_2$ gleich dem Durchschnitt aller u aus U_1 oder U_2 , also aller u von \mathfrak{o} , also gleich (0) , da \mathfrak{o} als halbeinfach vorausgesetzt war. Wäre schließlich $\mathfrak{o} = \mathfrak{D}_{U_i} = (0)$, dann wäre $U = \bar{U}_i = U_i$, q. e. a.

Als Beispiel sei verfolgt, wie sich für einen nach SMILEY halbeinfachen Naring \mathfrak{o} mit absteigender Ketten-Bedingung für zweiseitige Ideale die Darstellung von \mathfrak{o} als direkte Summe einfacher Ringe mit Einselementen im Strukturraum M spiegelt. Dann kann \mathfrak{o} nämlich nur endlich viele maximale Ideale enthalten, denn in einer Kette $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supset \dots$ sind die Glieder, da \mathfrak{m}_i prim und maximal ist, echte Unterideale voneinander. Da M nach § 1 ein T_1 -Raum, also jeder Punkt eine abgeschlossene Menge ist, folgt daraus, daß $M = \{m_1\} \cup \{m_2\} \cup \dots \cup \{m_n\}$ eine Zerlegung von M in punktfremde, abgeschlossene Mengen $\{m_i\}$ ist, die sich nicht weiter zerlegen lassen. In der nach Satz 1 zugehörigen Darstellung des Naringes $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}_n$ sind die \mathfrak{o}_i halbeinfache Ringe mit nur einem maximalen Ideal, nämlich (0) , also einfache Ringe mit Einselementen, da $1 \in \mathfrak{o}$.

Daraus, daß M ein T_1 -Raum ist, in ihm also die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, folgt, daß deren Vereinigungen zu je endlich vielen es auch sind. Das kann man benutzen, um zu zeigen, daß, wenn $1 \in \mathfrak{o}$ und \mathfrak{o} unendlich viele maximale Ideale enthält, von denen jeweils unendlich viele den Durchschnitt (0) haben, der Raum M unzerlegbar, also \mathfrak{o} direkt irreduzibel ist.

Beweis: Wenn A unendlich viele Punkte enthält, ist nach Voraussetzung $\mathfrak{D}_A = (0)$, also $\bar{A} = M$. Die abgeschlossenen Mengen in M sind also \emptyset , M und die aus nur endlich vielen Punkten bestehenden. Wäre M zerlegbar in $M_1 \cup M_2$, dann müßte M_1 oder M_2 unendlich viele Punkte enthalten, wäre also nicht abgeschlossen. — Ein Beispiel dafür bietet der Ring der ganzen rationalen Zahlen.

§ 3. Einbettungseigenschaften der Strukturräume ineinander.

Die Radikale $R(\mathfrak{o})$ von MCCOY, $B(\mathfrak{o})$ von BEHRENS und $S(\mathfrak{o})$ von SMILEY sind der Reihe nach die Durchschnitte aller Primideale \mathfrak{p} , aller großmodularen Ideale \mathfrak{g} und aller maximalen Ideale \mathfrak{m} des Naringes \mathfrak{o} . In diesem

Paragraphen sei $1 \in \mathfrak{o}$ vorausgesetzt. Die Beziehungen $R(\mathfrak{o}) \subseteq B(\mathfrak{o}) \subseteq S(\mathfrak{o})$ spiegeln sich dann in der Einbettung $P \supseteq G \supseteq M$ der drei Strukturräume ineinander. Ein topologisches Kriterium für die Gleichheit je zweier dieser Radikale gibt der

Satz 1: *M dicht in G ist äquivalent $S(\mathfrak{o}) = B(\mathfrak{o})$; G dicht in P ist äquivalent $B(\mathfrak{o}) = R(\mathfrak{o})$.*

Beweis: M dicht in G bedeutet, daß die Hülle \bar{M} von M in G gleich G ist. Ferner sind in der Bezeichnung von § 1 die Radikale $S(\mathfrak{o}) = \mathfrak{D}_M$ und $B(\mathfrak{o}) = \mathfrak{D}_G$. Daher ist $\bar{M} = \{g; g \supseteq \mathfrak{D}_M\} = \{g; g \supseteq \mathfrak{D}_G\} = G$, falls $\mathfrak{D}_M = \mathfrak{D}_G$ ist. Wenn aber $B(\mathfrak{o}) \neq S(\mathfrak{o})$, umfasse etwa das Ideal g_0 nicht das Radikal $S(\mathfrak{o}) = \mathfrak{D}_M$. Daraus folgt $g_0 \notin \bar{M}$, also $\bar{M} \neq G$. — Der Beweis der zweiten Behauptung des Satzes erfolgt ganz analog. — Da in dichten Mengen dichte Mengen bekanntlich dicht sind in der Ausgangsmenge, gilt das

Korollar: *M dicht in P ist äquivalent $S(\mathfrak{o}) = R(\mathfrak{o})$.*

Auch wenn M nicht dicht in G ist, trifft doch die abgeschlossene Hülle $\{\bar{g}\}$ eines Punktes g aus G den Unterraum M , denn zu $\mathfrak{D}_{\{g\}} = g$ existiert nach dem Lemma von ZORN ein maximales Ideal \mathfrak{m} in \mathfrak{o} , das g umfaßt, also ist $\mathfrak{m} \in \{\bar{g}\}$. Analog gibt es zu jedem Primideal \mathfrak{p} in \mathfrak{o} ein \mathfrak{p} umfassendes großmodulares Ideal g , denn wegen $1 \in \mathfrak{o}$, $F(1) = (1^2 - 1) = (0) \subseteq \mathfrak{p}$, $1 \notin \mathfrak{p}$, ist \mathfrak{p} modular und daher, wieder nach dem Lemma von ZORN, enthalten in einem maximalen, zwar \mathfrak{p} aber nicht 1 enthaltenden Ideal g . Man kann also sagen

Satz 2: *Die drei Strukturräume P, G, M liegen so ineinander, daß die in P abgeschlossene Hülle jedes Punktes p aus P den Unterraum G und die in G abgeschlossene Hülle jedes Punktes g aus G den Unterraum M trifft.*

Hierin zeigt sich, wie nahe die drei Radikaldefinitionen miteinander verwandt sind, und andererseits, daß die T_0 -Räume die wesentliche Rolle spielen, denn für T_1 -Räume folgt aus der im Satz abgeleiteten Eigenschaft, daß die Räume einander gleich sind, da dann jeder Punkt für sich eine abgeschlossene Menge ist.

Nach einem rein algebraischen Satz sind die direkten Summanden bei einer Darstellung eines halbeinfachen Naringes als direkte Summe wieder halbeinfach. Das spiegelt sich in folgendem, rein topologischem

Satz 3: *Voraussetzung: Der topologische Raum E enthalte U als topologischen Unterraum. Jede nicht leere, in E offene und jede nicht leere, in E abgeschlossene Menge aus E treffe U . Behauptung: E ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn U es ist.*

Für T_1 -Räume ist der Satz trivial, weil dann jeder Punkt eine abgeschlossene Menge ist.

Beweis des Satzes: 1. Nach Voraussetzung ist U dicht in E , da jede offene Umgebung eines Punktes U trifft. Daraus folgt bekanntlich (vgl. auch BOURBAKI [1], Kap. I, § 11), daß mit E auch U nicht zusammenhängend ist; wenn nämlich $E = E_1 \cup E_2$ eine Zerlegung von E in zwei offene, punktfremde echte Teilmengen von E ist, so sind deren Spuren $E_1 \cap U = U_1$ und $E_2 \cap U = U_2$ zwei in U offene Mengen, weil die Topologie in U von der in E induziert wird. Nach Voraussetzung ist U dicht in E , also sind die U_i nicht

leer. Es ist $U = U \cap E = U \cap (E_1 \cup E_2) = U_1 \cup U_2$, und schließlich $U_1 \cap U_2 = E_1 \cap E_2 \cap U = \emptyset$. — 2. Jetzt sei U nicht zusammenhängend und $U = U_1 \cup U_2$ eine Zerlegung von U , also $U_i \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und U_i abgeschlossen in U . Für die in E abgeschlossenen Hüllen $E_i = \overline{U_i}$ gilt $E = \overline{U} = \overline{U_1 \cup U_2} = \overline{U_1} \cup \overline{U_2} = E_1 \cup E_2$, $E_i \neq \emptyset$, $\overline{E_i} = E_i$. Zu zeigen ist also nur noch $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Läge der Punkt c_0 aus E in $E_1 \cap E_2$, dann läge c_0 in $\overline{U_i}$ für $i = 1, 2$. Daraus folgt $\{c_0\} \subseteq \overline{U_i} = U_i$. Andererseits trifft aber nach Voraussetzung die in E abgeschlossene Menge $\{c_0\}$ den Unterraum U . Sei etwa $u_0 \in \{c_0\} \cap U$, also, nach dem Vorangehenden, $u_0 \in \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap U$. Nun ist aber U topologischer Unterraum von E , also $\overline{U_i} \cap U$ die nach Voraussetzung in U abgeschlossene Menge U_i für $i = 1, 2$. Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ enthielte u_0 und wäre daher nicht leer, q.e.a.

Aus den letzten beiden Sätzen folgt als

Korollar: Wenn M dicht in G oder G dicht in P ist, sind M und G bzw. G und P gleichzeitig zusammenhängend oder nicht zusammenhängend.

Beweis: Wenn eine Menge A in G nicht leer ist, enthält sie mindestens einen Punkt g_0 , dessen in G abgeschlossene Hülle einerseits in der Hülle von A in G liegt und andererseits nach Satz 2 den Raum M trifft. Also sind für $E = G$ und $U = M$ alle Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. — Analog für G und P .

Literatur.

- ALEXANDROFF, P., u. H. HOFF: [1] Topologie. 1935. — BEHRENS, E.-A.: [1] Assoziativ auflösbare Ringe. Math. Z. 58, 25—40 (1953). — [2] Nichtassoziative Ringe. Math. Ann. 127, 441—452 (1954). — [3] Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen. Math. Z. (im Druck). — BOURBAKI, N.: [1] Topologie générale. 1940. — MCCOY, N. H.: [1] Prime ideals in general rings. Amer. J. Math. 71, 823—833 (1949). — JACOBSON, N.: [1] A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring. Proc. Nat. Acad. Sci. 31, 333—338 (1945). — KAPLANSKY, I.: [1] Lattices of continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc. 53, 617—622 (1947). — SMILEY, M. F.: [1] Application of a radical of BROWN and MCCOY to nonassociative rings. Amer. J. Math. 72, 93—100 (1950). — STONE, M. H.: [1] Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375—481 (1937).

(Eingegangen am 8. Januar 1955.)

Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen.

III. Schiebungen als Abrollvorgänge. Singularitätenkurven auf Komplexflächen. Invariante Gebilde.

Von

MARTIN BARNER in Freiburg i. Br.

Die *projektive Kinematik* erweist sich als die angemessene Methode zur Behandlung bestimmter Fragen in den Differentialgeometrien LIESCHER Gruppen. Gewisse spezielle projektive Bewegungen, *Schiebungen* genannt, bilden einen einfachen Zugang zu der Projektivgeometrie der Komplexflächen. Man gelangt so auch zu neuen geometrischen Ergebnissen.

In einer früheren Arbeit¹⁾ entwickelten wir die Grundgedanken der Kinematik der Schiebungen und leiteten die wichtigsten Sätze über Komplexflächen ab. Eine zweite Mitteilung¹⁾ gab eine Klassifikation der Schiebungen nach geradengeometrischen Gesichtspunkten; diese führte zu Konstruktionen und integrallosen Darstellungen weiter Klassen von Komplexflächen. Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit den momentanen Fixpunkten einer Schiebung und den sich daraus für die Theorie der Komplexflächen ergebenden Folgerungen. Diese Arbeit ist unabhängig von den oben genannten lesbar.

Die momentanen Fixpunkte erfüllen zu jeder Zeit zwei Geraden, die zusammenfallen können. In der Schiebung bilden diese sowohl im bewegten wie auch im festen System ein Regelflächenpaar, die *Leitregelflächen* der Schiebung. Man hat drei Fälle zu unterscheiden: I. Die Leitregelflächen sind verschieden, sie sind dann schichtbar, d. h. sie sind *W*-Transformierte voneinander. II. Die Leitregelflächen fallen zusammen, die erzeugenden Geraden sind aber nicht Tangenten einer Raumkurve. III. Die zusammenfallenden Leitregelflächen bilden eine Torse.

Eine Schiebung ist dann aufzufassen als ein Abrollvorgang des bewegten Systems in das feste über ihre Leitregelflächen. Diese Abrollung erweist sich als eine Projektivabwicklung im Sinne von E. CARTAN. Für den allgemeinen Fall I ist dies hier in Abschnitt 2 durchgeführt; auf die nicht weniger interessanten Fälle II, III gehen wir im Zusammenhang mit Abwicklungsfragen an anderer Stelle ein^{2, 3)}.

¹⁾ Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Komplexflächen als Schiebflächen. Math. Ann. 126, 119—137 (1953). — II. Konstruktion und integrallose Darstellung spezieller Schiebungen. Math. Ann. 126, 418—446 (1953).

²⁾ M. BARNER: Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen. (Erscheint z. Z. in den Monatsh. f. Math. u. Phys.)

³⁾ M. BARNER: Zur Kinematik der Projektivabwicklung von Raumkurven. (Erscheint z. Z. in den Math. Nachrichten.)

Die Singularitätenkurven auf Komplexflächen entstehen dadurch, daß sich in ihnen die erzeugenden Komplexkurven berühren. Sie hängen eng mit den Leitregelflächen des bewegten Systems zusammen. Den Singularitätenkurven ist eine gewisse Vielfachheit zuzuordnen. Man kann Komplexflächen konstruieren, über deren Singularitätenkurven gewisse Voraussetzungen gemacht werden. So beantwortet sich zum Beispiel die Frage nach den C_3 -Flächen mit zwei zweifachen Singularitätenkurven von selbst.

Die Leitregelflächen des bewegten Systems bilden in der Schiebung im Falle I ein schichtbildendes Kongruenzpaar, im Falle II ein W -Strahlensystem mit Komplexflächen als Brennflächen und bei III die Tangentenkongruenz der Tangenten der Komplexkurven einer Komplexfläche. Man gelangt so zu invariant mit einer Schiebung verbundenen Figuren, insbesondere zu Komplexflächen und Systemen solcher Komplexflächen. Der Geometrie dieser Gebilde ist der letzte Abschnitt 4 dieser Arbeit gewidmet.

Über weitere geometrische Ergebnisse vergleiche man den 3. Teil des Buches über projektive Differentialgeometrie von G. BOL⁴⁾ (Teil 1 (1950), Teil 2 (1954), Teil 3 im Erscheinen). Dort wird insbesondere auch der Zusammenhang zwischen der hier vorgetragenen Theorie der Komplexflächen und der allgemeinen Flächentheorie hergestellt.

1. Unter den projektiven Bewegungen spielen die *Schiebungen* eine hervorragende Rolle. Bei ihnen ist im bewegten Raum ein festes Nullsystem ausgezeichnet. Dieses bildet zu jeder Zeit jeden Punkt auf die Schmiegeebene der von ihm beschriebenen Bahnkurve ab. Dies ist kennzeichnend.

Es seien die Punkte q_1, s_1, s_2, q_2 des bewegten Systems so gewählt, daß $(q_1, q_2), (s_1, s_2)$ konjugierte Geraden in dem Nullsystem sind. Aus der Kennzeichnung folgt dann sofort, daß die Schmiegeebenen der von $q_1 + u q_2, u = \text{const.}$, erzeugten Kurven die Gerade (s_1, s_2) enthalten. Entsprechendes gilt für die Kurven $s_1 + v s_2, v = \text{const.}$, und die Gerade (q_1, q_2) .

Ein Regelflächenpaar, bei dem auf jeder der Regelflächen eine Kurvenschar der Eigenschaft existiert, daß die Schmiegeebenen der Scharkurven durch die zugehörige Erzeugende der anderen Regelfläche hindurchgehen, nennt man *schichtbar*. Die auftretenden Kurven sind die *Schichtkurven*⁵⁾.

Eine projektive Bewegung des R_3 induziert im Geradenraum eine hyperbolische Bewegung. Zu den Schiebungen gehören die Bewegungen, bei denen eine im bewegten System des R_3 feste Hyperebene E ausgezeichnet ist. w sei der hierzu polare Punkt bezüglich der absoluten Quadrik Q . Dann geht die Tangente an jede Bahnkurve, die von einem Punkt der Ebene E erzeugt wird, durch den polaren Punkt w . Dies kennzeichnet die Bewegungen des R_3 , die zu den Schiebungen des R_3 gehören. Die Hyperebene E bzw. w definiert

⁴⁾ Herrn G. BOL möchte ich an dieser Stelle für sein großes Interesse danken, mit dem er das Entstehen der vorliegenden Untersuchungen verfolgte.

⁵⁾ Die Schichtkurven bilden auf jeder der beiden Regelflächen eine Doppelverhältnisschar; man spricht von *schichtbildenden* Dv.-Scharen. Genaueres hierüber vgl. in M. BARNER-Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Z. 62, 50–93 (1955), Abschn. 5, 66–71.

einen linearen Komplex des R_3 . Zu ihm gehört das Nullsystem, von dem wir oben sprachen.

Es sei \mathfrak{v} ein Punkt von E , der nicht auf Q liegt. Die Tangente an die von \mathfrak{v} beschriebene Bahnkurve schneidet dann zu jeder Zeit aus Q zwei Punkte aus, die mit \mathfrak{w} auf einer Geraden liegen. Diese bestimmen im R_3 zwei Regelflächen, deren Erzeugende zu jeder Zeit konjugierte Gerade im Nullsystem von \mathfrak{w} sind.

Ein Regelflächenpaar des R_3 , das im Geradenraum durch die Tangenten einer Kurve bestimmt ist, ist *schichtbar*, und jedes schichtbare Regelflächenpaar des R_3 definiert im R_3 eine Torse.

Umgekehrt gilt nun: Sind $q_1 + u q_2$ und $s_1 + v s_2$, $u, v = \text{const}$, die Schichtkurven eines schichtbaren Regelflächenpaares und sind die Vektoren q_1, s_1, s_2, q_2 so normiert, daß $\mathfrak{v} = (q_1, q_2) - (s_1, s_2)$ den Kehlpoint der von $(q_1, q_2), (s_1, s_2)$ beschriebenen Torse darstellt, so bilden die Vektoren q_1, s_1, s_2, q_2 die Basis einer Schiebung, und jede Schiebung wird so erzielt.

Zum Beweis gehen wir von zwei beliebigen, geradenweise aufeinander bezogenen Regelflächen $(q_1, q_2), (s_1, s_2)$ des R_3 aus, deren zusammengehörende Erzeugende windschief zueinander sind. Auf jeder dieser Regelflächen existiert eine Doppelverhältnisschar der Eigenschaft, daß die Tangenten an die Scharkurven die zugehörige Gerade der anderen Regelfläche treffen. Es seien die Vektoren q_1, q_2 bzw. s_1, s_2 so normiert, daß

$$(1.1) \quad \begin{aligned} q &= q_1 + u q_2, & u, v = \text{const} \\ s &= s_1 + v s_2, \end{aligned}$$

diese Kurvenscharen darstellen. Dann gelten die Ableitungsgleichungen

$$(1.2) \quad \begin{aligned} q'_i &= \alpha_{i1} s_1 + \alpha_{i2} s_2 + \alpha_i, \\ s'_i &= \beta_{i1} q_1 + \beta_{i2} q_2 + \beta_i, \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Ein gemeinsamer Faktor der vier Vektoren q_1, s_1, s_2, q_2 ist geometrisch ohne Belang — wir wollen über ihn durch die Forderung

$$(1.3) \quad (q_1, s_1, s_2, q_2) = \text{const}$$

verfügt denken. Dies zieht in (2)

$$(1.4) \quad \alpha + \beta = 0$$

nach sich.

Die Normierung der Vektoren q_1, q_2 und s_1, s_2 ist durch (1) und (3) bis auf Umnormungen der Gestalt

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \hat{q}_i &= \varrho c_i q_i, \\ \hat{s}_i &= \varrho^{-1} \bar{c}_i s_i \end{aligned} \quad \text{mit } c_i, \bar{c}_i = \text{const}, \quad i = 1, 2$$

festgelegt. Für die \hat{q}_i, \hat{s}_i gelten auch Ableitungsgleichungen des Typus (2) mit

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \hat{\alpha}_{ik} &= \varrho^2 c_{ik} \alpha_{ik}, \\ \hat{\beta}_{ik} &= \varrho^{-2} \bar{c}_{ik} \beta_{ik}, \end{aligned} \quad c_{ik}, \bar{c}_{ik} = \text{const}, \quad i, k = 1, 2.$$

Aus (5) folgt z. B.:

$$(1.7) \quad (\hat{q}_1, \hat{q}_2) + \Phi(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = c_1 c_2 \varrho^2 (q_1, q_2) + \Phi \bar{c}_1 \bar{c}_2 \varrho^{-2} (s_1, s_2).$$

Ist also auf der Geraden (q_1, q_2) , (s_1, s_2) des Geradenraumes ein Punkt \mathfrak{v} geometrisch ausgezeichnet, so kann man immer die Normierung reell so einrichten, daß er durch

$$(1.8) \quad \mathfrak{v} = (q_1, q_2) - (s_1, s_2)$$

dargestellt wird. Hierdurch ist über die Normierungsfunktion ϱ in (5) verfügt. (Die Umnormungsmöglichkeit durch Konstante ist leicht zu überblicken.)

Ist das Regelflächenpaar (q_1, q_2) , (s_1, s_2) schichtbar, so sind (1) die Schichtkurven. Diese Eigenschaft der Scharen (1) führt wegen

$$q' = \sum_{k=1}^2 (\alpha_{1k} + u \alpha_{2k}) s_k \pmod{q},$$

$$q'' = \sum_{k,l=1}^2 (\alpha_{1k} \beta_{kl} + u \alpha_{2k} \beta_{kl}) q_l \pmod{q_1, q_2, q'}$$

auf

$$(1.9) \quad \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} \beta_{kl} = \psi \delta_{il}, \quad i, l = 1, 2.$$

Andererseits ist der Punkt \mathfrak{v} des Geradenraumes Kehlpoint der Geradenschar $((q_1, q_2), (s_1, s_2))$, falls

$$(1.10) \quad \mathfrak{v}' \equiv 0 \pmod{(q_1, q_2), (s_1, s_2)}.$$

Nach den Ableitungsgleichungen (2) folgt

$$\mathfrak{v}' = (\alpha_{21} + \beta_{21})(q_1, s_1) + (\alpha_{22} - \beta_{11})(q_1, s_2) - (\alpha_{11} - \beta_{22})(q_2, s_1) - (\alpha_{12} + \beta_{12})(q_2, s_2) \pmod{(q_1, q_2), (s_1, s_2)},$$

und (10) führt also auf

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \beta_{11} &= \alpha_{22}, \\ \beta_{12} &= -\alpha_{12}, \\ \beta_{21} &= -\alpha_{21}, \\ \beta_{22} &= \alpha_{11}. \end{aligned}$$

Durch die gewählte Darstellung des Kehlpointes in (8) ist hier über die Umnormungsmöglichkeit (5) verfügt. Andererseits können wir durch eine Umnormung (5) erreichen, daß nach der Umnormung in (9)

$$(1.12) \quad \psi = \|\alpha_{ik}\|$$

wird. Dann ist aber (9) mit (11) gleichbedeutend. Damit ist gezeigt, daß die beiden eingangs angegebenen Eigenschaften die schichtbaren Regelflächenpaare in gleicher Weise kennzeichnen.

Jetzt bestätigt man leicht, daß die Vektoren q_1, s_1, s_2, q_2 , für die die Ableitungsgleichungen (2) mit (4) und (11) gelten, die Basis einer Schiebung bilden. Für den Geradenraum folgt nämlich

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= 2\alpha\mathbf{v} + 2\alpha_{21}(q_1, s_1) + 2\alpha_{22}(q_1, s_2) - 2\alpha_{11}(q_2, s_1) - 2\alpha_{12}(q_2, s_2), \\ \mathbf{v}' &= 2\alpha\mathbf{w}, \\ (1.13) \quad (q_1, s_1)' &= -\alpha_{12}\mathbf{w}, \\ (q_1, s_2)' &= \alpha_{11}\mathbf{w}, \\ (q_2, s_1)' &= -\alpha_{22}\mathbf{w}, \\ (q_2, s_2)' &= \alpha_{21}\mathbf{w}, \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{w} = (q_1, q_2) + (s_1, s_2).$$

Für irgendeinen Punkt

$$(1.14) \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{v} + r_2(q_1, s_1) + r_3(q_1, s_2) + r_4(q_2, s_1) + r_5(q_2, s_2), \quad r_i = \text{const}$$

in der Polarebene von \mathbf{w} entnimmt man (13), daß

$$(1.15) \quad \mathbf{r}' = (2\alpha r_1 - \alpha_{12}r_2 + \alpha_{11}r_3 - \alpha_{22}r_4 + \alpha_{21}r_5)\mathbf{w};$$

d. h. seine Tangente trifft \mathbf{w} .

Andererseits bildet das Nullsystem von \mathbf{w} den Punkt

$$(1.16) \quad \mathbf{p} = p_0q_1 + p_1s_1 + p_2s_2 + p_3q_2$$

auf die Ebene

$$(1.17) \quad \mathfrak{P} = p_0Q_1 + p_1\mathcal{E}_1 + p_2\mathcal{E}_2 + p_3Q_2$$

ab, wenn wir die Basisvektoren für die Ebenen des Raumes durch die Produkt-tabelle

$$(1.18) \quad \begin{array}{c|cccc} & q_1 & s_1 & s_2 & q_2 \\ \hline Q_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{E}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathcal{E}_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ Q_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

definieren. Nach den Ableitungsgleichungen bestätigt man sofort für beliebige konstante p_i in (16)

$$\mathfrak{P}\mathbf{p} = \mathfrak{P}\mathbf{p}' = \mathfrak{P}\mathbf{p}'' = 0,$$

d. h. die Nullebene von \mathbf{p} ist die Schmiegenebene der Kurve, die \mathbf{p} in der Bewegung beschreibt.

Drittens ist ein Regelflächenpaar genau dann *schichtbar*, wenn an jeder Stelle eine Quadrik existiert, die beide Regelflächen berührt. Wir nennen sie die *Berührquadrik*. Setzt man

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle &= \sum_{i,k=0}^3 a_{ik}x_i x_k, \\ f_1 &= \langle q_1, q_1 \rangle, \quad f_2 = \langle q_1, q_2 \rangle, \quad f_3 = \langle q_2, q_2 \rangle, \\ g_1 &= \langle s_1, s_2 \rangle, \quad g_2 = \langle s_1, s_2 \rangle, \quad g_3 = \langle s_2, s_2 \rangle, \end{aligned}$$

so führt dies auf die Bedingungen

$$\begin{aligned}f_1 = f'_1 = f_2 = f'_2 = f_3 = f'_3 = 0, \\g_1 = g'_1 = g_2 = g'_2 = g_3 = g'_3 = 0,\end{aligned}$$

und nach den Ableitungsgleichungen folgt daraus

$$\begin{aligned}(1.20) \quad & \langle q_1, q_1 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle = \langle q_2, q_2 \rangle = \langle s_1, s_1 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, s_2 \rangle = 0, \\& \alpha_{11} \langle q_1, s_1 \rangle + \alpha_{12} \langle q_1, s_2 \rangle = 0, \quad \beta_{11} \langle q_1, s_1 \rangle + \beta_{12} \langle q_2, s_1 \rangle = 0, \\& \alpha_{21} \langle q_2, s_1 \rangle + \alpha_{22} \langle q_2, s_2 \rangle = 0, \quad \beta_{21} \langle q_1, s_2 \rangle + \beta_{22} \langle q_2, s_2 \rangle = 0, \\& \alpha_{21} \langle q_1, s_1 \rangle + \alpha_{22} \langle q_1, s_2 \rangle + \alpha_{11} \langle q_2, s_1 \rangle + \alpha_{12} \langle q_2, s_2 \rangle = 0, \\& \beta_{21} \langle q_1, s_1 \rangle + \beta_{11} \langle q_1, s_2 \rangle + \beta_{22} \langle q_2, s_1 \rangle + \beta_{12} \langle q_2, s_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Diese Relationen sind genau dann verträglich, wenn (9) gilt. Bei geeigneter Normierung der Basisvektoren gilt dann auch (11). Die Berührquadrik hat in lokalen Koordinaten (16) nach (20) die Gleichung

$$(1.21) \quad \alpha_{11} p_0 p_2 - \alpha_{12} p_0 p_1 + \alpha_{21} p_2 p_3 - \alpha_{22} p_1 p_3 = 0.$$

Eine Parameterdarstellung dieser Quadrik wird durch

$$q_1 + u q_2 + v (q'_1 + u q'_2)$$

bzw.

$$s_1 + \bar{u} s_2 + \bar{v} (s'_1 + \bar{u} s'_2)$$

gegeben, d. h. die Tangenten an die Schichtkurven bilden die eine Geradenschar der Quadrik. Entlang dem Regelflächenpaar entsteht so eine Geradenkongruenz, und zwar ein W -Strahlsystem, dessen Brennflächen die Regelflächen sind. Die Regelflächen nennt man deshalb auch W -transformiert.

Die zweite Geradenschar der Quadrik (21), die die Geraden des schichtbaren Paares enthält — man spricht von der *konkordanten Schar* — wird im Geradenraum durch die Schmieg Ebene der Dimension zwei der Kurve dargestellt, die das schichtbare Paar kennzeichnet.

Wir müssen hervorheben, daß wir durch die Gleichungen (2) mit (4) und (11) zwei verschiedene geometrische Gebilde analytisch behandeln: einmal eine *Schiebung*, für die die Kurve \mathfrak{w} des Geradenraumes charakteristisch ist, zum anderen ein *schichtbares Regelflächenpaar*, das durch die Kurve \mathfrak{v} des Geradenraumes bestimmt wird. Für eine Schiebung ist die Darstellung insofern speziell, als wir eines unter den vielen darin auftretenden schichtbaren Regelflächenpaaren ausgezeichnet haben. Aber auch für das Regelflächenpaar (q_1, q_2) , (s_1, s_2) ist (2) eine spezielle Darstellung, da sie auf beliebig herausgegriffene Schichtkurven bezogen ist. Sind dann \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 und \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 jeweils zwei andere Schichtkurven,

$$\begin{aligned}(1.22) \quad & \tilde{q}_i = \sum_{k=1}^2 \gamma_{ik} q_k, \\& \tilde{s}_i = \sum_{k=1}^2 \bar{\gamma}_{ik} s_k, \\& \gamma_{ik}, \bar{\gamma}_{ik} = \text{const}, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

so ist in den entsprechenden Gleichungen (2)

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}_{im} &= \sum_{k,l=1}^2 \gamma_{ik} \alpha_{kl} \bar{\gamma}_{lm}^{-1}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha, \\ \tilde{\beta}_{im} &= \sum_{k,l=1}^2 \bar{\gamma}_{ik} \beta_{kl} \gamma_{lm}^{-1}, \quad \tilde{\beta} = \beta. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet (γ_{ik}^{-1}) die zu (γ_{ik}) inverse Matrix.

Wegen der speziellen Darstellung des Kehlpoints \mathfrak{v} in (8) ist, wenn diese erhalten bleiben soll,

$$\|\gamma_{ik}\| = \|\bar{\gamma}_{ik}\|$$

zu setzen. Es folgt: Zwei schichtbare Regelflächenpaare sind dann und nur dann unter Beachtung der Parameterverteilung projektiv gleichwertig, wenn zwischen den zugehörigen Invarianten die Beziehungen (23) bestehen mit zwei Matrizen (γ_{ik}) , $(\bar{\gamma}_{ik})$ mit konstanten Elementen.

Insbesondere kann man durch die Forderung

$$(1.24) \quad \|\alpha_{ik}\| = \text{const} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm 1$$

einen invarianten Parameter in dem Gebilde einführen, falls diese Halb-invarianten⁶⁾ nicht verschwinden.

Anders für die Schiebung, die durch die Kurve \mathfrak{w} des Geradenraumes gekennzeichnet ist. Zu gegebenen Ableitungsgleichungen (2) mit (4) und (11) gibt es genau eine Schiebung; jedoch läßt eine Schiebung verschiedene Darstellungen dieser Art zu, die nicht mehr durch (23) zusammenhängen. Wir wollen dies nicht genauer verfolgen.

Jedoch — so betonten wir gerade — kennzeichnet die Kurve \mathfrak{w} des Geradenraumes die Schiebung. Ist die Gerade $(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}')$ des Geradenraumes nicht Tangente an die absolute Quadrik, so definiert auch sie ein schichtbares Regelflächenpaar. Wenn wir setzen

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \mathfrak{v} &= \mathfrak{w}, \\ \sigma \mathfrak{w} &= 2 \alpha \mathfrak{v} + 2 \alpha_{21} (q_1, s_1) + 2 \alpha_{22} (q_1, s_2) - 2 \alpha_{11} (q_2, s_1) - 2 \alpha_{12} (q_2, s_2), \\ \sigma^2 &= 4 (\alpha^2 + \alpha_{22} \alpha_{11} - \alpha_{21} \alpha_{12}), \end{aligned}$$

so gelten im Geradenraum, wie der Vergleich mit (13) zeigt, Ableitungsgleichungen der Gestalt

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{v}' &= 2 \hat{\alpha} \mathfrak{w}, \\ \mathfrak{w}' &= 2 \hat{\alpha} \mathfrak{v} + 2 \hat{\alpha}_{21} \hat{\mathfrak{a}}_2 + 2 \hat{\alpha}_{22} \hat{\mathfrak{a}}_3 - 2 \hat{\alpha}_{11} \hat{\mathfrak{a}}_4 - 2 \hat{\alpha}_{12} \hat{\mathfrak{a}}_5, \\ \hat{\mathfrak{a}}_2' &= -\hat{\alpha}_{12} \hat{\mathfrak{w}}, \\ \hat{\mathfrak{a}}_3' &= \hat{\alpha}_{11} \hat{\mathfrak{w}}, \\ \hat{\mathfrak{a}}_4' &= -\hat{\alpha}_{22} \hat{\mathfrak{w}}, \\ \hat{\mathfrak{a}}_5' &= \hat{\alpha}_{21} \hat{\mathfrak{w}}, \end{aligned}$$

⁶⁾ Setzt man $t^* = F(t)$, $\frac{dt^*}{dt} = \varphi(t)$, so wird $\alpha_{ik}^* = \varphi^{-1} \alpha_{ik}$, $\alpha^* = \varphi^{-1} \alpha$.

falls die durch die Produkttabelle⁷⁾

$$(1.27) \quad \begin{array}{c|cccccc} & \overset{\circ}{0} & \overset{\circ}{1} & \overset{\circ}{2} & \overset{\circ}{3} & \overset{\circ}{4} & \overset{\circ}{5} \\ \hline \overset{\circ}{0} & 2k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{1} & 0 & -2k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ \overset{\circ}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ \overset{\circ}{4} & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{5} & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad k = \text{const}$$

definierten Vektoren geeignet normiert sind. Die hier nun auftretenden Größen $\overset{\circ}{a}_{ik}$, $\overset{\circ}{a}$ kennzeichnen mit dem durch $\overset{\circ}{w}$ definierten schichtbaren Regelflächenpaar die Schiebung.

Die vorliegende Untersuchung will hauptsächlich die geometrische Bedeutung dieser Regelflächen für die Theorie der Schiebungen und der Komplexflächen herausstellen. Aber natürlich sind auch die Fälle von Bedeutung, bei denen $\overset{\circ}{w}$ kein schichtbares Regelflächenpaar bestimmt.

2. Eine Schiebung ist bestimmt durch die Kurve, die $\overset{\circ}{w}$ im bewegten System des Geradenraumes beschreibt. Die Tangente an $\overset{\circ}{w}$ trifft die absolute Quadrik in zwei Punkten (die zusammenfallen können), denen im R_3 zwei Geraden entsprechen, die die *Leitgeraden* der Schiebung an der betrachteten Stelle heißen. Die beiden Leitgeraden durchlaufen in der Schiebung die *Leitregelflächen*. Es gilt also: *Fallen die Leitregelflächen nicht zusammen, so bilden sie ein schichtbares Regelflächenpaar.*

In einer kinematischen Betrachtung ist natürlich die Frage nach den momentanen Fixpunkten einer Bewegung wichtig. Hier gilt nun: *Die momentanen Fixpunkte einer Schiebung bilden an jeder Stelle die beiden Leitgeraden. Jeder Punkt der Leitgeraden ist momentaner Fixpunkt.* Da die Figur in sich dual ist, gehen auch die momentanen Festebenen durch die Leitgeraden.

Irgend ein Punkt

$$(2.1) \quad p = p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2$$

verhält sich in der Bewegung stationär, falls gilt

$$(2.2) \quad p' - \varrho p = 0.$$

Ausgeschrieben führt dies auf

$$(2.3) \quad \begin{aligned} -p'_0 + \varrho p_0 &= \alpha p_0 + \alpha_{22} p_1 - \alpha_{21} p_2, \\ -p'_1 + \varrho p_1 &= \alpha_{11} p_0 - \alpha p_1 + \alpha_{21} p_2, \\ -p'_2 + \varrho p_2 &= \alpha_{12} p_0 - \alpha p_2 + \alpha_{22} p_3, \\ -p'_3 + \varrho p_3 &= +\alpha_{13} p_1 - \alpha_{11} p_2 + \alpha p_3. \end{aligned}$$

⁷⁾ Die Produktbildung bezieht sich auf die absolute Quadrik des KLEINSchen Geradenraumes.

Setzt man hierin die p' gleich Null, so berechnen sich aus (3) die momentanen Fixpunkte. Für ϱ ist dabei eine Wurzel der zu (3) gehörenden charakteristischen Gleichung einzusetzen. Diese lautet ausgerechnet

$$(2.4) \quad [-\varrho^2 + \alpha^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}]^2 = 0.$$

Man bestätigt sofort, daß jeder Punkt der beiden Geraden

$$(2.5) \quad \{\alpha \pm \sqrt{\Delta}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, 0\} + \lambda \{0, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha \pm \sqrt{\Delta}\}$$

den Gleichungen (3) mit $p'_i = 0$ genügt. Für Δ ist gesetzt

$$(2.6) \quad \Delta = \alpha^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Zu den Geraden (5) gehören im Geradenraum die beiden Punkte

$$(2.7) \quad \pm \sqrt{\Delta} \mathbf{w} + \alpha \mathbf{v} + \alpha_{21}(q_1, s_1) + \alpha_{22}(q_1, s_2) - \alpha_{11}(q_2, s_1) - \alpha_{12}(q_2, s_2).$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

In Δ liegt die einfachste Invariante einer Schiebung vor, deren Vorzeichen ebenfalls invariante Bedeutung hat. Es gilt: *Je nachdem ob*

$$(2.8) \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0,$$

sind an der betrachteten Stelle die beiden Leitgeraden reell verschieden, zusammenfallend, konjugiert komplex.

Mittels der Halbvarianten Δ kann man, wenn diese nicht verschwindet, durch

$$(2.9) \quad \tilde{t} = \int \sqrt{|\Delta|} \, dt$$

einen invarianten Parameter in der Schiebung einführen. Wegen ^{a)}

$$(2.10) \quad \mathbf{w} \circ \mathbf{w} = 2, \quad \mathbf{w}' \circ \mathbf{w}' = -8\Delta$$

ist dieser im wesentlichen mit der hyperbolischen Bogenlänge der Kurve \mathbf{w} des Geradenraumes identisch.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Leitgeraden und den Bahnkurven noch hervorheben: *Die Tangenten an die Bahnkurven treffen an jeder Stelle die beiden Leitgeraden.*

Wir betrachten eine Bahnkurve des Geradenraumes, die von einem Punkt \mathbf{r} in der Polarebene von \mathbf{w} beschrieben wird. Sie bestimmt, wenn \mathbf{r} auf Q liegt, eine Regelfläche des R_3 . Die Schmiegeebene der Dimension zwei an \mathbf{r}

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = (\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$$

schneidet die Bildpunkte der konkordanten Geraden der Schmiegequadrk dieser Regelfläche aus Q aus. Liegt \mathbf{r} nicht auf Q , so bestimmt die Schmiegeebene von \mathbf{r} die konkordanten Geraden der *Berührquadrk* des zugehörigen schichtbaren Regelflächenpaares. Damit ist die hervorgehobene Aussage zu

^{a)} Die Produkte beziehen sich auf die absolute Quadrk. Vgl. (1, 27).

präzisieren: Die Leitgeraden sind an jeder Stelle konkordante Geraden der Schmiequadrik jeder Regelfläche, die von einer Gerade des ausgezeichneten Komplexes des bewegten Systems erzeugt wird, bzw. auch konkordante Geraden der Berührquadrik jedes der schichtbaren Regelflächenpaare, die von konkordanten Geraden im Nullsystem von \mathfrak{w} bestimmt werden. Die Schmie- bzw. Berührquadrik ist an jeder Stelle festgelegt durch die Erzeugende bzw. das Erzeugendenpaar und die Leitgeraden.

Mit den Leitregelflächen ist ihrerseits an jeder Stelle eine Quadrik verbunden, deren konkordante Geraden durch die Ebene

$$(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \mathfrak{w}'') = (\mathfrak{s}, \mathfrak{s}', \mathfrak{s}'')$$

des Geradenraumes definiert sind. Man nennt sie die assoziierte Quadrik der Schiebung. Fallen die Leitregelflächen nicht zusammen, so ist sie als die das Leitregelflächenpaar berührende Quadrik bestimmt. Anders, wenn die Leitregelflächen zusammenfallen — dann berührt sie zwar auch diese Regelfläche, sie ist aber nicht ihre Schmiequadrik. Sie kann in zwei verschränkte oder zusammenfallende Geradenbüschel entarten. Insbesondere ist sie fest, falls \mathfrak{w} eine ebene Kurve der Dimension zwei beschreibt. Dann wird die Schiebung K_2 -Schiebung genannt. Die feste assoziierte Quadrik ist das absolute Gebilde einer elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Geometrie, die K_2 -Schiebungen sind die CLIFFORDSchen Schiebungen in diesen Geometrien.

Die Leitgeraden sind weder im festen noch im bewegten System fest, in beiden Systemen beschreiben sie ein Regelflächenpaar. Die beiden zusammengehörenden Regelflächenpaare sind eng miteinander verknüpft.

Betrachten wir einen Punkt

$$(2.11) \quad \tilde{\mathfrak{r}} = r_0 \mathfrak{w} + r_1 \mathfrak{v} + r_2 (q_1, s_1) + r_3 (q_1, s_2) + r_4 (q_2, s_1) + r_5 (q_2, s_2)$$

in seiner Bewegung im bewegten System, so kennzeichnen wir dies durch ein übergesetztes $\tilde{}$. Die Vektoren $\mathfrak{w}, \mathfrak{v}, \dots$ in (11) sind dann also als Konstante zu behandeln. Es ist z. B. [vgl. (1,25)]:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathfrak{v}}' &= 0, & \tilde{\mathfrak{s}}' &= \tilde{\mathfrak{w}}' + \sigma \tilde{\mathfrak{s}}, \\ \tilde{\mathfrak{w}}' &= \tilde{\mathfrak{w}}' + \sigma \tilde{\mathfrak{s}}, \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$(2.13) \quad (\tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\mathfrak{w}}') = (\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}}, \tilde{\mathfrak{w}}').$$

Dies heißt: Die assoziierte Quadrik ist dem Regelflächenpaar beider Systeme in gleicher Weise zugehörig. Im allgemeinen Fall ist sie die Berührquadrik des schichtbaren Regelflächenpaares sowohl des bewegten wie des festen Systems. Insbesondere entsprechen sich die Tangenten an die Schichtkurven bei beiden Regelflächenpaaren. Diese sind ja die Transversalgeraden der assoziierten Quadrik.

Wir betrachten deshalb eine Schiebung auch als eine Abrollung eines bewegten Systems in ein festes über die Leitregelflächen. Die Vorgabe eines beliebigen

schichtbaren Regelflächenpaares des festen Systems bestimmt diesen Abrollvorgang; denn es bestimmt die Kehlkurve \mathfrak{w} — und umgekehrt. Durch Vorgabe eines schichtbaren Regelflächenpaares als Ort der momentanen Fixpunkte ist eine Schiebung eindeutig bestimmt. Jedes solche Regelflächenpaar führt auf eine Schiebung.

Wir wollen diesen Abrollvorgang noch genauer analytisch verfolgen und zeigen, daß es sich in gewisser Weise um eine Projektivabwicklung im Sinne von E. CARTAN handelt. Es gilt: Kennzeichnet man das schichtbare Regelflächenpaar der Leitregelflächen im bewegten und festen System durch ihre Invarianten nach (1.26), so stimmen die Größen

$$\tilde{\alpha}_{ik}, \hat{\alpha}_{ik}$$

für beide Paare überein, während

$$\tilde{\alpha}$$

im bewegten System verschwindet.

Gibt man etwa das Regelflächenpaar des bewegten Systems vor und damit also die Größen α_{ik} , so kann man hierzu eindeutig eine Schiebung so bestimmen, daß $\tilde{\alpha}$ im festen System eine vorgegebene Halbinvariante vom Gewicht 1 wird.

Zum Beweis knüpfen wir an (12) an. Wir sahen dort bereits, daß sich die Schichtkurven auf beiden Paaren bei der Abrollung entsprechen. Also sind die Vektoren

$$\hat{\mathfrak{d}}_2, \hat{\mathfrak{d}}_3, \hat{\mathfrak{d}}_4, \hat{\mathfrak{d}}_5 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathfrak{d}}_2, \tilde{\mathfrak{d}}_3, \tilde{\mathfrak{d}}_4, \tilde{\mathfrak{d}}_5$$

einander proportional [man vgl. (1.13) mit (1.26)]. Wir schließen auf Gleichheit an der betrachteten Stelle, indem wir zeigen, daß diese Vektoren in beiden Systemen gleichzeitig in der gewünschten Weise normiert sind. $\hat{\mathfrak{d}}_i$ ist zu \mathfrak{w} polar und läßt sich also darstellen in der Form

$$\hat{\mathfrak{d}}_i = a_{i1}\mathfrak{v} + a_{i2}(q_1, s_1) + a_{i3}(q_1, s_2) + a_{i4}(q_2, s_1) + a_{i5}(q_2, s_2).$$

Es wird dann

$$\hat{\mathfrak{d}}_i' = \tilde{\mathfrak{d}}_i' + (2\alpha a_{i1} - \alpha_{12}a_{i2} + \alpha_{11}a_{i3} - \alpha_{22}a_{i4} + \alpha_{21}a_{i5})\mathfrak{w}.$$

Der zweite Bestandteil in der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet wegen der Polarität von $\hat{\mathfrak{d}}_i$ und \mathfrak{w} . Hieraus und aus (12) folgt aber für die Invarianten der Zusammenhang

$$(2.14) \quad \hat{\alpha}_{ik} = \tilde{\alpha}_{ik}, \quad \tilde{\alpha} = 0, \quad 2\hat{\alpha} = \sigma.$$

Dies war unsere Behauptung.

Die schichtbaren Regelflächenpaare mit $\tilde{\alpha} = 0$, wie sie hier im bewegten System auftreten, sind dadurch ausgezeichnet, daß alle Schichtkurven dem festen Komplex \mathfrak{w} angehören. Wir sprechen von einem Komplexregelflächenpaar.

Soweit der allgemeine Fall I, für den \mathfrak{w}' nicht auf der absoluten Quadrik \mathcal{Q} liegt. Fallen die Leitregelflächen zusammen, so ist noch zu unterscheiden, ob

diese II. eine allgemeine Regelfläche oder III. eine Torse bestimmen. Hier rollt das bewegte System über eine Regelfläche oder über die Tangentenfläche einer Raumkurve in das feste ab. Diese Fragen interessierten uns im Hinblick auf die *Kinematik der Projektivabwicklung*. Wir haben sie an anderer Stelle genauer verfolgt⁹⁾. Hier seien die Ergebnisse formuliert:

Zu einer Regelfläche, auf der zwei Asymptotenlinien ausgezeichnet sind, gibt es genau eine Schiebung, deren Leitregelfläche die vorgegebene Regelfläche ist und bei der die Tangenten an die vorgegebenen Asymptotenlinien im ausgezeichneten Komplex liegen. Dabei werden die Regelfläche auf eine Komplexregelfläche des bewegten Systems, die beiden Asymptotenlinien auf die Komplexkurven abgerollt.

Zu einer gegebenen Raumkurve gibt es genau eine Schiebung, deren Leitregelflächen die Tangenten der vorgegebenen Raumkurve sind. Dabei wird die Kurve auf eine Komplexkurve des bewegten Systems abgerollt.

In beiden Fällen entsprechen sich die Invarianten, die die geometrischen Gebilde kennzeichnen, mit Ausnahme einer, die für das Gebilde des bewegten Systems verschwindet.

3. Eine Komplexkurve in dem ausgezeichneten Komplex des bewegten Systems erzeugt in der Schiebung eine *Komplexfläche*. Jede Komplexfläche hat deshalb eine Parameterdarstellung

$$(3.1) \quad y(t, s) = q_1 + s \, s_1 + G'(s) \, s_2 + (2G(s) - sG'(s)) \, q_2.$$

Die Parameterkurven sind die Asymptotenlinien der Fläche.

Ist es möglich, so fragen wir uns, daß die erzeugenden Komplexkurven sich selbst gegenseitig berühren? Es fällt in einer solchen *singulären Stelle* die Tangente an die Komplexkurve mit der Tangente an die hindurchlaufende Bahnkurve zusammen. Letztere nun ist, wie wir sahen, die Transversale der beiden Leitgeraden durch den betrachteten Punkt. Eine *singuläre Stelle einer Komplexfläche tritt also in den Punkten der erzeugenden Komplexkurve auf, in denen die Tangente an die Komplexkurve eine und damit beide Leitgeraden trifft*.

Die Geradenkoordinaten der Tangente an die Komplexkurve (1) ergeben sich aus (1) zu

$$(3.2) \quad (y, y_s) = (q_1, s_1) + G''(q_1, s_2) + (G' - sG'') \, v + (2G - 2sG' + s^2G'')(q_2, s_1) - (G'^2 - 2G'G'')(q_2, s_2).$$

Die betrachtete Stelle der Komplexfläche ist dann und nur dann singulär, wenn der Punkt (2) des Geradenraumes zu w' polar ist. Dies führt nach (1.13) auf die Bedingung

$$(3.3) \quad S = 2\alpha(sG'' - G') + \alpha_{21}(G'^2 - 2G'G'') + \alpha_{22}(2G - 2sG' + s^2G'') - \alpha_{11}G'' + \alpha_{12} = 0.$$

⁹⁾ Vgl. Fußnote ²⁾, S. 304.

Aus (3) erhält man die singulären Stellen der Komplexfläche (1). Die singulären Stellen schließen sich also auf der Komplexfläche zu Singularitätenkurven zusammen, die von den erzeugenden Komplexkurven eingehüllt werden.

Man kann den Singularitätenkurven eine gewisse Vielfachheit zuordnen, je nachdem in wie vielen aufeinanderfolgenden Punkten sie von den Komplexkurven berührt werden. Wir nennen eine Kurve k -fache Singularitätenkurve, wenn sie von den erzeugenden Komplexkurven in k aufeinanderfolgenden Punkten berührt wird. Analytisch bedeutet dies, daß an einer solchen Stelle nicht nur S , sondern auch die partiellen Ableitungen von S nach s bis zur $(k-1)$ -ten verschwinden. Eine k -fache Singularitätenkurve ist durch

$$(3.4) \quad S = \frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = \dots = \frac{\partial^{k-1} S}{\partial s^{k-1}} = 0$$

analytisch gekennzeichnet.

Es folgt durch Differentiation

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_s &= G'''(-2 G \alpha_{21} + s^2 \alpha_{22} + 2 s \alpha - \alpha_{11}), \\ S_{ss} &= G'''(-2 G' \alpha_{21} + 2 s \alpha_{22} + 2 \alpha) \pmod{S, S_s}, \\ S_{sss} &= G'''(-2 G'' \alpha_{21} + 2 \alpha_{22}) \pmod{S, S_s, S_{ss}}, \\ S_{ssss} &= -2 G'''^2 \alpha_{21} \pmod{S, S_s, S_{ss}, S_{sss}}. \end{aligned}$$

Die doppelten Singularitätenkurven werden also insbesondere durch das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen

$$(3.6) \quad \begin{aligned} G''' S - G'' S_s &= G'''(G'^2 \alpha_{21} - 2 G' \alpha + (2 G - 2 s G') \alpha_{22} + \alpha_{12}) = 0, \\ S_s &= G'''(-2 G \alpha_{21} + 2 s \alpha + s^2 \alpha_{22} - \alpha_{11}) = 0 \end{aligned}$$

angezeigt.

Anschaulich geometrisch gesprochen bedeutet doch das Auftreten einer zweifachen Singularität, daß nicht nur die Tangente an die Komplexkurve, sondern auch die benachbarte der Kongruenz $(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}')$ angehört; d. h. aber, daß die betrachtete Stelle der Komplexkurve auf einer der Leitgeraden liegt und die Schmiegeebene an die Komplexkurve in dieser Stelle durch die andere Leitgerade geht. Diesen Sachverhalt bestätigt man analytisch: Die Komplexkurve (1) des bewegten Systems trifft nach (2.5) eine der Leitgeraden dann und nur dann, wenn es λ und μ gibt, so daß

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \alpha \pm \sqrt{\Delta} &= \mu, \\ \alpha_{11} + \lambda \alpha_{21} &= \mu s, \\ \alpha_{12} + \lambda \alpha_{22} &= \mu G', \\ \lambda(\alpha \pm \sqrt{\Delta}) &= \mu(2 G - s G'). \end{aligned}$$

Eliminiert man aus der ersten und letzten Gleichung μ und aus den beiden mittleren λ und benützt dabei die erste Gleichung, so folgt wegen der Bedeutung von Δ nach (2.6)

$$\begin{aligned} \lambda &= (2 G - s G'), \\ \mu &= -G' \alpha_{21} + s \alpha_{22} + 2 \alpha. \end{aligned}$$

Geht man mit diesen Werten von λ und μ in die beiden mittleren Gleichungen (7) ein, so gelangt man genau auf (6). *Eine zweifache Singularitätenstelle tritt dann und nur dann ein, wenn die erzeugende Komplexkurve an dieser Stelle eine der Leitgeraden trifft. Gleichbedeutend damit ist die Bedingung, daß eine der Leitgeraden in einer Schmiegeebene dieser Stelle der Komplexkurve liegt.*

Eine singuläre Stelle zählt dreifach, falls drei aufeinanderfolgende Tangenten an die Komplexkurve die Leitgeraden dieser Stelle treffen. Hierzu müssen aber notwendig die Leitgeraden dieser Stelle zusammenfallen. Analytisch beweisen wir diese Aussage, indem wir zeigen, daß

$$(3.8) \quad S = S_s = S_{ss} = 0$$

die Relation

$$(3.9) \quad \Delta = \alpha^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$$

nach sich zieht. Nach (7) wird nämlich

$$2 G''' \alpha_{21} S + (-2 G'' \alpha_{21} + 2 \alpha_{22}) S_s + (G' \alpha_{21} - s \alpha_{22} - \alpha) S_{ss} = -2 G''' \Delta.$$

Eine dreifache Singularitätenstelle tritt nur auf Komplexflächen ein, bei denen die Leitgeraden der zugehörigen Schiebung an der betrachteten Stelle zusammenfallen. Ist dies der Fall, so liegt genau dann eine dreifache Singularitätenstelle vor, falls die Komplexkurve mit den zusammenfallenden Leitgeraden inzidiert. Fallen also die beiden Leitgeraden der zugehörigen Schiebung an einer Stelle zusammen, so treten hier keine zweifachen Singularitäten auf, die nicht auch dreifache wären.

In Fortsetzung des Verfahrens leuchtet geometrisch die Aussage ein: *Eine vierfach zählende Singularität tritt genau an den Stellen ein, an denen die zusammenfallenden Leitgeraden die zugehörige Komplexkurve berühren.* Dies bestätigt man analytisch direkt, indem man die Bedingung

$$(\eta, \eta_s) = \mu w'$$

ausschreibt und μ eliminiert. Die entstehenden Bedingungen sind mit

$$S = S_s = S_{ss} = S_{sss} = 0$$

äquivalent. Geometrisch kann man sich den ausgesprochenen Satz auch veranschaulichen, indem man zwei zweifache Singularitätenstellen zusammenrücken läßt.

Nachdem wir über die geometrischen Einzelheiten der Singularitätenkurven auf Komplexflächen in dieser Weise unterrichtet sind, beantworten sich einige Fragen, die in der Literatur gelegentlich auftauchen, eigentlich von selbst. Man hat sich z. B. für die Komplexflächen interessiert, deren Komplexkurven Kurven dritter Ordnung sind. Da es unter den Tangenten einer Kurve dritter Ordnung genau vier gibt, die eine gegebene Gerade treffen, so besitzt eine

solche C_3 -Fläche unter Beachtung ihrer Vielfachheit genau vier Singularitätenkurven. Inwiefern kann man, ausgehend von den Singularitätenkurven, solche Flächen konstruieren?

Markieren wir uns auf der Komplexkurve¹⁰⁾ des bewegten Systems für einen bestimmten Wert des Parameters die Punkte, in denen die Komplexkurve eine singuläre Kurve berührt. (Die Tangenten an die Komplexkurve in diesen Punkten treffen dann die Leitgeraden.) In der Bewegung durchlaufen diese Punkte im bewegten System die Komplexkurve.

Wir können umgekehrt eine Komplexkurve vorgeben und auf ihr verschiedene Durchlaufungen markieren, die etwa durch gleiche Werte des Parameters t aufeinander bezogen seien. Können wir dann, so wollen wir fragen, eine Komplexfläche angeben, deren Komplexkurven mit der vorgegebenen Kurve projektiv gleichwertig sind und deren Singularitätenkurven die vorgegebenen Durchlaufungen beschreiben?

Nehmen wir für den Augenblick einmal an, es seien vier Durchlaufungen der Komplexkurve vorgegeben, und verlangen wir, daß hieraus einfache Singularitätenkurven der zu konstruierenden Fläche werden sollen. Zu je vier zusammengehörenden Punkten der Komplexkurve gibt es vier Tangenten und zu diesen, falls sie nicht auf einer Quadrik liegen, genau zwei transversale Geraden. In Abhängigkeit von t entsteht so ein Regelflächenpaar, das als einziges in Frage kommt, das Leitregelflächenpaar der zu konstruierenden Schiebung zu werden.

Als Leitregelflächenpaar des bewegten Systems muß es aber ein spezielles schichtbares Paar derart sein, daß die Bildgeraden des R_6 alle durch einen festen Punkt gehen. Dies ist aber der Fall. Die Bildpunkte des R_6 der vier Tangenten an die Komplexkurve in dem Komplex \mathfrak{w} liegen alle in der Polarebene des festen Punktes \mathfrak{w} und spannen dort eine Ebene der Dimension drei auf. Der hierzu polare Raum definiert an jeder Stelle das Geradenpaar, diese Geraden des R_6 gehen alle durch \mathfrak{w} , wie es sein soll. *Geben wir eine Komplexkurve vor und markieren auf ihr in Abhängigkeit von t vier verschiedene Durchlaufungen, so bilden die Transversalen von je vier zusammengehörenden Tangenten in Abhängigkeit von t ein Komplexregelflächenpaar. Betrachten wir dieses als die Leitregelflächen eines bewegten Systems, so entsteht beim Abrollen in ein festes System eine Komplexfläche, die die gewünschten vier Singularitätenkurven trägt.*

Ein solcher Abrollvorgang vom bewegten System ausgehend, hängt natürlich immer noch von einer willkürlichen Funktion ab. Es liegt in der Natur der Sache, daß eine Komplexfläche sich durch Vorgabe der singulären Stellen im bewegten System nur bis auf eine willkürliche Funktion festlegen läßt.

Entsprechend behandelt man auch die Fälle, wenn mehrfache Singularitätenkurven vorgegeben sind. Mit der interessantesten Fall ist der zweier zweifacher Singularitätenkurven. Jetzt hat man auf der gegebenen Komplexkurve zwei verschiedene Durchlaufungen markiert. Verbindet man zusammen-

¹⁰⁾ Es braucht sich nicht um eine Kurve dritter Ordnung zu handeln.

gehörende Punkte und bringt zusammengehörende Schmiegebenen zum Schnitt, so entsteht ein spezielles schichtbares Regelflächenpaar. Rollen wir dieses System als bewegtes längs diesem Komplexregelflächenpaar in ein festes ab, so entsteht die gewünschte Komplexfläche mit den beiden vorgeschriebenen Singularitätenkurven. Insbesondere läßt sich natürlich jede Komplexfläche mit zwei zweifachen Singularitätenkurven so erzeugen.

Damit ist z. B. auch die Frage gelöst, *alle* Komplexflächen anzugeben, die von Kurven dritter Ordnung erzeugt werden und genau zwei doppelte Singularitätenkurven tragen.

Eine dreifache Singularitätenkurve kann nur entstehen, wenn die Leitregelflächen zusammenfallen. Gibt man auf einer Komplexkurve zwei Durchlaufungen vor, von denen die eine dreifach zählen soll, so findet man die Leitgerade der zu konstruierenden Schiebung, indem man in der Schmiegeebene des Punktes, der dreifach zählt, die Gerade durch den Kurvenpunkt auszeichnet, die getroffen wird von der Tangente an die Komplexkurve in dem zugehörigen zweiten Punkt. In Abhängigkeit von t entsteht eine Komplexregelfläche, wie es sein muß. Rollt man sie in ein festes System ab, so entsteht eine Komplexfläche mit einer dreifachen und einer einfachen Singularitätenkurve. Jede Komplexfläche dieses Typus läßt sich so erzeugen. Über die Beziehungen zwischen den Invarianten der Komplexkurve und der entstehenden dreifach zu zählenden singulären Kurve vergleiche man die oben zitierte Arbeit¹¹⁾.

4. Eine Komplexkurve des bewegten Systems einer Schiebung erzeugt in der Schiebung eine Komplexfläche. Man gelangt so zu der Parameterdarstellung (3.1) der Komplexflächen. Die Parameterkurven sind die Asymptotenlinien der Fläche.

Wir betrachten zwei verschiedene Komplexkurven von ω im bewegten System einer Schiebung, die wir uns irgendwie punktweise aufeinander bezogen denken. Es sind dann zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, je nachdem die Verbindungsgeraden zusammengehörender Punkte in dem Komplex ω liegen oder nicht.

Im ersten Fall erzeugen die Verbindungsgeraden eine Komplexregelfläche von ω . Die beiden Komplexkurven, von denen wir ausgehen, sind Asymptotenlinien dieser Regelfläche. Die Schmiegebenen der Komplexkurve sind ja die Nullebenen der Punkte im zugehörigen Nullsystem — die Verbindungsgeraden liegen aber als Gerade des Komplexes in den Nullebenen. Umgekehrt gibt es unter den krummlinigen Asymptotenlinien einer Komplexregelfläche, deren Komplex nicht ausgeartet ist, genau zwei verschiedene Asymptotenlinien, die dem Komplex der Regelfläche angehören.

Wir betrachten also eine Komplexregelfläche des bewegten Systems einer Schiebung. In der Schiebung entsteht eine einparametrische Schar von Regelflächen, d. h. eine Geradenkongruenz. Die beiden Komplexkurven erzeugen

¹¹⁾ Vgl. Fußnote ³⁾, S. 304; siehe dort Abschn. 4 d).

zwei Komplexflächen, die die Brennflächen dieser Kongruenz sind. Die Komplexkurve ist ja Asymptotenlinie sowohl auf der Regelfläche des bewegten Systems wie auch auf der Komplexfläche. Die Kongruenzgeraden berühren also die beiden Komplexflächen. Da die Asymptotenlinien sich auf den beiden Brennflächen entsprechen — es sind dies ja die Parameterkurven —, so handelt es sich um ein W-Strahlsystem.

Hat man umgekehrt ein W-Strahlsystem, dessen Brennflächen Komplexflächen der Eigenschaft sind, daß zusammengehörige Komplexkurven demselben linearen Komplex angehören, so entsteht dieses W-Strahlsystem durch Schiebung aus einer Komplexregelfläche des bewegten Systems, die dem ausgezeichneten Komplex angehört. Diese W-Strahlssysteme hängen von sechs Funktionen einer Veränderlichen ab.

Erzeugt man die Komplexregelfläche des bewegten Systems, indem man von einer Komplexkurve ausgeht und in jeder Schmiegeebene eine Gerade auszeichnet, so heißt dies: *Man betrachtet eine Komplexfläche und zeichnet längs einer der erzeugenden Komplexkurven in jeder der Tangentenebenen eine von den Schmiegtangenten verschiedene Gerade aus. Überträgt man diese Geraden längs der Komplexfläche mittels der zu der Fläche gehörenden Schiebung, so entsteht ein solches W-Strahlsystem, dessen zweite Brennfläche ebenfalls Komplexfläche ist, der Art, daß zusammengehörende Komplexkurven in demselben linearen Komplex liegen.*

Wir kommen zum zweiten, allgemeinen Fall: Wir betrachten im bewegten System eine Regelfläche, die durch Verbindung der Punkte zweier Komplexkurven von \mathfrak{w} entsteht — die Verbindungsgeraden sollen dem Komplex \mathfrak{w} nicht angehören. Zu jeder Geraden gehört auch die konjugierte Gerade im Nullsystem von \mathfrak{w} ; es entstehen zwei geradenweise aufeinander bezogene Regelflächen im bewegten System. Sie bilden ein Komplexregelflächenpaar, die Schichtkurven sind Komplexkurven von \mathfrak{w} . Betrachten wir nämlich die Kurven der einen Regelfläche, deren Tangenten an jeder Stelle die zugehörige Gerade der anderen Regelfläche treffen, so gehören diese Tangenten, d. h. diese Kurven der einen Regelfläche dem Komplex \mathfrak{w} an. Dann geht aber die Schmiegeebene jeder dieser Kurven als Nullebene durch die zugehörige Gerade der anderen Regelfläche — diese Kurven sind also die Schichtkurven, die auf jeder der beiden Regelflächen des Paares existieren. Die Komplexkurven, von denen wir ausgingen, sind selbst zwei solche Schichtkurven.

Wir betrachten also im bewegten System einer Schiebung ein Paar schichtbarer Regelflächen, deren Schichtkurven dem Komplex \mathfrak{w} angehören. In der Schiebung entstehen zwei einparametrische Systeme von Komplexflächen und zwei Geradenkongruenzen, die geradenweise aufeinander bezogen sind. *Die beiden Geradenkongruenzen bilden ein schichtbildendes Kongruenzpaar, die Schichtflächen sind die Komplexflächen.* Zum Beweis dieser Aussage ist zu zeigen, daß die Tangentenebene an eine der Schichtflächen in einem Kongruenzstrahl den zugehörigen Strahl der anderen Kongruenz enthält. Die Schichteigenschaft der Komplexkurven auf den Regelflächen des bewegten Systems überträgt sich aber sofort in dieser Weise auf die von ihnen

erzeugten Flächen, da die Komplexkurven die Asymptotenlinien dieser Flächen sind.

Hat man umgekehrt ein Kongruenzpaar, dessen eine Kongruenz für die andere schichtbildend ist, und sind zwei der Schichtflächen Komplexflächen der Eigenschaft, daß zusammengehörende Kurven demselben Komplex angehören, so entsteht dieses Kongruenzpaar durch Schiebung aus einem Komplexregelflächenpaar. Auch die zweite Kongruenz ist für die erste schichtbildend. Sämtliche zweimal ∞^1 Schichtflächen sind Komplexflächen, deren zusammengehörende Komplexkurven demselben Komplex angehören. Diese Kongruenzpaare hängen von sieben Funktionen einer Veränderlichen ab.

Wir betrachten je eine beliebige Schichtfläche aus jedem der beiden Systeme, d. h. wir betrachten zwei Komplexflächen, die durch Schiebung aus je einer der Schichtkurven der beiden Regelflächen des bewegten Systems entstehen. Im bewegten System definieren diese beiden Komplexkurven eine Komplexregelfläche, wie wir sie eingangs untersucht haben. *Zwei Schichtflächen verschiedener Systeme sind die Brennflächen eines W-Strahlsystems, das durch Schiebung aus einer Komplexregelfläche entsteht.* Dieser Zusammenhang besteht allgemein bei gegenseitig schichtbildenden Kongruenzpaaren. Man nennt zwei Schichtflächen verschiedener Systeme deshalb *W-Transformierte erster Stufe*, zwei Schichtflächen des gleichen Systems *W-Transformierte zweiter Stufe* voneinander.

Natürlich kann man zu jeder Komplexfläche zwei Kongruenzen konstruieren, die ein in dieser Weise schichtbildendes Paar bilden und die Ausgangsfläche als Schichtfläche besitzen. Bei gegebener Komplexfläche gehen dabei noch zwei willkürliche Funktionen ein. Man gibt hierzu etwa längs einer der erzeugenden Komplexkurven durch jeden Punkt eine nicht in der Tangentenebene liegende Gerade vor. Damit ist auch jeweils die im Nullsystem des zugehörigen Komplexes konjugierte Gerade gegeben. Das Kongruenzpaar entsteht, indem man die zur Komplexfläche gehörende Schiebung anwendet. Oder — indem man zwei Schichtflächen desselben Systems als asymptotisch Transformierte zweiter Stufe auffaßt — man konstruiert zur gegebenen Komplexfläche zunächst ein tangierendes W-Strahlsystem wie oben beschrieben und führt dieselbe Konstruktion nochmals für die zweite Brennfläche dieses W-Strahlsystems, die ja auch Komplexfläche ist, durch. Auch so kommt man zu der betrachteten Figur.

Wir fassen zusammen: Durch Schiebung entsteht aus einer Komplexkurve eine Komplexfläche, aus einer Komplexregelfläche ein W-Strahlsystem mit Komplexflächen als Brennflächen, aus einem Komplexregelflächenpaar ein schichtbildendes Kongruenzpaar mit Komplexflächen als Schichtflächen.

Nun zeigte uns aber der Abschnitt 2, daß die Leitregelflächen im bewegten System entweder I. ein Komplexregelflächenpaar oder II. eine Komplexregelfläche oder III. die Tangenten einer Komplexkurve bilden. Es folgt:

Mit einer Schiebung invariant verbunden ist entweder I. ein schichtbildendes

Kongruenzpaar mit Komplexflächen als Schichtflächen oder II. ein W-Strahlensystem mit Komplexflächen als Brennflächen oder III. eine Komplexfläche. Aus Abschnitt 3 folgt dabei genauer: Zu I.: Jede der Schichtflächen trägt eine zweifache Singularitätenkurve. Verbindet man zusammengehörende Punkte dieser Singularitätenkurven der verschiedenen Flächen, so entsteht das schichtbare Regelflächenpaar der Leitregelflächen des festen Systems. Zu II.: Jede der Komplexflächen trägt eine dreifache Singularitätenkurve. Die Verbindungsgeraden zusammengehörender Punkte dieser Singularitätenkurven erzeugen die (einzige) Leitregelfläche des festen Systems, auf der zwei Asymptotenlinien ausgezeichnet sind. Zu III.: Die Komplexfläche trägt eine vierfache Singularitätenkurve. Sie erzeugt eine Raumkurve des festen Systems, die mit der Schiebung invariant verknüpft ist und diese kennzeichnet.

Diese Aussagen interpretieren eine Schiebung als einen Abrollvorgang eines bewegten Systems in ein festes von neuem geometrisch. Über die analytischen Zusammenhänge vergleiche man Abschnitt 2 und die oben zitierte Arbeit¹²⁾.

¹²⁾ Vgl. Fußnoten ²⁾, ³⁾, S. 304.

(Eingegangen am 26. November 1954.)

Positive Transformationen in lokalkonvexen halbgeordneten Vektorräumen.

Von

HELMUT SCHAEFER in Leipzig.

1. Einleitung.

1.1. PERRON [13] bewies 1907, daß jede n -reihige nichtsinguläre Matrix $A = (a_{ik})$ mit $a_{ik} > 0$ einen positiven Eigenwert λ_0 besitzt, der einfach und der absolut größte ist; zu λ_0 gibt es einen Eigenvektor $x_0 = (x_i)$ mit $x_i > 0$. Dieses Resultat wurde von JENTZSCH [7] mittels der Fredholmschen Theorie auf lineare Integralgleichungen mit positivem Kern verallgemeinert; für den Fall einer vollstetigen (linearen) Transformation im Raum stetiger Funktionen über einem (endlichen) Intervall I gab HOPF [6] einen anderen Beweis. MORGENSTERN [11] bewies eine ähnliche Aussage für vollstetige, nicht notwendig lineare positive Transformationen im Raum summierbarer Funktionen (L_1).

Es entsteht die Frage, ob nicht ein analoges Resultat besteht, wenn man einen allgemeinen topologischen Vektorraum, in dem eine Halbordnung gegeben ist, zugrunde legt. Diese Frage ist im linearen Fall — z. T. mit erheblichen Einschränkungen — für Banachräume von KREIN und RUTMAN [8] beantwortet worden.

In der vorliegenden Arbeit gelingt es nun, das Problem für lokalkonvexe, halbgeordnete Vektorräume zu lösen, und zwar im linearen wie im nicht-linearen Falle. Jede (streng) positive, vollstetige Transformation (im Sinne von LERAY [9]) besitzt einen positiven „Eigenwert“ λ_0 mit „positivem“ Eigenelement x_0 :

$$\lambda_0 x_0 = T(x_0).$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Voraussetzung der strengen Positivität (vgl. 1.2.) und Vollstetigkeit (p -Vollstetigkeit, vgl. 2.3.) nicht entbehrlich ist¹⁾; ebenso läßt sich die Aussage über die Einfachheit bzw. den Betrag von λ_0 nicht aufrechterhalten, wenn man beliebige (nichttriviale) Halbordnungen zuläßt bzw. wenn der zugrunde gelegte Raum E nicht lineare Hülle des Kegels C der in E positiven Elemente ist. — Der Beweis wird in § 3 für den allgemeinen Fall mit Hilfe der Fixpunktmethode gegeben. § 2 erledigt den linearen Fall unabhängig davon; dabei zeigt sich, daß hier der fragliche

¹⁾ Die Transformationen $Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$ bzw. $Tf = \int_0^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 1$) des

HILBERTSchen Folgen- bzw. Funktionenraumes in sich sind Beispiele einer streng positiven, nicht vollstetigen bzw. einer vollstetigen, nicht streng positiven Abbildung, die keinen Punkteigenwert besitzt. (Halbordnung: $x \geq \theta$ wenn $x_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) bzw. wenn $f(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq 1$)).

Eigenwert λ_0 zugleich untere Grenze der $\lambda (> 0)$ ist, für welche die Transformation eine positive Resolvente besitzt. Aus den ALTMANSchen Resultaten [1] folgert man leicht, daß ein entsprechender Satz für die adjungierte Transformation im dualen Raum gilt. Schließlich wird (Def. 2.1.) eine Definition der Beschränktheit für (lineare) Transformationen in lokalkonvexen Räumen gegeben, die sich als nützliche Verallgemeinerung der in Banachräumen geläufigen erweist; eine genauere Untersuchung soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

1.2. Wir erinnern an einige Begriffe. Eine Menge E heißt lineares System, wenn E eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe über einem Integritätsbereich R ist; wir setzen im folgenden R als den Körper der reellen Zahlen mit der üblichen (nicht diskreten) Topologie voraus. E heißt linearer topologischer Raum (l. t. R.), wenn E eine topologische Struktur besitzt, die mit der linearen durch die Axiome

$$(ET_I) \quad (x, y) \rightarrow x + y \text{ ist stetige Abbildung von } E \times E \text{ in } E$$

$$(ET_{II}) \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda x \text{ ist stetige Abbildung von } R \times E \text{ in } E$$

verknüpft ist.

Ein l. t. R. E heißt lokalkonvex²⁾, wenn das Element θ ³⁾ ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U} = \{U\}$ konvexer Umgebungen besitzt; diese können wir als symmetrisch und abgeschlossen voraussetzen. Jeder solchen Umgebung entspricht eine Halbnorm $p_\alpha(x)$ ($\alpha \in A$) derart, daß

$$(1.1) \quad p_\alpha(\lambda x) = |\lambda| p_\alpha(x), \quad p_\alpha(x + y) \leq p_\alpha(x) + p_\alpha(y)$$

und daß für ein $\varepsilon > 0$ $p_\alpha(x) \leq \varepsilon$ mit $x \in U$ gleichwertig ist⁴⁾; man sagt, die betrachtete Topologie werde durch die Familie $\Gamma = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Halbnormen erzeugt. Umgekehrt entspricht jedem (1.1) genügenden Funktional $p(x)$ eine symmetrische, konvexe, abgeschlossene Umgebung eines Elementes $x_0 \in E$ (indem $p(x - x_0) \leq 1$ genau in $U(x_0)$), jeder Familie Γ von solchen eine (lokal-konvexe) Topologie auf E . Damit eine lokalkonvexe Topologie auf E separiert⁵⁾ sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $x_0 \neq \theta$ ein $\alpha_0 \in A$ existiere mit $p_{\alpha_0}(x_0) \neq 0$. Schließlich heißt E vollständig, wenn jeder Cauchyfilter⁶⁾ konvergiert (in E).

Es sei nun in dem l. t. R. E eine Ordnungsrelation⁷⁾ (Halbordnung) gegeben, die mit der linearen Struktur verträglich, d. h. durch die Axiome

$$(EO_I) \quad \lambda > 0, x > y \text{ bedingen } \lambda x > y$$

$$(EO_{II}) \quad x > y \text{ bedingt } x + z > y + z \text{ für jedes } z \in E$$

verbunden ist; Topologie und Halbordnung seien durch die Forderung

$$(TO) \quad C = \{x \in E \mid x \geq \theta\} \text{ ist abgeschlossen in } E$$

²⁾ Man vgl. für das Folgende [2], Chap. I, II; [3], Chap. II und die grundlegenden Arbeiten von DIEUDONNÉ [5], MACKEY [10].

³⁾ θ bezeichnet das Nullelement in E , 0 die Zahl Null, O die Nullabbildung.

⁴⁾ Wir sagen p_α sei eine „zu U gehörige“ Halbnorm.

⁵⁾ Das heißt, es gilt das (HAUSDORFFSche) Trennungsaxiom in E .

⁶⁾ Vgl. [2], Chap. II, p. 147.

⁷⁾ Vgl. [3], Chap. II, p. 48.

verknüpft⁹⁾. Offenbar induziert die gegebene Halbordnung in E eine solche im (linearen) System aller Endomorphismen $\{T\}$ von E ; wir nennen T positiv, geschrieben $T \geq 0$, wenn $TC \subset C$ (d. h. $Tx \geq \theta$ für $x \geq \theta$), streng positiv, wenn $T \geq 0$ ist und $\theta \notin T(M)$ gilt⁹⁾ für $\theta \notin \bar{M}$, $M \subset C$.

2. p -vollstetige lineare Transformationen.

2.1. E bezeichne einen lokalkonvexen, separierten und vollständigen l.t.R., $\mathfrak{U} = \{U\}$ ein vollständiges U -System der Null (Nr. 1.2.). Wir schreiben kurz $|x|_\alpha = p_\alpha(x)$ für die zu $\alpha \in A$ gehörige Halbnorm.

Def. 2.1. Eine lineare Transformation T von E in sich heiße beschränkt, wenn es eine Umgebung $U(\theta)$ gibt, deren Bild $T(U)$ beschrnkt¹⁰⁾ ist.

Sei jetzt T beschränkt; wenn $U(\theta)$ eine θ -Umgebung mit beschränktem $T(U)$ ist, so gibt es Indices $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$, so daß $(U_i \in \mathfrak{U}) \quad V = \bigcap_{i=1}^n U_i \subset U$, $|x| = p(x) = \sup_i |x|_{\alpha_i}$ eine zu V gehörige Halbnorm und $T(V)$ beschränkt ist. Daher gibt es Konstanten $C_\alpha (\alpha \in A)$, so daß

$$(2.1) \quad |Tx|_\alpha \leq C_\alpha |x| \quad (\alpha \in A)$$

für alle $x \in E$. Für $|x| \neq 0$ ist dies klar, da nach Voraussetzung die Menge $T\left(\frac{x}{|x|}\right)$ beschränkt ist; für $|x| = 0$ aber, d. h. für Elemente des Nullraumes von V , ist $T(\lambda x) = \lambda Tx$ beschränkt bei beliebigem λ , daher $Tx = \theta$ und $|Tx|_\alpha = 0 (\alpha \in A)$. Insbesondere haben wir $|Tx| = \sup_i |Tx|_{\alpha_i} \leq |x| \sup_i C_{\alpha_i}$ mit $C = \sup_i C_{\alpha_i}$ also

$$(2.2) \quad |Tx| \leq C |x|.$$

Die kleinste Konstante dieser Art, $C = |T|$, heiße V -Schränke von T . Aus (2.1) folgt, daß $Tx \rightarrow \theta$ für $|x| \rightarrow 0$; hierauf stützen sich die folgenden Betrachtungen wesentlich.

2.2. Wir betrachten die Transformationen $T_\lambda = (\lambda I - T)$ und bezeichnen als Resolventenmenge P_T die Menge aller (reellen) λ ¹¹⁾, für welche eine stetige lineare Transformation $R(\lambda, T)$ existiert, die den Relationen

$$(2.3) \quad (\lambda I - T) R(\lambda, T) = R(\lambda, T) (\lambda I - T) = I$$

genügt. Die Komplementärmenge von P_T bezeichnen wir als (reelles) Spektrum von T .

Wenn V_0 den Nullraum von V , d. h. die Menge aller $x \in E$ mit $|x| = 0$ bezeichnet, so ist der Quotientenraum E/V_0 ein normierter Raum B . Jedes

⁹⁾ Vgl. [4], Chap. II, p. 26 sowie für lineare Systeme mit Halbordnung NAKANO [12], wo außer (EO_I), (EO_{II}) noch die Existenz einer „oberen Schranke“ z für jedes Paar x, y von Elementen aus E gefordert wird.

¹⁰⁾ Das heißt, auf jeder Menge M positiver Elemente aus E , für die θ äußerer Punkt ist, soll T der Null nicht beliebig nahe kommen, vgl. Fußnote 1).

¹¹⁾ $A \subset E$ heißt beschränkt, wenn es zu jeder $U(\theta)$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß $A \subset \lambda U$. Für das Folgende vgl. man ALTMAN [1].

¹²⁾ Die Ausdrücke Resolventenmenge, Spektrum beziehen sich im folgenden nur auf reelle λ .

$x \in B$ ist die Klasse $x = \{x \in E \mid x - x_0 = 0\}$ für ein gewisses $x_0 \in E$. Wir setzen $\|x\| = |x_0|$ und haben $|x| = \|x\|$ für jedes $x \in x$; $x_1 \sim x_2$ bedeute, daß x_1, x_2 derselben Klasse x angehören. $x \in x, y \in y$ bedingen $x + y \in x + y$. Wir können nun jedem beschränkten T (Def. 2.1.) eine in B beschränkte lineare Transformation $\mathfrak{T}(y = \mathfrak{T}x$ wenn $x \in x, y \in y$ und $y = Tx$) zuordnen, da wegen (2.1) $Tx_1 = Tx_2$ für $x_1 \sim x_2$ und nach (2.2)

$$(2.4) \quad \|\mathfrak{T}x\| \leq C \|x\| \quad (\|\mathfrak{T}\| = |T|)$$

ist. Es sei nun $\lambda \neq 0$ und $\lambda \in P_{\mathfrak{T}}$, d. h. λ ein Punkt der Resolventenmenge¹¹⁾ von \mathfrak{T} . Dann existiert eine in B beschränkte Resolvente $\mathfrak{R}(\lambda, \mathfrak{T})$ von \mathfrak{T} , und zu gegebenem $y \in B$ gibt es $x = \mathfrak{R}_\lambda y$ ¹²⁾, d. h. es ist $T_\lambda x = (\lambda I - T)x = y$ für ein (übrigens eindeutig bestimmtes) $x \in E$. Diese Abbildung $y \rightarrow x$ ist linear und stetig; wir bezeichnen sie mit $R(\lambda, T)$. Nebenbei ergibt sich

$$(2.5) \quad |R(\lambda, T)| = \|\mathfrak{R}(\lambda, \mathfrak{T})\|.$$

Wir beweisen zwei Hilfssätze, die nachfolgend benötigt werden.

Hilfssatz 2.1. *Das Spektrum jeder beschränkten Transformation T ist abgeschlossen und im Intervall $|\lambda| \leq |T|$ enthalten; für $|\lambda| > |T|$ wird $R(\lambda, T)$ durch die Neumannsche Reihe*

$$(2.6) \quad R(\lambda, T) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^{-v-1} T^v$$

dargestellt.

Beweis. Es sei $\lambda_0 \in P_{\mathfrak{T}}$ und $\lambda_0 \neq 0$. Dann ist nach bekannten Sätzen für eine Umgebung $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ $\mathfrak{R}(\lambda, \mathfrak{T})$ vorhanden und beschränkt; aus den obigen Betrachtungen folgt, daß entsprechendes¹³⁾ für $R(\lambda, \mathfrak{T})$ gilt. Daher ist $P_{\mathfrak{T}} \subset P_T$ mit Ausnahme höchstens von $\lambda = 0$; umgekehrt beweist man leicht $P_T \subset P_{\mathfrak{T}}$. Die Spektren von T und \mathfrak{T} stimmen also überein mit möglicher Ausnahme des Punktes $\lambda = 0$, der nicht notwendig zu P_T gehört, wenn dies für $P_{\mathfrak{T}}$ zutrifft. Die Konvergenz der Neumannschen Reihe für $|\lambda| > |T|$ folgt in naheliegender Bezeichnungsweise wegen (2.1), (2.2) aus

$$|(R_{n+p} - R_n)y|_x \leq \frac{C_x}{\lambda^2} \left| \sum_{v=0}^{p-1} \lambda^{-(n+v)} T^{n+v} y \right| \leq C_x (|\lambda| - |T|)^{-1} |T|^n \|y\| |\lambda|^{n+1},$$

da E vollständig ist. Man zeigt leicht, daß die Reihe $R(\lambda, T)$ darstellt.

Hilfssatz 2.2. *Es sei $T \geq 0$ eine beschränkte Transformation des halbgeordneten (lokal konvexen, vollständigen) l.t.R. E in sich. Dann ist die Menge $P_T \subset P_T$ aller (reellen) $\lambda > 0$, für welche $R(\lambda, T) \geq 0$, nach links offen.*

Beweis. Wegen der Abgeschlossenheit von $C = \{x \in E \mid x \geq 0\}$ (Nr. 1.2.) in E ist P_T^* nicht leer, wie man aus der Reihe (2.6) erkennt. Sei jetzt $\lambda_0 \in P_T^*$.

¹¹⁾ Sei B^* vollständige Hülle von B und $x^* \in B^*$. Dann existieren $x_n \in B, x_n \rightarrow x^*$. Wenn $x_n \in x_n$, so gilt $|x_n - x_n| \rightarrow 0$; daher ist wegen (2.1) $z_n = T x_n$ Cauchyfolge in E und $z_n \rightarrow z$, also $\mathfrak{T} x_n \rightarrow \mathfrak{T}^* x^* = z \in B$ ($z \in B, \mathfrak{T}^*$ Erweiterung von \mathfrak{T} auf $B^*, \mathfrak{R}_\lambda^*$ Erweiterung von \mathfrak{R}_λ auf B^*). Wenn nun $y \in B$ und $x^* = \mathfrak{R}_\lambda y$, so gilt $\lambda x^* = \mathfrak{T}^* x^* + y \in B$, daher $x^* \in B$. M. a. W.: Falls $0 \neq \lambda \in P_{\mathfrak{T}}$, so bildet \mathfrak{T}_λ den (nicht notwendig vollständigen) Raum B auf sich ab.

¹²⁾ Das heißt $R(\lambda, T)$ ist stetig und V -beschränkt, im allgemeinen aber nicht beschränkt im Sinne der Def. 2.1.

Wir haben zu zeigen: Aus $R(\lambda_0, T) \geq 0$ folgt $R(\lambda, T) \geq 0$ für eine linke Umgebung $0 < \lambda_0 - \lambda < \varepsilon$ von λ_0 . Für solche λ haben wir (s. o.) in B

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mathfrak{T}) = \mathfrak{R}(\lambda_0, \mathfrak{T}) \left\{ I + \sum_{v=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^v [\mathfrak{R}(\lambda_0, \mathfrak{T})]^v \right\}.$$

Es sei $y > \theta$ und $y \in \mathfrak{p}$. Wir setzen $\delta_n = \mathfrak{R}(\lambda_0, \mathfrak{T}) \left\{ I + \sum_{v=1}^n (\lambda_0 - \lambda)^v [\mathfrak{R}(\lambda_0, \mathfrak{T})]^v \right\} y$.

Für $\lambda \leq \lambda_0$ haben wir $z_n \geq \theta$; $z_n = R_0 \left\{ I + \sum_{v=1}^n (\lambda_0 - \lambda)^v [R(\lambda_0, T)]^v \right\} y, z_n \in \delta_n$.

Nun ist offenbar $\delta_n \rightarrow \mathfrak{R}(\lambda, \mathfrak{T}) y$, also auch $|z_n - R(\lambda, T) y| \rightarrow 0$. Es ist aber nach Definition von $R(\lambda, T) = R_\lambda$

$$\lambda R_\lambda y = y + T R_\lambda y = y + T z_n + T [R_\lambda y - z_n].$$

Da der letzte Term nach θ konvergiert, für genügend kleines $\varepsilon > 0$ $\lambda > 0$ ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} T z_n \geq \theta$ gilt, folgt hieraus $R_\lambda \geq 0$ für $0 < \lambda_0 - \lambda < \varepsilon$.

2.3. Wir bezeichnen eine stetige (nicht notwendig lineare) Transformation T des lokalkonvexen l.t.R. E in sich als vollstetig, wenn es eine (abgeschlossene) Umgebung $U(\theta)$ gibt, deren Bild $T(U)$ kompakt¹⁴⁾ ist. $T \geq 0$ heiße p -vollstetig, wenn für eine $U(\theta)$ das T -Bild von $C \cap U$ kompakt ist. Es ist klar, daß jede lineare kompakte Transformation im Sinne der Def. 2.1. beschränkt ist. Auf Grund der obigen Hilfssätze beweisen wir den

Satz 2.1. *Es sei E ein halbgeordneter l.t.R., der lokalkonvex, separiert und vollständig ist, und es sei $C \neq \{\theta\}$ ¹⁵⁾. Jede streng positive, vollstetige lineare Transformation von E in sich besitzt einen Punkteigenwert $\lambda_0 > 0$ mit positivem Eigenelement $x_0 > \theta$,*

$$(2.7) \quad \lambda_0 x_0 = T x_0.$$

Beweis. Wir setzen $\lambda_0 = \inf_{P_T} \lambda$ und zeigen zunächst: $\lambda_0 > 0$. Nach Hilfs-

satz 2.2. kann λ_0 nicht regulär sein (d. h. zu P_T gehören); hieraus folgt, daß $R(\lambda, T)$ für fallende $\lambda \rightarrow \lambda_0$ nicht V -beschränkt bleiben kann. Nun ist aber die abgeschlossene lineare Hülle von C , $E_0 = \overline{\{C - C\}}$ ein Teilraum von E , der wegen $T\{C - C\} \subset T\{C - C\} = \{TC - TC\} \subset \{C - C\}$ (Stetigkeit von T) in sich transformiert wird, und $C - C$ ist dicht in E_0 ; folglich gibt es Elemente $y \in C$ ¹⁶⁾, d. h. $y > \theta$, für welche $|R(\lambda_n, T) y| \rightarrow +\infty$ für fallendes $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Sei $x_n = R(\lambda_n, T) y > \theta$, also $\lambda_n x_n - T x_n = y$; mit $x_n/|x_n| = x_n^*$, $y/|x_n| = z_n$ haben wir $z_n \rightarrow \theta$. Wäre nun $\lambda_0 = 0$, so wäre $M = \{x_n^*\}_{n \geq 1}$ eine Teilmenge von C mit $\theta \notin \overline{M}$, aber offensichtlich $\theta \in \overline{T(M)}$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß T streng positiv ist.

Es ist also $\lambda_0 > 0$, und für die Folge $\{x_n^*\}$ gilt $T x_n^* = \lambda_n x_n^* - z_n$. Infolge der Vollstetigkeit von T gibt es eine Indexfolge $\{n'\}$, so daß $T x_{n'}^* = \lambda_{n'} x_{n'}^* - z_{n'}$.

¹⁴⁾ $A \subset E$ heißt kompakt, wenn jede (offene) Überdeckung von \bar{A} eine endliche Überdeckung enthält (\bar{A} bikompakt). Vgl. LERAY [9].

¹⁵⁾ Der Fall $C = \{\theta\}$ ist trivial; in diesem Fall ist jede lineare Transformation streng positiv, Elemente $x > \theta$ existieren nicht.

¹⁶⁾ Denn eine auf C V -beschränkte Transformation ist offenbar auf $C - C$ V -beschränkt.

konvergiert; wegen $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 > 0$ und $z_n \rightarrow \theta$ konvergiert $\{x_n^*\}$ selbst; offenbar genügt der $\lim_{n' \rightarrow \infty} x_{n'}^* = x_0$ (2.7.); es ist $x_n^* > \theta$, $|x_n^*| = 1$; folglich $|x_0| = 1$ und $x_0 > \theta$, w.z.b.w.

3. Allgemeine p -vollstetige Transformationen.

3.1. Wir betrachten jetzt p -vollstetige Transformationen, die nicht notwendig linear sind¹⁷⁾; für diese gilt Satz 2.1. ebenfalls. Zum Beweis benötigen wir folgenden

Hilfssatz 3.1. *Ist E ein lokalkonvexer, halbgeordneter l.t.R., so gibt es eine Halbnorm $p(x)$, so daß $p(x + y) \geq \sup\{p(x), p(y)\}$ für $x \geq \theta$, $y \geq \theta$.*

Beweis. Wir benutzen eine Folgerung aus dem Theorem von HAHN-BANACH¹⁸⁾: Ist E ein topologischer Vektorraum, $A \subset E$ bzw. $B \subset E$ eine nichtleere, offene und konvexe (bzw. nichtleere konvexe, zu A fremde) Menge, so gibt es eine abgeschlossene Hyperebene $H: f(x) = c$, welche A und B trennt.

Sei jetzt $B = C = \{x \mid x \geq \theta\}$, C ist nichtleer, abgeschlossen und konvex. Offenbar ist $C \neq E^{19)}$; daher gibt es in $E - C$ einen Punkt y derart, daß für eine (offene) konvexe Umgebung $U(y)$ gilt $U(y) \subset E - C$. Setzen wir $A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda U(y)$, so sind die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erfüllt.

Offenbar enthält die Hyperebene H das Element θ ; d. h. $H = \{x \mid f(x) = 0\}$ für ein stetiges $f \neq 0$. Daraus folgt, daß f in C das Zeichen nicht wechselt. Ersichtlich kann in C $f(x) \geq 0$ angenommen werden.

Nun ist $p(x) = |f(x)|$ eine Halbnorm in E , $\{x \mid p(x) \leq 1\}$ eine Umgebung von θ . Für $x \geq \theta$, $y \geq \theta$ folgt wegen $f \geq 0$ in C

$$(3.1) \quad p(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = p(x) + p(y) \geq \{\sup p(x), p(y)\},$$

w.z.b.w. Ferner gibt es ein $z \in C$, für welches $p(z) > 0$ [bei der Konstruktion von H (s. o.) braucht für $y \in E - C$ nur ein $y = -z$ verwendet zu werden, $z > \theta$; letzteres ist möglich, wenn $C \neq \{\theta\}$].

3.2. **Satz 3.1.** *Es sei E ein lokalkonvexer, separierter und vollständiger l.t.R. In E sei eine Halbordnung definiert mit $C = \{x \in E \mid x \geq \theta\} \neq \{\theta\}$. Dann gibt es zu jeder streng positiven, p -vollstetigen Transformation T von E in sich ein $x_0 > \theta$ und $\lambda_0 > 0$, so daß $\lambda_0 x_0 = T(x_0)$.*

Beweis. Es sei $U_1(\theta)$ eine abgeschlossene, symmetrische und konvexe Umgebung von θ mit kompaktem $T(U_1)$; $x \in U_1$ sei gleichwertig mit $p_1(x) \leq 1$. Weiter bezeichne $p_2(x)$ eine Halbnorm, die die in Hilfssatz 3.1. geforderte Eigenschaft besitzt; für $z_1 > \theta$ sei $p_2(z_1) > 0$. Die $p(x) = \sup\{p_1(x), p_2(x)\}$ (vermöge $p(x) \leq 1$) entsprechende Umgebung $U(\theta)$ besitzt ein kompaktes Bild $T(U)$; dasselbe gilt für die Menge $K = U \cap C$, und es ist $T(K) \subset C$. Offenbar ist die Transformation

$$(3.2) \quad T_1(x) = T(x) + |1 - p(T(x))| z_1$$

¹⁷⁾ Für spezielle Fälle solcher Transformationen, insbesondere nichtlineare Integralgleichungen, vgl. [15] und die dort angegebene Literatur.

¹⁸⁾ Vgl. [3], p. 71.

¹⁹⁾ Falls $E \neq \{\theta\}$.

ebenfalls p -vollstetig; wegen (3.1) und $p(z_1) \geq p_2(z_1) > 0$ ist $\inf_{x \in K} p(T_1(x)) > 0$.

Daher ist

$$S_1(x) = p^{-1}(T_1(x)) T_1(x)$$

p -vollstetig mit $S_1(K) \subset K$ (denn $S_1(x) > \theta$ und $p(S_1(x)) = 1$ für $x \in K$). K ist konvex und abgeschlossen; daher existiert als Folge des Fixpunktsatzes von TYCHONOFF²⁰) ein $x_1 = S_1(x_1) \in K$; mit $\lambda_1 = p(T_1(x_1)) > 0$ gilt nach (3.2)

$$\lambda_1 x_1 = T(x_1) + |1 - p(T(x_1))| z_1.$$

Falls $p(T(x_1)) = 1$, so ist die Behauptung bewiesen; dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein. Sei $z_n = \frac{1}{n} z_1 (n = 1, 2, \dots)$. Für $T_n(x) = T(x) + |1 - p(T(x))| z_n$ ergibt die bisherige Schlußweise

$$(3.3) \quad \lambda_n x_n = T(x_n) + |1 - p(T(x_n))| z_n; \quad \lambda_n > 0, p(x_n) = 1. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$\{\lambda_n\}$ ist wegen $\lambda_n = p(T_n(x_n))$ beschränkt, kann also als konvergent angenommen werden: $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \geq 0$. Jedoch würde $\lambda_0 = 0$ einen Widerspruch ergeben, da T streng positiv vorausgesetzt ist. Daher gilt $\lambda_0 > 0$; wie im linearen Fall (Nr. 2.3.) schließt man aus (3.3) und der Kompaktheit von $T(x_n)$ auf die Existenz von $x_0 > \theta$ mit $\lambda_0 x_0 = T(x_0)$, w.z.b.w.

Literatur.

- [1] M. ALTMAN: On linear functional equations in locally convex linear spaces. Stud. math. XIII 194—207 (1953). — [2] N. BOURBAKI: Elém. de math.: Topologie générale, Chap. I, II. Actual. sci. industr. 858 (Paris 1951). — [3] N. BOURBAKI: Elém. de math.: Espaces vectoriels topologiques. Act. sci. industr. 1189 (Paris 1953). — [4] N. BOURBAKI: Elém. de math.: Intégration, Act. sci. industr. 1175 (Paris 1952). — [5] J. DIEUDONNÉ: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Ec. Norm. Sup. 59, 107—139 (1942). — [6] E. HOPF: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse XIII (1928). — [7] R. JENTZSCH: Über Integralgleichungen mit positivem Kern. Crelles Journal 141, 235—244 (1912). — [8] M. G. KREIN und M. A. RUTMAN: Lineare Operatoren, die einen Kegel im BANACHschen Raum invariant lassen. Uspechi mat. Nauk 3, 3—95 (1948) (russisch). — [9] J. LERAY: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Scient. Math. 12 B, 177—186 (1950). — [10] G. W. MACKEY: On convex topological linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 57, 155—207 (1945). — [11] D. MORGENSTERN: Diss. T. U. Berlin (1951). — [12] H. NAKANO: Modulare semi-ordered linear spaces (Tokyo 1950). — [13] O. PERRON: Grundlagen für eine Theorie des JACOBISchen Kettenbruchalgorithmus. Math. Ann. 64, 1—76 (1907). — [14] H. SCHAEFER: Über die Methode der a priori-Schranken (unveröffentlicht). [15] H. SCHAEFER: Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Sitz.-Ber. Sächs. Akad. Wiss. (1955). — [16] A. TYCHONOFF: Ein Fixpunktsatz. Math. Ann. 111, 767—776 (1935).

(Eingegangen am 3. Januar 1955.)

²⁰) TYCHONOFF [16]. Die Gültigkeit des Satzes unter den hier benutzten Voraussetzungen wurde vom Verf. in [14] gezeigt.

Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1^1$).

Von

KONRAD JÖRGENS in Göttingen.

Einleitung.

Harmonische Abbildungen sind Transformationen der Form $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, worin $x(u, v)$ und $y(u, v)$ harmonische Funktionen sind, d. h. zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung $\Delta \varphi \equiv \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$. Unter den harmonischen Abbildungen sind die konformen dadurch ausgezeichnet, daß $y(u, v)$ die zu $x(u, v)$ (oder zu $-x(u, v)$) konjugierte harmonische Funktion ist.

Einige wohlbekannte Eigenschaften der konformen Abbildungen kommen auch der allgemeineren Klasse der harmonischen Abbildungen zu. Zum Beispiel gilt der von H. LEWY [5] bewiesene Satz: „Das Gebiet Δ der uv -Ebene werde durch $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ eineindeutig und harmonisch abgebildet. Dann gilt $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ in jedem inneren Punkt von Δ .“ Aus dem Satz von H. LEWY folgt, daß auch die inverse Abbildung analytisch ist. Anders als bei den konformen Abbildungen ist jedoch die Inverse einer harmonischen Abbildung im allgemeinen nicht harmonisch.

Auch die Tatsache, daß die Einheitskreisscheibe $u^2 + v^2 < 1$ nicht eineindeutig auf die ganze Ebene abgebildet werden kann — bei den konformen Abbildungen bekanntlich eine Folge des Satzes von LIOUVILLE — bleibt für die harmonischen Abbildungen richtig. Dies ist die wesentliche Aussage eines Satzes, der im Spezialfall $x \equiv u$ von T. RADÓ [7], im allgemeinen Fall von L. BERS²⁾ bewiesen wurde. L. BERS übertrug diesen Satz auch auf zweifach zusammenhängende Gebiete, indem er zeigte, daß ein Kreisring $1 < u^2 + v^2 < \lambda^2 < \infty$ nicht eineindeutig und harmonisch auf ein Gebiet der xy -Ebene abgebildet werden kann, welches das Äußere eines Kreises enthält³⁾. Eine quantitative Verschärfung des Satzes von RADÓ-BERS folgerte H. HOFF aus einem Satz von E. HEINZ ([2], Satz 1) durch Kombination mit dem Schwarzschen Lemma⁴⁾: „Durch die harmonischen Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$ werde die offene Kreisscheibe $u^2 + v^2 < 1$ eineindeutig abgebildet, und dabei gehe der Mittelpunkt in den Punkt $x = y = 0$ über; das Bild enthalte die abgeschlossene Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq R^2$. Dann ist $R^2 < 3(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)_{u=v=0}$.“

¹⁾ Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

²⁾ L. BERS [1], Lemma 3.3.

³⁾ [1], Lemma 3.6.

⁴⁾ Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn H. HOFF (vgl. [3], S. 134).

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird eine entsprechende quantitative Aussage für zweifach zusammenhängende Gebiete hergeleitet (Satz 1), und damit der Satz von L. BERS ([1], Lemma 3.6) neu bewiesen (Satz 2). Sodann werden einige spezielle Abbildungen untersucht. Als Anwendung der Sätze über harmonische Abbildungen werden im zweiten Teil die isolierten Singularitäten eindeutiger Lösungen $z = z(x, y)$ der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ untersucht⁵⁾. Die Lösungen dieser Differentialgleichung gestatten nämlich eine Parameterdarstellung $x + iq = F_1(w)$, $y - ip = F_2(w)$ durch zwei in einem Gebiet der w -Ebene regulär analytische Funktionen. Hierdurch ist der Zusammenhang mit den harmonischen Abbildungen unmittelbar gegeben. Die Ergebnisse sind: 1. Eine in $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Lösung kann an der Stelle (x_0, y_0) so erklärt werden, daß sie dort stetig wird; die ersten Ableitungen bleiben bei Annäherung an diese Stelle beschränkt. Existiert überdies einer der Grenzwerte $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} p(x, y)$ bzw. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} q(x, y)$, so sind die ersten und zweiten Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) stetig (Satz 4). 2. Eine außerhalb eines Kreises zweimal stetig differenzierbare Lösung verhält sich für große Werte von $x^2 + y^2$ im wesentlichen wie ein Polynom zweiten Grades (Satz 5). 3. Eine in $0 < x^2 + y^2 < \infty$ zweimal stetig differenzierbare Lösung ist entweder ein Polynom zweiten Grades oder kann durch eine lineare Substitution auf die Form

$$z(x, y) = \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma$$

gebracht werden (Satz 6)⁶⁾.

§ 1. Harmonische Abbildungen zweifach zusammenhängender Gebiete.

Im folgenden werden harmonische Abbildungen stets in der Form

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(w) \\ y = \operatorname{Re} F_2(w) \end{cases} \quad (w = u + iv)$$

mit zwei regulär analytischen Funktionen $F_1(w)$, $F_2(w)$ geschrieben. Nimmt man an, daß H ein zweifach zusammenhängendes Gebiet Δ der w -Ebene eindeutig und harmonisch abbildet, so sind die Ableitungen $F_1'(w)$, $F_2'(w)$ der Funktionen F_1 , F_2 in Δ eindeutig und regulär analytisch, während die Funktionen selber unendlich vieldeutig sein können derart, daß ihre Zweige sich um ganzzahlige Vielfache einer rein imaginären Zahl unterscheiden. Dies soll in § 1 durchweg zugelassen werden.

Hilfssatz 1.

Der Kreisring $1 < |\zeta| < \mu$ der ζ -Ebene werde durch

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} G_1(\zeta) \\ y = \operatorname{Re} G_2(\zeta) \end{cases}$$

⁵⁾ Es werden mit p , q ; r , s , t die ersten und zweiten Ableitungen einer Funktion $z = z(x, y)$ bezeichnet.

⁶⁾ Auf diese Tatsache hat Herr P. FUNK aufmerksam gemacht.

eindeutig und harmonisch abgebildet. Setzt man $\zeta = \varrho e^{i\theta}$ und $\operatorname{Re} G_1(\varrho e^{i\theta}) + i \operatorname{Re} G_2(\varrho e^{i\theta}) = Z(\varrho, \theta)$, so gilt die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet des Kreisringes gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$Z(\varrho, \theta) = a \log \varrho + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{a_n \cos n \theta + b_n \sin n \theta\} \varrho^n$$

mit

$$\begin{aligned} 2\pi i a &= \oint_{|\zeta|=\mu'} dG_1(\zeta) + i \oint_{|\zeta|=\mu'} dG_2(\zeta), \\ 2\pi n a_n &= \operatorname{Im} \oint_{|\zeta|=\mu'} \frac{dG_1(\zeta)}{\zeta^n} + i \operatorname{Im} \oint_{|\zeta|=\mu'} \frac{dG_2(\zeta)}{\zeta^n}, \\ 2\pi n b_n &= \operatorname{Re} \oint_{|\zeta|=\mu'} \frac{dG_1(\zeta)}{\zeta^n} + i \operatorname{Re} \oint_{|\zeta|=\mu'} \frac{dG_2(\zeta)}{\zeta^n}, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots; \quad 1 < \mu' < \mu. \end{aligned}$$

Die Existenz und die Konvergenzeigenschaften einer solchen Entwicklung sind bekannt⁷⁾; die Formeln für die Koeffizienten gewinnt man aus denen für die Koeffizienten der Laurentschen Reihen der Funktionen $G'_1(\zeta)$, $G'_2(\zeta)$.

Für das Folgende wird eine Ungleichung gebraucht, die in etwas anderer Gestalt in einem Satz von E. HEINZ enthalten ist⁸⁾.

Lemma von E. HEINZ.

Es sei $\omega(\theta)$ eine in $0 \leq \theta \leq 2\pi$ monotone und stetige Funktion mit $\omega(2\pi) - \omega(0) \pm 2\pi$. Für die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} d\theta \\ c_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \cos \theta d\theta \\ d_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

gilt dann die Ungleichung

$$2|c_0|^2 + |c_1|^2 + |d_1|^2 > \frac{1}{3}.$$

Beweis.

Für $n = 1, 2, \dots$ gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \cos n \theta d\theta = -\frac{i}{n\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \sin n \theta d\omega(\theta) \\ d_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \sin n \theta d\theta = \frac{i}{n\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\theta)} \cos n \theta d\omega(\theta), \end{aligned}$$

⁷⁾ Vgl. z. B. J. E. LITTLEWOOD [6], S. 86.

⁸⁾ E. HEINZ [2], Satz 1.

$$\begin{aligned}
& \pi^2 n^2 (|c_n|^2 + |d_n|^2) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \sin n \vartheta \sin n \sigma + \cos n \vartheta \cos n \sigma \} e^{i(\omega(\vartheta) - \omega(\sigma))} d\omega(\vartheta) d\omega(\sigma) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n(\vartheta - \sigma) \cos [\omega(\vartheta) - \omega(\sigma)] d\omega(\vartheta) d\omega(\sigma) \\
&\leq \int_0^{2\pi} |d\omega(\sigma)| \int_0^{2\pi} |d\vartheta \sin [\omega(\vartheta) - \omega(\sigma)]| \\
&= \int_0^{2\pi} |d\omega(\sigma)| \int_0^{2\pi} |d\sin \tau| = 8\pi.
\end{aligned}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung

$$2|c_0|^2 + \sum_1^{\infty} (|c_n|^2 + |d_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i\omega(\vartheta)}|^2 d\vartheta = 2$$

folgt damit

$$2|c_0|^2 + |c_1|^2 + |d_1|^2 \geq 2 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \frac{1}{3}.$$

Satz 1.

Es sei

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(w) \\ y = \operatorname{Re} F_2(w) \end{cases}$$

eine eindeutige harmonische Abbildung des Kreisringes $\Delta: 1 < |w| < \lambda$ auf ein Gebiet D der xy -Ebene, welches den Kreisring $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$ enthält derart, daß mindestens ein Randpunkt von D der Kreisscheibe $x^2 + y^2 < R_1^2$ angehört. Sei Γ_1 diejenige geschlossene Kurve in Δ , welche durch die Abbildung H in den Kreis $x^2 + y^2 = R_1^2$ übergeführt wird. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{12} R_2^2 < R_1^2 + J^2 (1 + \log^2 \lambda + \lambda^2)$$

mit

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} \{ |dF_1(w)| + |dF_2(w)| \}.$$

Beweis.

Der Kreisring $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ wird durch H^{-1} in ein Gebiet G der w -Ebene übergeführt, die Kreise $x^2 + y^2 = R_1^2$ bzw. $x^2 + y^2 = R_2^2$ in die Randkurven Γ_1 bzw. Γ_2 des Gebietes G ; diese Kurven sind analytisch, da H^{-1} in Folge des Satzes von H. LEWY [5] eine analytische Abbildung ist. Der Bereich $\bar{G} = G + \Gamma_1 + \Gamma_2$ ist in Δ enthalten; seine innere Randkurve umschließt mindestens einen Randpunkt von Δ , also auch die ganze Einheitskreisscheibe. Daraus folgt nach einem Satz von P. KOEBE, daß der konforme Modul λ_1 des Gebietes G kleiner ist als der Modul λ des Gebietes Δ), also

$$(1) \quad 1 < \lambda_1 < \lambda.$$

Nach dem verallgemeinerten Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine eindeutige konforme Abbildung $K: w = f(\zeta)$ des Kreisringes $1 < |\zeta| < \lambda_1$

) P. KOEBE [4], Satz II.

auf G , welche den Einheitskreis in die Randkurve Γ_1 überführt; $f(\zeta)$ ist auch auf dem Rande noch regulär analytisch, da die Kurven Γ_1, Γ_2 analytisch sind. Die zusammengesetzte Abbildung

$$H' = HK: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(f(\zeta)) = \operatorname{Re} G_1(\zeta) \\ y = \operatorname{Re} F_2(f(\zeta)) = \operatorname{Re} G_2(\zeta) \end{cases}$$

führt dann den Kreisring $1 \leq |\zeta| \leq \lambda_1$ eindeutig und stetig in den Kreisring $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$ über und den Kreis $|\zeta| = 1$ in den Kreis $x^2 + y^2 = R_1^2$. Die Funktionen $G_1'(\zeta), G_2'(\zeta)$ sind in $1 \leq |\zeta| \leq \lambda_1$ eindeutig und regulär analytisch. Nach Hilfssatz 1 gestattet die Funktion $Z(\varrho, \vartheta) = \operatorname{Re} G_1(\varrho e^{i\vartheta}) + i \operatorname{Re} G_2(\varrho e^{i\vartheta})$ die Entwicklung

$$(2) \quad Z(\varrho, \vartheta) = a \log \varrho + \sum_{-\infty}^{+\infty} \{a_n \cos n \vartheta + b_n \sin n \vartheta\} \varrho^n.$$

In den Formeln für die Koeffizienten darf $\mu' = 1$ gesetzt werden. Dann erhält man die Abschätzungen

$$(3) \quad \begin{aligned} |a| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta|=1} \{|dG_1(\zeta)| + |dG_2(\zeta)|\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} \{|dF_1(w)| + |dF_2(w)|\} = J, \end{aligned}$$

und ebenso

$$|a_n| \leq \frac{1}{|n|} J, \quad |b_n| \leq \frac{1}{|n|} J, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Andererseits ist nach Konstruktion der Abbildung $H' |Z(1, \vartheta)| = R_1$, und es gibt eine in $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ monotone und stetige Funktion $\omega(\vartheta)$ mit $\omega(2\pi) = \omega(0) \pm 2\pi$ und $Z(\lambda_1, \vartheta) = R_2 e^{i\omega(\vartheta)}$. Aus der Entwicklung (2) folgt damit

$$(4) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(1, \vartheta) d\vartheta; & |a_0| &\leq R_1, \\ a_0 + a \log \lambda_1 &= \frac{R_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\vartheta)} d\vartheta = R_2 c_0, \\ \lambda_1^n a_n + \lambda_1^{-n} a_{-n} &= \frac{R_2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\vartheta)} \cos n \vartheta d\vartheta = R_2 c_n, \\ \lambda_1^n b_n - \lambda_1^{-n} b_{-n} &= \frac{R_2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\vartheta)} \sin n \vartheta d\vartheta = R_2 d_n. \end{aligned}$$

Für die Fourierkoeffizienten $c_0, c_1, \dots; d_1, d_2, \dots$ der Funktion $e^{i\omega(\vartheta)}$ gilt das Lemma von E. HEINZ

$$2|c_0|^2 + |c_1|^2 + |d_1|^2 > \frac{1}{3}.$$

Damit hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} R_2^2 &< 2|a_0 + a \log \lambda_1|^2 + |\lambda_1 a_1 + \lambda_1^{-1} a_{-1}|^2 + |\lambda_1 b_1 - \lambda_1^{-1} b_{-1}|^2 \\ &\leq 4|a_0|^2 + 4|a|^2 \log^2 \lambda_1 + 2(|a_1|^2 + |b_1|^2) \lambda_1^2 + \\ &\quad + 2(|a_{-1}|^2 + |b_{-1}|^2) \lambda_1^{-2}, \end{aligned}$$

und weiter mit Benutzung von (1), (3) und (4)

$$\frac{1}{3} R_2^2 < 4 R_1^2 + 4 J^2 (1 + \log^2 \lambda + \lambda^2), \text{ q.e.d.}$$

Im folgenden werden besonders solche zweifach zusammenhängenden Gebiete D der xy -Ebene eine Rolle spielen, die zu einer passenden Zahl $R_1 > 0$ alle Punkte (x, y) mit $R_1^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$ enthalten. Für die eindeutige und harmonische Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebietes auf ein solches Gebiet gilt nun:

Satz 2¹⁰⁾.

Es sei H eine eindeutige harmonische Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebietes Δ der w -Ebene auf ein Gebiet D der xy -Ebene, welches zu passendem $R_1 > 0$ alle Punkte (x, y) mit $R_1^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$ enthält. Dann hat Δ mindestens einen isolierten Randpunkt.

Beweis.

Es werde angenommen, Δ habe keinen isolierten Randpunkt. Nach dem verallgemeinerten Riemannschen Abbildungssatz gibt es dann eine eindeutige konforme Abbildung $K: w = f(\zeta)$ eines Kreisringes $1 < |\zeta| < \lambda < \infty$ auf Δ . Die zusammengesetzte Abbildung $H' = HK$ genügt den Voraussetzungen von Satz 1; nach Satz 1 gibt es eine Zahl $M > 0$, so daß gilt: Ist der Kreisring $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$ in dem Bildgebiet D enthalten, so ist $R_2 \leq M$. Dies widerspricht der über D gemachten Voraussetzung. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Nach Satz 2 können nur zweifach zusammenhängende Gebiete mit einem bzw. zwei isolierten Randpunkten eindeutig und harmonisch auf ein Gebiet der xy -Ebene abgebildet werden, welches das Äußere eines Kreises enthält. Diese Abbildungen sollen nun untersucht werden. Wegen der schon mehrfach benutzten Möglichkeit, eine konforme und eine harmonische Abbildung zu einer neuen harmonischen Abbildung zusammenzusetzen, genügt es, die Normalgebiete $1 < |w| < \infty$ bzw. $0 < |w| < \infty$ zu betrachten. Der erste Fall wird in Satz 3 behandelt. Dazu wird der folgende Hilfssatz gebraucht.

Hilfssatz 2.

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_m > 1$ und $\lambda_m \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$. Zu jedem m sei $f_m(\zeta)$ eine in $1 \leq |\zeta| < \lambda_m$ eindeutige schlichte und stetige Funktion mit $|f_m(\zeta)| > 1$, $|f_m(e^{i\theta})| = 1$ und $f_m(1) = 1$. In $1 < |\zeta| < \lambda_m$ sei $f_m(\zeta)$ regulär analytisch. Dann gilt $f_m(\zeta) \rightarrow \zeta$ für $m \rightarrow \infty$ gleichmäßig in jedem Kreisring $1 \leq |\zeta| \leq \lambda$.

Beweis.

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip kann man jede der Funktionen $f_m(\zeta)$ in das Gebiet $\lambda_m^{-1} < |\zeta| < \lambda_m$ analytisch fortsetzen. In $\lambda_m^{-1} < |\zeta| < 1$ ist $f_m(\zeta)$ dann ebenfalls schlicht, und es gilt $0 < |f_m(\zeta)| < 1$; aus der Folge $f_1(\zeta), f_2(\zeta), \dots$ werde nun eine in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $0 < |\zeta| < 1$ gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgewählt. Die Grenzfunktion $f(\zeta)$ ist nicht konstant, da das Argument jeder der Funktionen $f_m(\zeta)$ sich bei einem Umlauf um den Nullpunkt der ζ -Ebene um 2π ändert. Also ist $f(\zeta)$ nach

¹⁰⁾ Vgl. L. BERS [1], Lemma 3.6.

bekannten Sätzen in $0 < |\zeta| < 1$ regulär analytisch und schlicht, und es gilt $0 < |f(\zeta)| < 1$. Daraus folgt, wiederum nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip, daß die betrachtete Teilfolge auch in jedem abgeschlossenen Kreisring $\lambda^{-1} \leq |\zeta| \leq \lambda$ gleichmäßig konvergiert, ferner nach dem Satz über hebbare Singularitäten, daß $f(\zeta)$ eine ganze Funktion ist. Dazu ist $f(0) = 0$ zu setzen, da sonst $f(\zeta)$ beschränkt und folglich konstant wäre. Also ist $f(\zeta)$ eine schlichte ganze Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, d. h. $f(\zeta) = \zeta$. Diese Überlegung gilt für jede konvergente Teilfolge; daher konvergiert auch die Folge $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, ... selber gegen ζ .

Satz 3¹¹⁾.

Es sei

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(w) \\ y = \operatorname{Re} F_2(w) \end{cases}$$

eine eindeutige harmonische Abbildung des Gebietes $\Delta: 1 < |w| < \infty$ auf ein Gebiet D der xy -Ebene, welches zu passendem $R > 0$ alle Punkte (x, y) mit $R^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$ enthält. Dann gilt

$$F_1(w) = \alpha_1 w + \alpha \log w + \alpha_0 + \alpha_{-1} w^{-1} + \dots$$

$$F_2(w) = \beta_1 w + \beta \log w + \beta_0 + \beta_{-1} w^{-1} + \dots$$

mit $\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{\beta}_1) \neq 0$ und α, β reell.

Beweis.

Sei Γ das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ in Δ . Da D nach Voraussetzung das Äußere des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ enthält, ist der Kreis nicht Null-homotop in D ; folglich ist Γ nicht Null-homotop in Δ . Das von Γ und dem Kreise $|w| = 1$ berandete Teilgebiet von Δ hat keinen isolierten Randpunkt. Nach Satz 2 wird also nicht dieses Teilgebiet, sondern sein Komplement, nämlich das Äußere der Kurve Γ , durch die Abbildung H in das Teilgebiet $R^2 < x^2 + y^2 < \infty$ von D übergeführt. Sei R_1, R_2, \dots eine Folge reeller Zahlen mit $R < R_m$ und $R_m \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$. Zu jedem m sei Γ_m das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = R_m$, und sei Δ_m das von Γ_m und dem Einheitskreise berandete Teilgebiet von Δ . Offenbar ist die Kurve Γ in jedem der Gebiete Δ_m enthalten. Sei $w = f_m(\zeta)$ eine eindeutige konforme Abbildung des Kreises $1 < |\zeta| < \lambda_m$ auf Δ_m , welche auch den Einheitskreis in den Einheitskreis überführt. Dann ist $f_m(\zeta)$ in $1 \leq |\zeta| < \lambda_m$ stetig, so daß $f_m(1) = 1$ gefordert werden kann. Auf die harmonische Abbildung

$$H_m: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(f_m(\zeta)) \\ y = \operatorname{Re} F_2(f_m(\zeta)) \end{cases}$$

ist Satz 1 anwendbar und liefert für jede Zahl R'_m mit $R < R'_m < R_m$ die Abschätzung

$$\frac{1}{12} R_m'^2 < R^2 + J^2(1 + \log^2 \lambda_m + \lambda_m^2)$$

¹¹⁾ Vgl. L. BERS [1], Lemma 3.7.

mit

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_m} \{|dF_1(f_m(\zeta))| + |dF_2(f_m(\zeta))|\} \\ = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma'} \{|dF_1(w)| + |dF_2(w)|\}.$$

Darin ist γ_m das Bild der Kurve Γ in der ζ -Ebene. Für $R'_m \rightarrow R_m$ erhält man daraus eine Abschätzung

$$(5) \quad R_m \leq M \lambda_m$$

mit einer von m unabhängigen Zahl M . Insbesondere folgt daraus $\lambda_m \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$. Nach Hilfssatz 2 strebt die Funktionenfolge $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, ... in jedem abgeschlossenen Kreisring $1 \leq |\zeta| \leq \lambda$ gleichmäßig gegen ζ . Nach Hilfssatz 1 gelten für die Funktionen $Z(\varrho, \vartheta) = \operatorname{Re} F_1(\varrho e^{i\vartheta}) + i \operatorname{Re} F_2(\varrho e^{i\vartheta})$ und $Z_m(\varrho, \vartheta) = \operatorname{Re} F_1(f_m(\varrho e^{i\vartheta})) + i \operatorname{Re} F_2(f_m(\varrho e^{i\vartheta}))$ die Entwicklungen

$$(6) \quad Z(\varrho, \vartheta) = a \log \varrho + \sum_{-\infty}^{+\infty} \{a_n \cos n \vartheta + b_n \sin n \vartheta\} \varrho^n \\ Z_m(\varrho, \vartheta) = a^{(m)} \log \varrho + \sum_{-\infty}^{+\infty} \{a_n^{(m)} \cos n \vartheta + b_n^{(m)} \sin n \vartheta\} \varrho^n,$$

und aus den in Hilfssatz 1 angegebenen Formeln für die Koeffizienten folgt wegen $f_m(\zeta) \rightarrow \zeta$, daß gilt

$$(7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^{(m)} = a_n, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} b_n^{(m)} = b_n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Andererseits erhält man aus (6) durch Integration

$$|\varrho^n a_n^{(m)} + \varrho^{-n} a_{-n}^{(m)}| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} Z_m(\varrho, \vartheta) \cos n \vartheta d\vartheta \right| \leq 2 R_m \\ |\varrho^n b_n^{(m)} - \varrho^{-n} b_{-n}^{(m)}| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} Z_m(\varrho, \vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta \right| \leq 2 R_m$$

für $\varrho < \lambda_m$. Mit $\varrho \rightarrow \lambda_m$ und Benutzung von (5) wird weiter

$$|a_n^{(m)}| \leq 2 M \lambda_m^{1-n} + |a_{-n}^{(m)}| \lambda_m^{-2n} \\ |b_n^{(m)}| \leq 2 M \lambda_m^{1-n} + |b_{-n}^{(m)}| \lambda_m^{-2n}.$$

Wegen $\lambda_m \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$ und (7) gilt daher $a_n = b_n = 0$ für $n = 2, 3, \dots$. Damit folgt aus (6)

$$F_1(w) = \alpha_1 w + \alpha \log w + \alpha_0 + \alpha_{-1} w^{-1} + \dots \\ F_2(w) = \beta_1 w + \beta \log w + \beta_0 + \beta_{-1} w^{-1} + \dots$$

mit reellen Zahlen α, β . β_1 ist nicht Null, da sonst $y = \operatorname{Re} F_2(w)$ für große Werte von $|w|$ ein festes Vorzeichen hätte oder (wenn auch $\beta = 0$) beschränkt bliebe, was den Eigenschaften der Abbildung widerspricht. Nach dem Satz von H. LEWY [5] ist mit $w = u + iv$

$$x_u y_v - x_v y_u = \operatorname{Im} F'_1(w) \overline{F'_2(w)} = |F'_2| \operatorname{Im} \frac{F'_1}{F'_2} \neq 0$$

in Δ . Daraus folgt die Regularität der Funktion $\frac{F_1}{F_2}$ bei $w = \infty$ und $\left(\operatorname{Im} \frac{F_1}{F_2}\right)_{w=\infty} = \operatorname{Im} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq 0$, d. h. $\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{\beta}_1) \neq 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

In einem Spezialfall läßt sich die Aussage von Satz 3 noch verschärfen. Es gilt nämlich der

Satz 3a.

Unter den Voraussetzungen von Satz 3 sei D das Gebiet $0 < x^2 + y^2 < \infty$. Dann gilt

$$F_1(w) = \alpha_1 w + \alpha \log w + \alpha_0 - \bar{\alpha}_1 w^{-1}$$

$$F_2(w) = \beta_1 w + \beta \log w + \beta_0 - \bar{\beta}_1 w^{-1}.$$

Beweis.

Aus Satz 3 und der zusätzlichen Voraussetzung folgt, daß die harmonischen Funktionen $\operatorname{Re} F_1(w)$, $\operatorname{Re} F_2(w)$ in $1 \leq |w| < \infty$ stetig sind, wenn

$$(8) \quad \operatorname{Re} F_1(e^{i\theta}) = 0, \operatorname{Re} F_2(e^{i\theta}) = 0$$

gesetzt wird, und daraus nach dem Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen, daß sie in das Innere des Einheitskreises hinein fortgesetzt werden können. Dann sind aber auch die analytischen Funktionen $F_1(w)$, $F_2(w)$ dort hinein fortsetzbar. Die in Satz 3 angegebenen Reihen konvergieren auf dem Einheitskreis. Einsetzung der Reihen in (8) und Koeffizientenvergleich liefern

$$\alpha_n = \beta_n = 0 \text{ für } n < -1, \alpha_{-1} = -\bar{\alpha}_1, \beta_{-1} = -\bar{\beta}_1.$$

Schließlich sind noch die harmonischen Abbildungen zu untersuchen, die das Gebiet $0 < |w| < \infty$ eineindeutig in Gebiete überführen, welche das Äußere eines Kreises enthalten. Dabei darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die im Endlichen gelegene Randkomponente des Bildgebietes dem Punkt $w = 0$ zugeordnet ist.

Satz 3b.

Es sei

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(w) \\ y = \operatorname{Re} F_2(w) \end{cases}$$

eine eineindeutige harmonische Abbildung des Gebietes $0 < |w| < \infty$ auf ein Gebiet D der xy -Ebene, welches zu passendem $R > 0$ alle Punkte (x, y) mit $R^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$ enthält. Das Bild des Teilgebietes $0 < |w| < 1$ sei ein beschränktes Gebiet. Dann gilt

$$F_1(w) = \alpha_1 w + \alpha_0, \quad F_2(w) = \beta_1 w + \beta_0$$

mit $\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{\beta}_1) \neq 0$.

Beweis.

Nach Voraussetzung sind die harmonischen Funktionen $\operatorname{Re} F_1(w)$, $\operatorname{Re} F_2(w)$ in $0 < |w| < 1$ beschränkt. Daraus folgt, daß die Singularität bei $w = 0$ hebbare ist, d. h. daß die Funktionen bei geeigneter Erklärung an der Stelle $w = 0$ in $|w| < \infty$ harmonisch sind¹²⁾. Dann sind aber $F_1(w)$ und $F_2(w)$ ganze Funk-

¹²⁾ Vgl. z. B. J. E. LITTLEWOOD [6], S. 88.

tionen. Andererseits ist auf die Abbildung H auch Satz 3 anwendbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

§ 2. Isolierte Singularitäten eindeutiger Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$.

Als Anwendung der Sätze über harmonische Abbildungen sollen nun die isolierten Singularitäten eindeutiger Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ untersucht werden. Von den Lösungen wird vorausgesetzt, daß sie zweimal stetig differenzierbar sind. Nun gilt der folgende Hilfssatz, der ein Spezialfall des allgemeinen Satzes über die Analytizität der Lösungen analytischer elliptischer Differentialgleichungen ist.

Hilfssatz 3¹³⁾.

Es sei $z = z(x, y)$ eine in $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Dann ist $z(x, y)$ in jedem inneren Punkt des Kreises analytisch.

Die Untersuchung der Lösungen stützt sich auf die folgende Parameterdarstellung, durch die der Zusammenhang mit den harmonischen Abbildungen gegeben ist.

Hilfssatz 4.

I. Es sei D ein zweifach zusammenhängendes Gebiet der xy -Ebene und $z = z(x, y)$ eine in D eindeutige und zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Dann gibt es eine eindeutige harmonische Abbildung

$$(1) \quad H: \begin{cases} x = \operatorname{Re} F_1(w) \\ y = \operatorname{Re} F_2(w) \end{cases}$$

eines Ringgebietes $\Delta: 1 < |w| < \lambda < \infty$ oder des Gebietes $1 < |w| < \infty$ (bzw. $0 < |w| < 1$) oder des Gebietes $0 < |w| < \infty$ auf das Gebiet D derart, daß die Funktionen $z(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ durch (1) und

$$(2) \quad z = \frac{1}{2} \operatorname{Im} F_1 \bar{F}_2 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{w_0}^w (F_1 dF_2 - F_2 dF_1) + c,$$

$$(3) \quad p = -\operatorname{Im} F_2, \quad q = \operatorname{Im} F_1$$

dargestellt werden.

II. Ist eine eindeutige harmonische Abbildung (1) eines Gebietes Δ auf ein Gebiet D der xy -Ebene gegeben, und sind die Funktionen F_1, F_2 und $\operatorname{Im} \int_{w_0}^w (F_1 dF_2 - F_2 dF_1)$ in Δ eindeutig, so stellen die Gleichungen (1) und (2) eine in D eindeutige und zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ dar; für die Ableitungen gelten die Gleichungen (3).

Beweis.

I. Nach Hilfssatz 3 ist $z(x, y)$ in D analytisch. Nach dem Uniformisierungssatz gibt es eine eindeutige und in bezug auf die definite Metrik $rdx^2 + 2sdx dy + td y^2$ konforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche

¹³⁾ Für einen direkten Beweis vgl. [3].

des Gebietes D auf die Halbebene oder auf die ganze endliche Ebene, wobei die in geeigneter Weise aufgeschnittenen Blätter entweder in konzentrische Halbringe oder in parallele Halbstreifen der Halbebene oder in Parallelstreifen der Ebene übergehen. Daraus folgt die Existenz einer eindeutigen und in bezug auf die angegebene Metrik konformen Abbildung $T: u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ des Gebietes D auf bzw. ein Ringgebiet $\Delta: 1 < u^2 + v^2 < \lambda^2 < \infty$ oder das Gebiet $1 < u^2 + v^2 < \infty$ oder das Gebiet $0 < u^2 + v^2 < \infty$. Die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ genügen den Beltramischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}v_x &= s u_x - r u_y \\v_y &= t u_x - s u_y.\end{aligned}$$

Jedes in D stetig differenzierbare Lösungspaar $\{\varphi(x, y), \psi(x, y)\}$ dieser Differentialgleichungen ist als Funktion von $u + iv$ eine in Δ regulär analytische Funktion $F(u + iv) = \varphi + i\psi$. Offenbar sind nun $\{x, q\}$ und $\{y, -p\}$ Lösungen der Beltramischen Differentialgleichungen. Also sind mit $w = u + iv$ die Funktionen $F_1(w) = x + iq$, $F_2(w) = y - ip$ in Δ regulär analytisch, und die inverse Abbildung $T^{-1} = H$ ist harmonisch. Damit sind die Gleichungen (1) und (3) der Behauptung bewiesen. Gleichung (2) folgt aus

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(F_1 dF_2 - F_2 dF_1) &= p dx + q dy - x dp - y dq \\&= 2 dz - d(xp + yq)\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Im} F_1 \bar{F}_2 = xp + yq.$$

II. Setzt man $\operatorname{Im} F_1 = g$, $\operatorname{Im} F_2 = -f$, so folgt wie im ersten Teil des Beweises aus der vorausgesetzten Gleichung (2) die Beziehung $dz = f dx + g dy$, d. h., die Gleichungen (3) gelten. Nun berechnet man die Funktionaldeterminante

$$\operatorname{Re} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} = \operatorname{Re} \begin{vmatrix} x_u - ix_v & x_v + ix_u \\ y_u - iy_v & y_v + iy_u \end{vmatrix} = 0.$$

Andererseits ist nach dem Satz von H. LEWY [5] $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$, und daher sind p und q auch nach x, y stetig differenzierbar. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \operatorname{Re} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \\&= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} (1 - rt + s^2) = 0,\end{aligned}$$

also $rt - s^2 = 1$. Damit ist der Beweis fertig.

Zur Vereinfachung der Rechnungen ist die Kenntnis einer Gruppe von Transformationen von Nutzen, welche die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ in sich überführen.

Hilfssatz 5.

Es sei G die Gruppe der Transformationen

$$T: \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3; & \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0 \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3; \\ z' = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) z + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3. \end{cases}$$

Jede solche Transformation führt die Lösungen $z = z(x, y)$ der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ in andere Lösungen $z' = z'(x', y')$ derselben Differentialgleichung über. Wird $z(x, y)$ gemäß Hilfssatz 4 durch $F_1(u)$, $F_2(w)$ dargestellt, so sind

$$G_1(w) = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 + i \gamma_2,$$

$$G_2(w) = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 - i \gamma_1$$

die entsprechenden Funktionen in der Parameterdarstellung von $z'(x', y')$.

Der Beweis kann hier übergangen werden. Nun wird zunächst eine im Endlichen gelegene singuläre Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ betrachtet.

Satz 4.

Die Lösung $z = z(x, y)$ der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ sei in $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ eindeutig und zweimal stetig differenzierbar. Dann sind die ersten Ableitungen $p(x, y)$, $q(x, y)$ in der Nähe der Stelle (x_0, y_0) beschränkt, so daß der endliche Grenzwert $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} z(x, y) = z_0$ existiert. Existiert überdies einer der Grenzwerte $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} p(x, y)$ bzw. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} q(x, y)$, und setzt man $z(x_0, y_0) = z_0$, so ist $z(x, y)$ in $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbar.

Beweis¹⁴⁾.

Die Funktion $z(x, y)$ sei gemäß Hilfssatz 4, I in Parameterdarstellung gegeben. Als Parametergebiet Δ der w -Ebene, welches durch $x = \operatorname{Re} F_1(w)$, $y = \operatorname{Re} F_2(w)$ auf das Gebiet $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ abgebildet wird, kann nur eines der Gebiete $0 < |w| < 1$ bzw. $1 < |w| < \lambda < \infty$ auftreten. Der dritte Fall $0 < |w| < \infty$ ist ausgeschlossen, da jede in diesem Gebiet beschränkte harmonische Funktion eine Konstante ist¹⁵⁾. Zum Beweis des Satzes wird gezeigt, daß die in der Behauptung enthaltene Fallunterscheidung mit der folgenden übereinstimmt:

1. Sei Δ das Gebiet $0 < |w| < 1$. Die harmonischen Funktionen $\operatorname{Re} F_1(w)$, $\operatorname{Re} F_2(w)$ sind in Δ beschränkt. Also ist die Singularität bei $w = 0$ hebbar¹⁶⁾, d. h. $F_1(w)$ und $F_2(w)$ stimmen in $0 < |w| < 1$ mit Funktionen überein, welche in $|w| < 1$ regulär analytisch sind, und deren Realteile dieses Gebiet eindeutig und harmonisch auf die Kreisscheibe $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ abbilden. Aus Hilfssatz 4, II folgt, daß die durch diese Funktionen dargestellte Lösung $z(x, y)$ in $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbar ist.

2. Sei Δ das Gebiet $1 < |w| < \lambda < \infty$. Man darf annehmen, daß der Kreis $|w| = 1$ in den Punkt (x_0, y_0) abgebildet wird. Die harmonischen Funktionen $\operatorname{Re} F_1(w)$, $\operatorname{Re} F_2(w)$ sind folglich in $1 \leq |w| < \lambda$ stetig, wenn man

$$(4) \quad \operatorname{Re} F_1(e^{i\theta}) = x_0, \quad \operatorname{Re} F_2(e^{i\theta}) = y_0$$

setzt, und sind daher nach dem Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar, woraus die Fortsetzbar-

¹⁴⁾ Der erste Teil des Satzes kann auch elementar bewiesen werden: Aus der Differentialgleichung folgt, daß $p(x, y)$ in x und $q(x, y)$ in y monoton ist; daraus folgt die Beschränktheit dieser Funktionen bei (x_0, y_0) .

¹⁵⁾ Vgl. z. B. J. E. LITTLEWOOD [6], S. 88 u. 83.

¹⁶⁾ [6], S. 88.

keit der analytischen Funktionen $F_1(w)$, $F_2(w)$ folgt. Die ersten Ableitungen p , q der Lösung $z(x, y)$, welche gemäß Hilfssatz 4 durch $p = -\operatorname{Im} F_2(w)$, $q = \operatorname{Im} F_1(w)$ dargestellt werden, sind also als Funktionen von x, y bei (x_0, y_0) beschränkt. Daraus folgt die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} z(x, y) = z_0$. Existierte nun auch $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} p(x, y) = p_0$, so wäre $\operatorname{Im} F_2(e^{i\theta}) = -ip_0$, und wegen (4) auch $F_2(w) = y_0 - ip_0$, was nicht sein kann. Dasselbe gilt für $q(x, y)$. Damit ist der Beweis von Satz 4 erbracht.

Der nächste Satz gibt Auskunft über das asymptotische Verhalten der Lösungen für $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Satz 5.

Die Lösung $z = z(x, y)$ der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ sei in $R^2 < x^2 + y^2 < \infty$ eindeutig und zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ die asymptotische Darstellung

$$z(x, y) = \frac{1}{2} Q(x, y) + Ax + By + C \log |Q(x, y)| + O(1)$$

mit $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $ac - b^2 = 1$.

Beweis.

Aus Hilfssatz 4, I folgt die Existenz einer harmonischen Abbildung $H: x = \operatorname{Re} F_1(w)$, $y = \operatorname{Re} F_2(w)$, welche ein Ringgebiet Δ der w -Ebene eineindeutig in das Gebiet $R^2 < x^2 + y^2 < \infty$ überführt. Nach Satz 2 kann Δ nur eines der Gebiete $0 < |w| < \infty$ bzw. $1 < |w| < \infty$ sein. Ist Δ das Gebiet $0 < |w| < \infty$, so darf man annehmen, daß die Abbildung H dem Punkt $w = 0$ den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ zuordnet. Aus Satz 3, b folgt dann, daß $F_1(w)$, $F_2(w)$ ganz und linear sind, und daraus nach Hilfssatz 4, I, daß $z(x, y)$ ein Polynom zweiten Grades ist. In diesem Fall ist die Behauptung also bewiesen. Sei nun Δ das Gebiet $1 < |w| < \infty$. Nach Satz 3 gilt

$$\begin{aligned} F_1(w) &= \alpha_1 w + \alpha \log w + \alpha_0 + \alpha_{-1} w^{-1} + \dots \\ F_2(w) &= \beta_1 w + \beta \log w + \beta_0 + \beta_{-1} w^{-1} + \dots \end{aligned}$$

mit $\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{\beta}_1) \neq 0$ und α, β reell. α und β sind gleich Null, da F_1 und F_2 eindeutig sind. Nach Hilfssatz 5 kann $z = z(x, y)$ so in eine andere Lösung $z' = z'(x', y')$ transformiert werden, daß diese mit Hilfe von Funktionen

$$\begin{aligned} G_1(w) &= w + \alpha'_{-1} w^{-1} + \dots \\ G_2(w) &= -iw + \beta'_{-1} w^{-1} + \dots \end{aligned}$$

dargestellt wird. Es folgt $x' + iy' = w + O\left(\frac{1}{|w|}\right)$, und weiter

$$(5) \quad w = x' + iy' + O\left(\frac{1}{|x' + iy'|}\right).$$

Nach Hilfssatz 4, I Gleichung (2) gilt

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} i |w|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{w_0}^w -2i(\alpha'_{-1} - i\beta'_{-1}) \frac{dw}{w} + O(1) \\ &= \frac{1}{2} |w|^2 - \operatorname{Re}(\alpha'_{-1} - i\beta'_{-1}) \log w + O(1). \end{aligned}$$

Die Zahl $\alpha'_{-1} - i\beta'_{-1}$ ist reell, da z' eindeutig ist. Mit (5) folgt also

$$z'(x', y') = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + c \log(x'^2 + y'^2) + O(1).$$

Da $z(x, y)$ aus $z'(x', y')$ durch eine Transformation aus der Gruppe G (Hilfssatz 5) hervorgeht, folgt die Behauptung.

Schließlich sollen noch Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ betrachtet werden, welche in der ganzen Ebene mit Ausnahme eines Punktes eindeutig und zweimal stetig differenzierbar sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde die Singularität im Punkt $x = y = 0$ angenommen. In diesem Fall gelingt die explizite Bestimmung aller Lösungen.

Satz 6.

Die Lösung $z = z(x, y)$ der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ sei in $0 < x^2 + y^2 < \infty$ eindeutig und zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt: Entweder ist $z(x, y)$ ein Polynom zweiten Grades; oder es gibt eine Transformation aus der Gruppe G (Hilfssatz 5), welche $z(x, y)$ in die Lösung

$$z'(x', y') = \int_0^{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma$$

überführt.

Beweis.

Nach Satz 2 kommen als Grundgebiet Δ der Parameterdarstellung von $z(x, y)$ gemäß Hilfssatz 4, I nur die Gebiete $0 < |w| < \infty$ und $1 < |w| < \infty$ in Betracht.

1. Sei Δ das Gebiet $0 < |w| < \infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde angenommen, daß die harmonische Abbildung $H: x = \operatorname{Re} F_1(w)$, $y = \operatorname{Re} F_2(w)$ dem Punkt $w = 0$ den Punkt $x = y = 0$ zuordnet. Nach Satz 3.b sind dann $F_1(w), F_2(w)$ ganze lineare Funktionen. Nach Hilfssatz 4, I ist daher $z(x, y)$ ein Polynom zweiten Grades.

2. Sei Δ das Gebiet $1 < |w| < \infty$. Nach Satz 3.a gilt dann

$$F_1(w) = \alpha_1 w + \alpha \log w + \alpha_0 - \bar{\alpha}_1 w^{-1}$$

$$F_2(w) = \beta_1 w + \beta \log w + \beta_0 - \bar{\beta}_1 w^{-1}$$

mit $\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{\beta}_1) \neq 0$ und α, β reell. α und β sind gleich Null, da F_1 und F_2 eindeutig sind. Eine geeignete Transformation aus G (Hilfssatz 5) liefert $G_1(w) = \frac{1}{2}(w - w^{-1})$, $G_2(w) = -\frac{i}{2}(w + w^{-1})$ als Funktionen der Parameterdarstellung von $z'(x', y')$. Außerdem kann erreicht werden, daß $z'(0, 0) = 0$ ist. Mit $w = \varrho e^{i\theta}$ folgt

$$x' = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho^{-1}) \cos \theta, \quad p' = x' \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2 - 1},$$

$$y' = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho^{-1}) \sin \theta, \quad q' = y' \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2 - 1},$$

$$\sigma^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}(\varrho - \varrho^{-1})^2, \quad 1 + \sigma^2 = \left(\frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2 - 1}\right)^2,$$

$$p' dx' + q' dy' = \sqrt{1 + \sigma^2} (x' dx' + y' dy') = \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma,$$

$$z'(x', y') = \int_0^{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma.$$

Literatur.

- [1] BERS, L.: Isolated Singularities of Minimal Surfaces. *Annals of Math.*, 2. Ser., **53**, 364—386 (1951). — [2] HEINZ, E.: Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. *Nachr. Akad. der Wissensch. in Göttingen Mathem.-Phys. Klasse*, IIa, **1952**, 51—56. — [3] JÖRGENS, K.: Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^3 = 1$. *Math. Ann.* **127**, 130—134 (1954). — [4] KORB, P.: Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche. *Jahresber. der Deutschen Math.-Ver.* **16**, 116—130 (1907). — [5] LEWY, H.: On the Non-Vanishing of the Jacobian in certain One-To-One Mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 689—692 (1936). — [6] LITTLEWOOD, J. E.: *Lectures on the Theory of Functions*. Oxford 1944. — [7] RADÓ, T.: Zu einem Satze von S. BERNSTEIN über Minimalflächen im Großen. *Math. Z.* **26**, 559—565 (1927).

(Eingegangen am 21. Januar 1955.)

Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen. I¹⁾.

Von

HELMUT KLINGEN in Göttingen.

Für die Theorie der automorphen Funktionen in mehreren Variablen ist die Untersuchung der von E. CARTAN [1]²⁾ angegebenen Typen von irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten von Bedeutung. Wichtig sind zunächst das Studium der geometrischen Eigenschaften und die Entwicklung von Methoden zum Auffinden diskontinuierlicher Gruppen. C. L. SIEGEL [2] hat in seiner Arbeit über "Symplectic Geometry" dieses Programm durchgeführt für den dritten CARTANSchen Typus, definiert durch

$$\frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0, \quad Z' = Z.$$

Dabei ist Z die n -reihige symmetrische Koordinatenmatrix der $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen komplexen Variablen $z_{kl} (k \leq l)$. Im Zusammenhang mit der Theorie der HERMITESchen Modulfunktionen tritt der erste CARTANSche Typus,

$$\frac{1}{2i}(Z - \tilde{Z}) > 0,$$

auf. Z ist die n -reihige Koordinatenmatrix der n^2 unabhängigen komplexen Variablen z_{kl} . \tilde{Z} bedeutet die transponierte konjugiert komplexe Matrix von Z . H. BRAUN [3] hat für diesen Typus die HERMITESche Modulgruppe, das Analogon zur SIEGELSchen Modulgruppe, untersucht.

In der vorliegenden Arbeit sollen die ersten drei CARTANSchen Typen betrachtet werden:

$$\mathfrak{H}_1: \frac{1}{2i}(Z - \tilde{Z}) > 0; \quad \mathfrak{H}_2: \frac{1}{2i}(Z - \tilde{Z}) > 0, \quad Z'Z = -E;$$

$$\mathfrak{H}_3: \frac{1}{2i}(Z - \tilde{Z}) > 0, \quad Z' = Z.$$

Nach Zusammenstellung einiger Hilfssätze über Matrizen im ersten Paragraphen sollen im zweiten Paragraphen zunächst die vollen Gruppen der eindeutigen analytischen Abbildungen dieser Gebiete auf sich betrachtet werden. Vor allem der zweite Typus verlangt etwas eingehendere Untersuchungen. Eine Sonderrolle spielt dabei der Fall $n = 4$. Die analytischen Abbildungen von \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}_3 auf sich lassen sich stets analytisch fortsetzen zu Abbildungen von \mathfrak{H}_1 auf sich mit Ausnahme des Falles $n = 4$ beim zweiten Typus.

¹⁾ Diese Arbeit enthält den ersten Teil meiner Dissertation, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen angenommen wurde.

²⁾ Siehe Literaturverzeichnis.

Im dritten Paragraphen werden die geometrischen Eigenschaften untersucht. Wir werden den SIEGELSchen Halbraum \mathfrak{H}_3 mit seiner symplektischen Metrik einbetten in den Raum \mathfrak{H}_1 von n^2 komplexen Dimensionen und dort eine Geometrie aufbauen. Die Bereiche $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ fassen wir auf als Unterräume von \mathfrak{H}_1 . Sie sind in dieser Geometrie Ebenen in \mathfrak{H}_1 . Die geometrischen Eigenschaften des zweiten und dritten Typus werden sich dann in einfacher Weise aus der Geometrie in \mathfrak{H}_1 ergeben.

Die allgemeine Untersuchung diskontinuierlicher Gruppen bildet den Gegenstand des vierten Paragraphen. Die Beweise der entsprechenden Sätze für den dritten Typus von C. L. SIEGEL [2] lassen sich sofort übertragen und werden daher nicht mehr durchgeführt.

In einem zweiten Teil dieser Arbeit sollen Beispiele von diskontinuierlichen Gruppen für die genannten drei CARTANSchen Normalgebiete behandelt werden.

Es wird sich herausstellen, daß sich die Methoden von C. L. SIEGEL für den dritten Typus erweitern lassen zur Behandlung von \mathfrak{H}_1 . Die Sätze für $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ folgen im allgemeinen leicht aus den Ergebnissen über \mathfrak{H}_1 . Jedoch sind für \mathfrak{H}_2 eine Reihe von besonderen Untersuchungen notwendig.

Einige Bemerkungen zu den Bezeichnungen. Im allgemeinen bedeuten große lateinische Buchstaben Matrizen, große deutsche Buchstaben Bereiche, kleine lateinische Buchstaben Zahlen und kleine deutsche Buchstaben Vektoren. Die Aussagen „ A ganz, beschränkt“ usw. beziehen sich auf die Elemente der Matrix A . Wenn keine Zweideutigkeit besteht, werden wir oft schreiben $A \in \Gamma$, um anzudeuten, daß jedes Element der Matrix A zur Menge Γ gehört. Obere Indizes bei einer Matrix $A^{(r, s)}$ bedeuten die Zeilen- und Spaltenanzahl, $A^{(r)} = A^{(r, r)}$. Unter $[A_1, \dots, A_n]$ verstehen wir die Matrix, die aus den quadratischen Untermatrizen A_1, \dots, A_n in der Hauptdiagonale folgendermaßen aufgebaut ist:

$$[A_1, A_2, \dots, A_n] = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}.$$

Es sei $|A|$ die Determinante von A , $\|A\|$ der absolute Betrag von $|A|$. $A > 0$ bedeute, daß die HERMITESche Matrix A positiv definit ist. $A\{B\}$ bzw. $A[B]$ seien Abkürzungen für $\tilde{B} A B$ bzw. $B' A B$.

An einigen Stellen sind die Beweise sehr knapp gefaßt; es wird zu ihrem Verständnis dann auf die analogen Methoden in der zitierten Arbeit über "Symplectic Geometry" verwiesen.

Den Herren Professoren M. DEURING und C. L. SIEGEL möchte ich für Anregung und fördernde Gespräche ergebenst danken.

§ 1. Hilfssätze über Matrizen.

In diesem Paragraphen sollen einige Hilfssätze über Matrizen bewiesen werden, die wir später benötigen.

Hilfssatz 1: Z sei eine n -reihige Matrix, deren Elemente komplexe Zahlen sind, q_1, q_2, \dots, q_n seien die Eigenwerte von $Z\bar{Z}$ in irgendeiner vorgegebenen Reihenfolge. Dann gibt es unitäre Matrizen U_1 und U_2 , so daß

$$U_1 Z U_2 = [q_1^{1/2}, \dots, q_n^{1/2}].$$

Beweis. Z habe den Rang r . Es gibt zunächst ein unitäres U , so daß

$$U Z = \begin{pmatrix} 0^{(n-r, n)} \\ Z_1^{(r, n)} \end{pmatrix},$$

und ein unitäres V , so daß

$$Z_1 V = (0^{(r, n-r)} Z_2^{(r)}) .$$

Also ist

$$U Z V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_2^{(r)} \end{pmatrix}, \quad |Z_2| \neq 0 .$$

$Z_2 \bar{Z}_2$ habe die Eigenwerte q_1, q_2, \dots, q_r , es sei $P = [q_1^{1/2}, \dots, q_r^{1/2}]$. Dann existiert ein unitäres U_3 , so daß $Z_2 \bar{Z}_2 = P^2 \{U_3\}$. Wir setzen $U_4 = Z_2^{-1} \bar{U}_3 P$; dann ist U_4 unitär und

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix} U Z V \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^{(n-r)} & 0 \\ 0 & P^{(r)} \end{pmatrix} .$$

Mit

$$U_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} U, \quad U_2 = V \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

folgt die Behauptung. Durch reelle orthogonale Transformation kann man die Reihenfolge der Diagonalelemente beliebig abändern.

C. L. SIEGEL [2] hat für symmetrische Z gezeigt

Hilfssatz 2: Ist Z unter den Voraussetzungen des ersten Hilfssatzes symmetrisch, so kann man weiter fordern $U_1 = U_2'$.

Hilfssatz 3: Ist Z unter den Voraussetzungen des ersten Hilfssatzes alternierend, so haben die von Null verschiedenen Eigenwerte von $Z\bar{Z}$ gerade Vielfachheit, und es existiert ein unitäres U , so daß

$$U' Z U = \begin{pmatrix} (0) & \dots & (0) \\ \vdots & 0^{(m)} & D \\ \vdots & -D & 0^{(m)} \\ (0) \end{pmatrix}, \quad D = [q_1^{1/2}, \dots, q_m^{1/2}].$$

$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sei die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$. Die eingeklammerten Elemente einer Matrix sind wegzulassen bei gerader Reihenanzahl. Wir werden auch vielfach die Form

$$[(0), q_1^{1/2} I, \dots, q_m^{1/2} I] \text{ statt } \begin{pmatrix} (0) & \dots & (0) \\ \vdots & 0 & D \\ \vdots & -D & 0 \\ (0) \end{pmatrix}$$

benutzen, dabei ist $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese beiden Matrizen gehen auseinander hervor durch reelle orthogonale Transformation.

Beweis: Zunächst wollen wir zeigen, daß man zwei reelle alternierende vertauschbare Matrizen S und S^* durch eine reelle orthogonale Matrix O in der folgenden Weise transformieren kann:

$$S [O] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & & & D \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -D & & 0 & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}, \quad S^* [O] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & & & D^* \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -D^* & & 0 & \\ (0) & & & & \end{pmatrix};$$

D und D^* seien Diagonalmatrizen. Wir können annehmen, daß $|S| \neq 0$. Die Ausdehnung der Behauptung auf singuläre S folgt dann nach einer einfachen Überlegung. Da iS und iS^* vertauschbare HERMITESCHE Matrizen sind, existiert ein unitäres U , so daß

$$iU' S U = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}, \quad iU' S^* U = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$$

mit Diagonalmatrizen D , D_1 , D_2 und $D > 0$. Setzen wir $U = \left(U_1^{(n, \frac{n}{2})} \right)_*$, $U_1 = X + iY$ mit reellen X und Y , so gilt $U_1' U_1 = E$, also

$$(1) \quad X'X + Y'Y = E, \quad X'Y - Y'X = 0$$

und $iS U_1 = U_1 D$, $iS^* U_1 = U_1 D_1$, d. h.

$$(2) \quad SX = YD, \quad SY = -XD, \quad S^*X = YD_1, \quad S^*Y = -XD_1.$$

Dann ist wegen (1), (2) und $D > 0$ die Matrix $O = \sqrt{2} (Y X)$ reell orthogonal und

$$S [O] = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad S^* [O] = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ -D_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt ein unitäres U_1 , so daß $Z \tilde{Z} = P^* \{U_1\}$; dabei ist $P^* = [q_1, \dots, q_n]$. Sei $F = Z [U_1^{-1}]$, dann ist $FF^* = -P^*$, also $F_1 F_2 = F_2 F_1$ für den Realteil F_1 und den Imaginärteil F_2 von F . Nach dem soeben bewiesenen Satz über die simultane Transformation von vertauschbaren alternierenden Matrizen folgt die Existenz einer reellen orthogonalen Matrix O , so daß

$$F_1 [O] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & & & D_1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -D_1 & & 0 & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}, \quad F_2 [O] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & & & D_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -D_2 & & 0 & \\ (0) & & & & \end{pmatrix},$$

also

$$R = F [O] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & & & R_1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -R_1 & & 0 & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}$$

mit einer Diagonalmatrix $R_1 = [r_1, \dots, r_m]$. Wegen $RR^* = -P^* [O]$ haben RR^* und $-P^*$ die gleichen Eigenwerte; die von Null verschiedenen q_k treten

paarweise auf. Durch geeignete Wahl von U_1 und O kann man erreichen, daß

$$P^* = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & D^2 & 0 & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & 0 & D^2 & & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}$$

mit einer Diagonalmatrix D und $r_k \bar{r}_k = q_k$ für $k \leq \frac{n}{2}$. Seien

$$U_2 = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & S & 0 & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & 0 & -S & & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}, \quad S = [s_1, \dots, s_m], \quad \text{wobei } s_k = \begin{cases} r_k^{1/2} q_k^{-1/2}, & \text{falls } q_k \neq 0, \\ 1, & \text{falls } q_k = 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$U_2' P U_2 = R$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & -D & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & D & 0 & & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}.$$

Mit $U^{-1} = i U_2 O' U_1$ gilt dann

$$Z[U] = \begin{pmatrix} (0) & \cdot & \cdot & \cdot & (0) \\ \cdot & 0 & D & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & -D & 0 & & \\ (0) & & & & \end{pmatrix}.$$

Hilfssatz 4: Es sei $W^{(n)} = (w_{kl})$ eine alternierende Matrix, deren Elemente komplexe Zahlen sind. Dann ist $|E - W \tilde{W}|$ das Quadrat eines Polynoms $\mathfrak{P}(w_{kl}, \bar{w}_{kl})$ in den w_{kl}, \bar{w}_{kl} .

$$|E - W \tilde{W}| = \mathfrak{P}^2(w_{kl}, \bar{w}_{kl}).$$

Beweis: Es seien p_r die Eigenwerte von $W \tilde{W}$, gezählt mit der Vielfachheit 2; bei ungerader Reihenanzahl kommt noch der Eigenwert 0 mit einfacher Vielfachheit hinzu.

$$|\lambda E - W \tilde{W}| = (\lambda) \prod_{r=1}^m (\lambda - p_r)^2, \quad |E - W \tilde{W}| = \prod_{r=1}^m (1 - p_r)^2.$$

Wir wollen zeigen, daß

$$\prod_{r=1}^m (1 - p_r) = \mathfrak{P}(w_{kl}, \bar{w}_{kl}).$$

Seien $P_0 = 1, P_1, P_2, \dots, P_m$ die elementarsymmetrischen Funktionen der p_1, \dots, p_m ($m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Dann ist

$$|\lambda E - W \tilde{W}| = (\lambda) \left(\sum_{r=0}^m \lambda^{m-r} (-1)^r P_r \right)^2.$$

Somit ist $\sum_{\substack{r+\mu=m \\ r, \mu \leq m}} P_r P_\mu$ ein Polynom in den w_{kl}, \bar{w}_{kl} für $0 \leq r \leq 2m$. Angenommen,

es sei schon bewiesen, daß P_r für $0 \leq r < r \leq m$ ein Polynom in den w_{kl} , \bar{w}_{kl} ist, dann ist auch $\sum_{\nu+\mu=r} P_\nu P_\mu = 2 P_r + \mathfrak{P}(w_{kl}, \bar{w}_{kl})$ und damit auch P_r ein derartiges Polynom. Durch vollständige Induktion folgt, daß P_0, P_1, \dots, P_m , also auch $\prod(1-p_r)$ Polynome in den w_{kl}, \bar{w}_{kl} sind.

Für gerade Reihenanzahl folgt unser Satz übrigens wegen

$$|W - W \tilde{W} W| = |E - W \tilde{W}| |W|$$

sofort aus der Tatsache, daß die Determinante einer alternierenden Matrix Quadrat eines Polynoms in ihren Elementen ist.

§ 2. Gruppen von eindeutigen analytischen Abbildungen.

Die Typen (I), (II), (III) von irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten nach E. CARTAN [1] lassen sich folgendermaßen definieren:

$$\text{Typus (I)} \quad \mathfrak{E}_1: E - Z_0 \tilde{Z}_0 > 0,$$

$$\text{Typus (II)} \quad \mathfrak{E}_2: E - Z_0 \tilde{Z}_0 > 0 \text{ und } Z'_0 = -Z_0 (n > 1),$$

$$\text{Typus (III)} \quad \mathfrak{E}_3: E - Z_0 \tilde{Z}_0 > 0 \text{ und } Z'_0 = Z_0.$$

Ferner betrachten wir die Bereiche

$$\mathfrak{H}_1: \frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z}) > 0; \quad \mathfrak{H}_2: \frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z}) > 0, \quad Z' Z = -E (n > 1);$$

$$\mathfrak{H}_3: \frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z}) > 0, \quad Z' = Z.$$

Wir fassen \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{H}_1 auf als Bereiche im euklidischen Raum von n^2 komplexen Dimensionen, Z_0 und Z als n -reihige Koordinatenmatrizen, \mathfrak{E}_r bzw. \mathfrak{H}_r ($r = 2, 3$) als Unterräume von \mathfrak{E}_1 bzw. \mathfrak{H}_1 . Die Gleichungen

$$(3) \quad Z = i(E + Z_0)(E - Z_0)^{-1},$$

$$(4) \quad Z_0 = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}$$

definieren eine eindeutige analytische Abbildung von \mathfrak{E}_1 auf \mathfrak{H}_1 . Für $Z_0 \in \mathfrak{E}_1$ ist $|E - Z_0| \neq 0$ wegen $E - Z_0 \tilde{Z}_0 > 0$; für $Z \in \mathfrak{H}_1$ ist $|Z + iE| \neq 0$ wegen $\frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z}) > 0$. Also sind die auftretenden Matrizen sinnvoll. Nach (3) ist $\frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z}) = (E - Z_0 \tilde{Z}_0) \{ (E - \tilde{Z}_0)^{-1} \} > 0$. Also ist (3) eine Abbildung von \mathfrak{E}_1 in \mathfrak{H}_1 . Nach (4) ist $E - Z_0 \tilde{Z}_0 = \frac{2}{i} (Z - \tilde{Z}) \{ (\tilde{Z} - iE)^{-1} \} > 0$. (4) ist daher eine Abbildung von \mathfrak{H}_1 in \mathfrak{E}_1 . Da (3) und (4) Auflösungen voneinander sind, handelt es sich um eine Abbildung von \mathfrak{E}_1 auf \mathfrak{H}_1 und umgekehrt.

Durch die Gleichungen (3) und (4) werden die Unterräume \mathfrak{E}_r auf \mathfrak{H}_r ($r = 2, 3$) abgebildet. Das ist für $r = 3$ trivial, da symmetrische Z_0 auf symmetrische Z abgebildet werden und umgekehrt. — Sei $Z_0 \in \mathfrak{E}_2$, dann ist $Z'_0 = -Z_0$ und

$$Z' Z = - (E + Z_0)^{-1} (E - Z_0) (E + Z_0) (E - Z_0)^{-1} = -E,$$

also $Z \in \mathfrak{H}_2$. Sei $Z \in \mathfrak{H}_2$, so ist $Z'Z = -E$ und daher

$$\begin{aligned} Z'Z - iZ + iZ' + E &= -Z'Z - iZ + iZ' - E, \\ (Z' + iE)^{-1}(Z' - iE) &= (iE - Z)(Z + iE)^{-1}. \end{aligned}$$

Somit ist $Z'_0 = -Z_0$, also $Z_0 \in \mathfrak{E}_2$.

Ω_1 sei die Gruppe aller 2 n -reihigen komplexen Matrizen M , für die

$$\tilde{M} I M = I \quad \text{mit} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E^{(n)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit n -reihigen Matrizen A, B, C, D , so ist $\tilde{M} I M = I$ gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$A \tilde{B} = B \tilde{A}, \quad C \tilde{D} = D \tilde{C}, \quad A \tilde{D} - B \tilde{C} = E.$$

H. BRAUN [3] hat gezeigt, daß durch

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_1$$

eine eindeutige analytische Abbildung von \mathfrak{H}_1 auf sich vermittelt wird. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt leicht, daß zwei Matrizen $M, M_1 \in \Omega_1$ dann und nur dann die gleiche Abbildung liefern, wenn $M = a M_1$ mit einer beliebigen komplexen Zahl a vom absoluten Betrag 1. Identifikation aller derartigen Matrizen aus Ω_1 führt zu der Gruppe der Abbildungen Ω^1 .

Ω_2 sei die Untergruppe aller orthogonalen M aus Ω_1 . Ω_3 , die symplektische Gruppe, besteht aus den reellen M aus Ω_1 .

Satz 1: Ω_v liefert die volle Untergruppe der Abbildungen aus Ω^1 , die \mathfrak{H}_v auf sich abbilden ($v = 2, 3$).

Beweis: 1. Wenn $M \in \Omega_2$, so hat M die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Sei $Z \in \mathfrak{H}_2$, $W = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1}$, dann ist wegen $Z'Z + E = 0$

$$W'W = (-Z'\bar{B} + \bar{A})^{-1}(Z'A' + B')(AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} = -E,$$

also $W \in \mathfrak{H}_2$. Da Ω_2 eine Gruppe ist, handelt es sich um eine Abbildung von \mathfrak{H}_2 auf sich. — Es sei

$$\Phi_v = \begin{pmatrix} iE & iE \\ -E & E \end{pmatrix}^{-1} \Omega_v \begin{pmatrix} iE & iE \\ -E & E \end{pmatrix} \quad (v = 2, 3).$$

Wegen (3) ist Φ_1 die Gruppe derjenigen Matrizen, welche die den Elementen von Ω^1 entsprechenden Abbildungen von \mathfrak{E}_1 auf sich liefern. Man rechnet leicht nach, daß die Matrizen $M \in \Phi_1$ charakterisiert sind durch

$$\tilde{M} K M = K, \quad \text{wobei} \quad K = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Sei nun eine Abbildung aus Ω^1 gegeben, die \mathfrak{H}_2 auf sich abbildet, M sei die

zugehörige Matrix aus Ω_1 . Die entsprechende Abbildung von \mathfrak{E}_1 auf sich sei

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Es gilt $W' = -W$ für alle $Z \in \mathfrak{E}_2$.

$$(Z'A' + B')(CZ + D) = -(Z'C' + D')(AZ + B).$$

Koeffizientenvergleich zeigt

$$\begin{pmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \lambda E.$$

Wegen $\tilde{M}^* K M^* = K$ gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{C} \\ -\tilde{B} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = E.$$

Da $\|M^*\| = 1$, folgt $|\lambda| = 1$. Indem man M^* durch $\lambda^{-1/2} M^*$ ersetzt, kann man annehmen $\lambda = 1$. Es folgt $D = \bar{A}$, $C = -\bar{B}$. Somit für M :

$$M M' = E.$$

2. Sei $M \in \Omega_3$, $W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ mit reellen A, B, C, D . Dann ist $(Z'A' + B')(CZ + D) = (Z'C' + D')(AZ + B)$ wegen $M'I M = I$, $Z' = Z$, und damit $W' = W$. — Sei $W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ eine Abbildung aus Ω^1 , die \mathfrak{H}_3 auf sich abbildet. Dann gilt $W' = W$ für alle symmetrischen $Z \in \mathfrak{H}_1$.

$$(Z'A' + B')(CZ + D) = (Z'C' + D')(AZ + B).$$

Koeffizientenvergleich liefert $M'I M = \lambda I$. Wegen $\|M\| = 1$ ist $|\lambda| = 1$. Indem man M durch $\lambda^{-1/2} M$ ersetzt, kann man annehmen $M'I M = I$, also $M \in \Omega_3$.

Bekanntlich liefern zwei Matrizen $M, M_1 \in \Omega_3$ dann und nur dann die gleiche Abbildung, wenn $M = \pm M_1$. — $M_0 \in \Phi_2$ bilde \mathfrak{E}_2 identisch ab auf sich selbst, dann folgt für $n > 2$ aus

$$Z = (A_0 Z + B_0)(-\bar{B}_0 Z + \bar{A}_0)^{-1} \quad \text{für } Z' = -Z$$

$B_0 = 0$, $A_0 = aE$ mit reellem a . Wegen $\tilde{M} K M = K$ ist $a = \pm 1$. Also liefern $M, M_1 \in \Omega_2$ für $n > 2$ dann und nur dann die gleiche Abbildung, wenn $M = \pm M_1$. Identifikation aller Matrizen aus $\Phi_3, \Phi_3, \Omega_2, \Omega_3$, die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden, führt zu den Abbildungsgruppen $\Phi^2, \Phi^3, \Omega^2, \Omega^3$. — Im Falle $n = 2$ liefert $M_0 \in \Phi_2$ dann und nur dann die identische Abbildung, wenn

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Sofern sich dieser bekannte Sonderfall des Einheitskreises bei den folgenden Betrachtungen auswirkt, wollen wir voraussetzen, daß $n > 2$.

Satz 2: Die Gruppen Ω' sind transitiv bezüglich \mathfrak{H}_r .

Beweis: Sei $Z_0 \in \mathfrak{H}_1$, $X_0 = \frac{1}{2}(Z_0 + \tilde{Z}_0)$, $Y_0 = \frac{1}{2i}(Z_0 - \tilde{Z}_0)$. Es gibt eine Matrix A , so daß $Y_0\{A\} = E$. Die Abbildung

$$W = (\tilde{A}Z - \tilde{A}X_0)A$$

aus Ω^1 führt dann den Punkt Z_0 in iE über. — Für $r = 2, 3$ lösen wir die entsprechende Aufgabe in \mathfrak{E}_r . Es sei $Z_0 \in \mathfrak{E}_r$, man bestimme A , so daß

$A(E - Z_0 \tilde{Z}_0) \tilde{A} = E$ und setze $B = -AZ_0$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in \Phi_2, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in \Phi_3.$$

Die zugehörigen Abbildungen führen Z_0 in 0 über.

Wegen der Transitivität von Φ genügt für das Studium der vollen Gruppe der analytischen Abbildungen von \mathfrak{E}_v auf sich die Untersuchung der Abbildungen mit dem Fixpunkt 0. — Sei $W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ aus Φ^1 eine solche Abbildung. Dann ist $B = 0$; da

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in \Phi_1,$$

sind A und D unitär, $C = 0$. Also

$$(5) \quad W = U_1 Z U_2$$

mit den unitären Matrizen $U_1 = A$, $U_2 = D^{-1}$. Nun sei eine Abbildung aus Φ^v ($v = 2, 3$) mit dem Fixpunkt 0 gegeben. Da $\Phi_v \subset \Phi_1$, gilt $W = U_1 Z U_2$ mit unitären Matrizen U_1 und U_2 . Ferner ist

$$U_2' Z U_1' = U_1 Z U_2$$

identisch in alternierenden bzw. symmetrischen Z erfüllt. Koeffizientenvergleich zeigt, daß $U_2' = a U_1$ mit einer Zahl a vom Betrag 1. Indem man noch U_2 durch $a^{-1/2} U_2$ und U_1 durch $a^{1/2} U_1$ ersetzt, folgt

$$(6) \quad W = U_2' Z U_2.$$

Durch die Gleichungen (5) bzw. (6) sind also die vollen Untergruppen von Φ^1 bzw. Φ^2 , Φ^3 der Abbildungen mit Fixpunkt 0 gegeben, wenn U_1 und U_2 alle unitären Matrizen durchlaufen.

Wir wollen nun die volle Gruppe der analytischen Abbildungen von \mathfrak{E}_v auf sich untersuchen.

Satz 3: Jede eindeutige analytische Abbildung von \mathfrak{E}_v auf sich mit dem Fixpunkt 0 ist linear.

Beweis: $W = W(Z)$ sei eine derartige Abbildung. Für $Z_0 \in \mathfrak{E}_v$ seien r_1, r_2, \dots, r_n , $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_n < 1$, die Eigenwerte von $Z_0 \tilde{Z}_0$. Für jede komplexe Zahl t mit $t \bar{t} r_n < 1$ ist auch $t Z_0 \in \mathfrak{E}_v$. Es existiert daher eine Potenzreihenentwicklung

$$(7) \quad W(t Z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k W_k(Z_0), \quad t \bar{t} r_n < 1.$$

Die $W_k(Z_0)$ sind homogene Polynome der Ordnung k in den unabhängigen Elementen von Z_0 , $W_k = -W'_k$ für $v = 2$, $W_k = W'_k$ für $v = 3$. Da $E - W(t Z_0) \tilde{W} > 0$ für $t \bar{t} = 1$, ist nach (7)

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{t \bar{t}=1} (E - W(t Z_0) \tilde{W}) \frac{dt}{t} = E - \sum_{k=1}^{\infty} W_k(Z_0) \tilde{W}_k > 0.$$

Wir untersuchen zunächst $W_1 = W_1(Z_0)$. Durch die gleiche Überlegung wie im Falle $v = 3$ [2] zeigt man, daß $W_1(Z_0)$ eine eindeutige lineare Abbildung

von \mathfrak{E}_r auf sich ist, die den Rand auf sich abbildet. Für $r \neq 2$ setzen wir speziell

$$Z_0 = U_1 P U_2, \quad P = [p_1, \dots, p_n],$$

U_1, U_2 unitär, $U_1 = U_2'$ für $r = 3$. Wenn $-1 < p_k < 1$, dann ist Z_0 innerer Punkt von \mathfrak{E}_r , wenn $-1 \leq p_k \leq 1$ und mindestens ein $p_k = \pm 1$, so ist Z_0 Randpunkt von \mathfrak{E}_r . $|E - W_1 \tilde{W}_1|$ ist ein Polynom in den p_k vom Totalgrad $2n$, $|E - W_1 \tilde{W}_1| = 0$ auf dem Rande. Daher ist $|E - W_1 \tilde{W}_1|$ teilbar durch

$\prod_{k=1}^n (1 - p_k^2)$. Da beide Polynome den gleichen Totalgrad haben und die konstanten Glieder übereinstimmen, folgt wegen Hilfssatz 1 und 2

$$(9) \quad |E - W_1(Z_0) \tilde{W}_1(Z_0)| = |E - Z_0 \tilde{Z}_0|$$

für alle $Z_0 \in \mathfrak{E}_r$. — Sei nun $r = 2$. Wir setzen speziell

$$Z_0 = U_1' P U_1, \quad P = [(0), p_1 I, \dots, p_m I], \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit unitärem U_1 und $m = \left[\frac{n}{2} \right]$. Z_0 ist innerer Punkt von \mathfrak{E}_2 , wenn $-1 < p_k < 1$, und Randpunkt, falls $-1 \leq p_k \leq 1$ und mindestens ein $p_k = \pm 1$. $|E - W_1(Z_0) \tilde{W}_1|$ ist ein Polynom in den p_k vom Totalgrad $4m$. Andererseits ist nach Hilfssatz 4

$$|E - W_1(Z_0) \tilde{W}_1| = \mathfrak{P}^2(p_1, \dots, p_m)$$

mit einem Polynom \mathfrak{P} vom Totalgrad $2m$. $|E - W_1 \tilde{W}_1| = 0$ auf dem Rande.

Daher ist $|E - W_1(Z_0) \tilde{W}_1|$ teilbar durch $\prod_{k=1}^m (1 - p_k^2)^2$. Wegen des Übereinstimmens der konstanten Glieder beider Polynome und Hilfssatz 3 gilt (9) auch für $r = 2$. — Da $W_1(Z_0)$ linear ist, haben $W_1 \tilde{W}_1$ und $Z_0 \tilde{Z}_0$ die gleichen Eigenwerte. Nach den Hilfssätzen 1, 2 und 3 existieren unitäre Matrizen U_1, U_2 , so daß

$$(10) \quad W_1(Z_0) = U_1 Z_0 U_2$$

für alle $Z_0 \in \mathfrak{E}_r$; $U_1 = U_2'$, falls $r \neq 1$. U_1, U_2 hängen zunächst noch ab von Z_0 . (10) gilt daher auch für alle komplexen Matrizen Z_0 , bzw. für alle alternierenden Z_0 , bzw. für alle symmetrischen Z_0 , je nachdem $r = 1, 2$ oder 3 ist. Wegen (8) ist $E - W_1 \tilde{W}_1 - W_k \tilde{W}_k > 0$ für $k = 2, 3, \dots$. Wir setzen

$$X = U_3 [D_1, D_2, \dots, D_m] U_4, \quad \begin{aligned} D_r &= e^{i\varphi_r}, \quad m = n && \text{für } r = 1, 3, \\ D_r &= e^{i\varphi_r} I, \quad m = \frac{n}{2} && \text{für } r = 2, n \text{ gerade} \end{aligned}$$

mit unitären U_3, U_4 und reellen φ_r , $U_3 = U_4'$ für $r \neq 1$. Für $0 \leq u < 1$ ist $Z_0 = u X \in \mathfrak{E}_r$. Wegen (10) ist

$$(1 - u^2) E - W_k(Z_0) \tilde{W}_k > 0.$$

Der Grenzübergang $u \rightarrow 1$ liefert $W_k(X) = 0$. $W_k(X)$ ist eine analytische Funktion in den φ_r , die für reelle Werte von φ_r identisch verschwindet.

Auf Grund der Hilfssätze 1, 2 und 3 folgt

$$(11) \quad W_k(X) = 0$$

für alle $X \in \mathfrak{E}_r$.

Sei $r = 2$, $n = 2m + 1$ ungerade; wir setzen

$$X = U'_3 [D_1, \dots, D_m, 0] U_3, D_r = e^{i\varphi_r} I, Z_0 = uX \quad \text{für } 0 \leq u < 1$$

mit unitärem U_3 und reellen φ_r ($1 \leq r \leq m$). Dann ist

$$W_1 \tilde{W}_1 = u^2 \begin{pmatrix} E^{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \{U_3 U_3\}$$

für alle u zwischen 0 und 1 und wegen (8)

$$(E - W_1 \tilde{W}_1) \{U'_2 U'_3\} - W_k \tilde{W}_k \{U'_2 U'_3\} > 0.$$

Der Grenzübergang $u \rightarrow 1$ zeigt

$$\begin{pmatrix} 0^{(n-1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - W_k \tilde{W}_k \{U'_2 U'_3\} \geq 0.$$

Daraus folgt $W_k(X) = 0$. Nach dem gleichen Schluß wie vorhin gilt dann $W_k(X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{E}_r$. Somit ist

$$W(Z) = W_1(Z).$$

Wir wollen nun die Abbildung $W_1 = W_1(Z_0)$ näher untersuchen.

Satz 4: Die volle Gruppe der eindeutigen analytischen Abbildungen von \mathfrak{E}_r auf sich mit dem Fixpunkt 0 lautet

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } r = 1: W_1(Z_0) = U_1 Z_0 U_2, \\ \quad \quad \quad W_1(Z_0) = U_1 Z'_0 U_2, \\ \text{für } r = 3: W_1(Z_0) = U' Z_0 U \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mit beliebigen unitären} \\ \text{Matrizen } U, U_1, U_2. \end{array}$$

Beweis: Sofern keine Angaben unter dem Summenzeichen stehen, werde für $r = 1$ über $k, l = 1, 2, \dots, n$, für $r = 3$ unter der Einschränkung $k \leq l$ summiert. Es seien

$$W_1(Z_0) = \sum z_{kl} A_{kl}, \quad W_1^*(Z_0) = \sum z_{lk} \tilde{A}_{kl}.$$

Dann ist $\tilde{W}_1(Z_0) = W_1^*(\tilde{Z}_0)$. Für $Z_0 \tilde{Z}_0 = E$ gilt nach (10) $W_1 \tilde{W}_1 = E$ und daher nach dem gleichen Schluß wie beim Beweise von (11)

$$(12) \quad W_1(Z_0) W_1^*(Z_0^{-1}) = E$$

für alle nichtsingulären Z_0 . Es sei $Z_0 = Z_1 + Z_2$, wobei $Z_1 = [z_{11}, \dots, z_{nn}]$, $Z_2 = Z_0 - Z_1$. Durch Entwicklung von Z_0^{-1} in einer Umgebung von $Z_2 = 0$ folgt aus (12) speziell

$$(13) \quad W_1(Z_1) W_1^*(Z_1^{-1}) = E, \quad W_1(Z_2) W_1^*(Z_1^{-1}) = W_1(Z_1) W_1^*(Z_1^{-1} Z_2 Z_1^{-1}).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen entnehmen wir durch ähnliche Überlegungen [2] wie im Falle $r = 3$, daß nach Multiplikation von W_1 mit geeigneten, von Z_0 unabhängigen, unitären Matrizen gilt $W_1(Z_1) = Z_1$. Aus (13) folgt

$$(14) \quad W_1(Z_2) = Z_1 W_1^*(Z_1^{-1} Z_2 Z_1^{-1}) Z_1 \quad \text{für } |Z_1| \neq 0.$$

Für $\nu = 3$ erhält [2] man dann $W_1 = U' Z_0 U$ mit unitärem konstantem U . — Falls $\nu = 1$, folgt aus (14)

$$z_{kl} z_{ll} A_{kl} = Z_1 \tilde{A}_{lk} Z_l \quad (k \neq l).$$

Daher ist

$$W_1(Z_0) = Z_1 + ((a_{kl} z_{kl})) + ((b_{kl} z_{lk})),$$

$a_{kl} = \bar{a}_{lk}$, $b_{kl} = \bar{b}_{lk}$, $a_{kk} = b_{kk} = 0$. Wegen (10) gilt

$$(15) \quad |W_1| = |Z_0|.$$

Für $k \neq l$ setzen wir $z_{rr} = 1$, falls $r \neq k, l$ und alle $z_{rs} = 0$ ($r \neq s$) bis auf z_{kl} , z_{lk} . Aus (15) folgt zunächst

$$z_{kl} z_{ll} - (a_{kl} z_{kl} + b_{kl} z_{lk}) (\bar{b}_{kl} z_{kl} + \bar{a}_{kl} z_{lk}) = z_{kl} z_{ll} - z_{kl} z_{lk},$$

also

$$a_{kl} b_{kl} = 0, \quad |a_{kl}|^2 + |b_{kl}|^2 = 1$$

und weiterhin

$$W_1 = ((a_{kl} z_{kl})), \quad a_{kl} = \bar{a}_{lk}, \quad a_{kk} = 1 \quad \text{oder} \quad W_1 = ((b_{kl} z_{lk})), \quad b_{kl} = \bar{b}_{lk}, \quad b_{kk} = 1.$$

Nach Multiplikation von W_1 mit geeigneten unitären Diagonalmatrizen \bar{D} bzw. D von links bzw. rechts kann man annehmen $a_{1l} = 1$ oder $b_{1l} = 1$ ($l = 1, \dots, n$). Nun betrachte man in der Gleichung (15) den Term

$$z_{1k} z_{22} \dots z_{k-1, k-1} z_{kl} z_{k+1, k+1} \dots z_{l-1, l-1} z_{ll} z_{l+1, l+1} \dots z_{nn} \quad (1 < k < l).$$

Es folgt $a_{kl} = 1$ oder $b_{kl} = 1$ für alle k, l , d. h.

$$W_1 = Z_0 \quad \text{oder} \quad W_1 = Z_0'.$$

Es sei noch bemerkt, daß die Abbildungen $W_1 = U_1 Z_0 U_2$ und $W_1 = U_1 Z_0' U_2$ für $n > 1$ wesentlich verschieden sind, da es keine konstanten Matrizen U, V gibt, so daß

$$U Z_0' V = Z_0.$$

Umgekehrt sind auch die Abbildungen von Satz 4 Abbildungen von \mathfrak{E}_ν auf sich. Wenn $Z_0 \in \mathfrak{E}_1$, so ist $E - \tilde{Z}_0 Z_0 > 0$ gleichbedeutend mit $E - Z_0 \tilde{Z}_0 > 0$, daher $E - \tilde{Z}_0' Z_0' > 0$, also $Z_0' \in \mathfrak{E}_1$ und umgekehrt.

Für $\nu = 2$ wollen wir uns bei der Untersuchung von $W_1(Z_0)$ auf die Betrachtung gerader $n = 2m$ ($m > 1$) beschränken. $m = 1$ führt auf den bekannten Fall des Einheitskreises. Wir setzen $Z_0 = ((Z_{kl}))$, $W_1 = ((W_{kl}))$ mit 2-reihigen Matrizen Z_{kl} und W_{kl} .

Satz 5: Die volle Gruppe der eindeutigen analytischen Abbildungen von \mathfrak{E}_2 auf sich mit Fixpunkt 0 besteht für gerades n aus den Abbildungen

$$\begin{aligned} W_1 &= U' Z_0 U & \text{für } n > 4, \\ \left. \begin{aligned} W_1 &= U' Z_0 U \\ W_1 &= U' Z_0' U \end{aligned} \right\} & \text{für } n = 4; \text{ dabei ist } Z_0^* = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und U eine beliebige unitäre Matrix.

Beweis: Für die Funktionen $W_1 = \sum_{k < l} z_{kl} A_{kl}$ und $W_1^* = \sum_{k < l} z_{kl} \tilde{A}_{kl}$ gilt wieder

$$(16) \quad W_1(Z_0) W_1^*(Z_0^{-1}) = E$$

für alle nichtsingulären alternierenden Z_0 . Wir setzen

$$Z_0 = [z_1 I^{(2)}, \dots, z_m I^{(2)}] + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & Z_{kl} \\ & -Z_{kl} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = Z_1 + Z_2.$$

Durch Entwicklung von Z_0^{-1} in einer Umgebung von $Z_2 = 0$ folgt aus (16) speziell

$$(17) \quad W_1(Z_1) W_1^* (Z_1^{-1}) = E, \quad W_1(Z_2) W_1^* (Z_1^{-1}) = W_1(Z_1) W_1^* (Z_1^{-1} Z_2 Z_1^{-1}).$$

Aus der ersten Gleichung entnehmen wir

$$\sum_{k,l} A_k \bar{A}_l z_k z_l^{-1} = -E,$$

wobei $A_r = A_{2r-1, 2r}$ gesetzt ist ($r = 1, 2, \dots, m$). Also gilt $A_k \bar{A}_l = 0$ für $k \neq l$. Für $Z_2 = 0$, $z_r = \delta_{rk}$ mit dem Kroneckerschen Symbol δ_{rk} ist $W_1(Z_0) = A_k$.

Wegen (10) hat $A_k \bar{A}_k$ die Eigenwerte $1, 1, 0, \dots, 0$. Nach Hilfssatz 3 können wir nach Transformation von W_1 mit einer unitären Matrix annehmen, daß $A_l = [I^{(2)}, 0]$. Wegen $A_k \bar{A}_l = 0$ ($k \neq l$) ist

$$A_k = \begin{pmatrix} 0^{(2)} & 0 \\ 0 & B_k^{(2n-2)} \end{pmatrix} \quad \text{für } k > 1.$$

Induktionsschluß zeigt, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann

$$A_k = [\delta_{k1} I, \dots, \delta_{km} I]$$

und damit

$$W_1(Z_1) = Z_1.$$

Wegen (17) gilt

$$(18) \quad W_1(Z_2) = Z_1 W_1^* (Z_1^{-1} Z_2 Z_1^{-1}) Z_1 \quad \text{für } |Z_1| \neq 0.$$

Es ist $Z_1^{-1} Z_2 Z_1^{-1} = ((z_k z_l)^{-1} I Z_{kl} I)$, $Z_{kk} = 0$, also

$$\sum_{k < l} (A_{2k-1, 2l-1} z_{2k-1, 2l-1} + A_{2k-1, 2l} z_{2k-1, 2l} + A_{2k, 2l-1} z_{2k, 2l-1} + A_{2k, 2l} z_{2k, 2l}) \\ = Z_1 \sum_{k < l} (z_k z_l)^{-1} \times$$

$$\times (-\bar{A}_{2k-1, 2l-1} z_{2k, 2l} + \bar{A}_{2k-1, 2l} z_{2k, 2l-1} + \bar{A}_{2k, 2l-1} z_{2k-1, 2l} - \bar{A}_{2k, 2l} z_{2k-1, 2l-1}) Z_1;$$

Koeffizientenvergleich zeigt

$$z_k z_l A_{2k-1, 2l-1} = \bar{A}_{2k, 2l} [Z_1], \quad z_k z_l A_{2k-1, 2l} = -\bar{A}_{2k, 2l-1} [Z_1],$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$, $k < l$. Es folgt, daß bei den Matrizen $A_{2k-1, 2l-1}$, $A_{2k-1, 2l}$, $A_{2k, 2l-1}$, $A_{2k, 2l}$ nur die zweireihigen Kästchen mit den Indizes k, l und l, k von Null verschieden sind. Setzen wir

$$A_{2k-1, 2l-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & F_{kl} \\ & -F_{kl} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2k, 2l} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & G_{kl} \\ & -G_{kl} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{2k-1, 2l} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & H_{kl} \\ & -H_{kl} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2k, 2l-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & J_{kl} \\ & -J_{kl} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

so folgt aus obigen Gleichungen weiter

$$(19) \quad F_{kl} = \bar{G}_{kl}[I], \quad H_{kl} = -J_{kl}[I].$$

Wegen (10) ist $|W_1| = \text{const } |Z_0|$. Da $|W_1|$ und $|Z_0|$ den gleichen Term $(z_1 z_2 \dots z_m)^2$ enthalten, gilt

$$|W_1| = |Z_0|.$$

Es ist

$$W_1(Z_0) = [z_1 I, \dots, z_m I] + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & F_{kl} z_{2k-1, 2l-1} + G_{kl} z_{2k, 2l} + H_{kl} z_{2k-1, 2l} + J_{kl} z_{2k, 2l-1} & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $|W_1| = |Z_0|$ folgt

$$|F_{kl} z_{2k-1, 2l-1} + G_{kl} z_{2k, 2l} + H_{kl} z_{2k-1, 2l} + J_{kl} z_{2k, 2l-1}| = |Z_{kl}|.$$

Wegen (19) erhalten wir daraus

$$(20) \quad \begin{aligned} |F_{kl}| &= 0, \quad |H_{kl}| = 0, \quad \sum f_r \bar{f}_r = \sum h_r \bar{h}_r = 1, \\ \sum f_r \bar{h}_r &= 0, \quad f_1 h_4 - f_2 h_3 - f_3 h_2 + f_4 h_1 = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$F_{kl} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}, \quad H_{kl} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}.$$

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit W_1 mit unitären konstanten Matrizen $U = [U_1, \dots, U_m]$, die U_r seien 2-reihige Matrizen der Determinante 1, transformieren. Es gibt unitäre U_1, U_2 , so daß

$$U'_1 F_{12} U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } U'_1 H_{12} U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$|U_1| = |U_2| = 1$. Im Falle $n = 4$ sind wir damit fertig, denn nach Transformation von W_1 mit $[U_1, U_2]$ erhält man $W_{12} = Z_{12}$ oder Z'_{12} .

Die Abbildungen $W_1 = U' Z_0^* U$ kann man nicht in der Form $W_1 = V' Z_0 V$ schreiben, da es keine nichtsingulären konstanten Matrizen A, B gibt, so daß $A Z_0 = Z_0^* B$. — Auf der anderen Seite gibt es unitäre U_1, U_2 , so daß

$$U'_1 Z_{12} U_2 = Z'_{12}, \quad |U_1| = |U_2| = 1.$$

U_1, U_2 hängen noch von Z_{12} ab. Daher

$$[U_1, U_2]' Z_0 [U_1, U_2] = Z_0^*.$$

$Z_0^* \tilde{Z}_0^*$ und $Z_0 \tilde{Z}_0$ haben also die gleichen Eigenwerte. Folglich ist $W_1(Z_0) = Z_0^*$ eine eindeutige analytische Abbildung von \mathfrak{E}_2 auf sich.

Sei nun $n > 4$. Wir müssen (10) stärker benutzen als bisher. Die Eigenwerte von $W_1 \tilde{W}_1$ und $Z_0 \tilde{Z}_0$ stimmen überein für alle alternierenden Z_0 . Also sind speziell die Summen der zweireihigen Hauptminoren von $W_1 \tilde{W}_1$ und $Z_0 \tilde{Z}_0$ identisch gleich. In dieser Gleichung werden wir Koeffizientenvergleich

vornehmen. Es seien

$$Z_1 = 0, Z_{12} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_{kl} = 0 \ (k < l) \text{ außer } Z_{12} \text{ und } Z_{23} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, W_{23} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

\hat{W} und \hat{Z} haben die gleichen Eigenwerte, wobei

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & w_1 & w_2 \\ * & & w_3 & w_4 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & x_1 & x_2 \\ * & & x_3 & x_4 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Der beschriebene Koeffizientenvergleich ergibt bei Betrachtung des in $|y|$ quadratischen Gliedes wegen

$$\sum w_k \bar{w}_k = \sum x_k \bar{x}_k$$

die Gleichung

$$w_1 \bar{w}_1 + w_2 \bar{w}_2 = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2$$

für alle Z_{23} . Also ist $f_3 = f_4 = h_3 = h_4 = 0$. Nach Transformation von W_1 mit $U = [E, E, U^* E, \dots, E]$ bei geeignetem unitären U^* der Determinante 1 kann man annehmen, daß $f_2 = 0$. Wegen (20) ist $h_1 = 0$ und somit

$$W_{23} = \begin{pmatrix} f_1 x_1 & h_2 x_2 \\ h_3 x_3 & f_1 x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $Z_{12} = W_{12}$. Man betrachte

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & w_1 & 0 \\ * & & w_3 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & x_1 & 0 \\ * & & x_3 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Der genannte Koeffizientenvergleich liefert:

$$Re(y_1 \bar{y}_2 \bar{w}_1 w_3) = Re(y_1 \bar{y}_2 \bar{x}_1 x_3),$$

also $f_1 h_2 = 1$. Der Fall $W_{12} = Z'_{12}$ kann nicht eintreten für $n > 4$, da sonst nach dem gleichen Schluß mit

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 & 0 \\ & y_2 & 0 & 0 \\ & 0 & x_1 & 0 \\ * & & x_3 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

\hat{W} wie oben, folgen würde $Re(y_1 \bar{y}_2 \bar{w}_1 w_3) = 0$. Nach Transformation von W_1 mit $U = [E^{(4)}, U_0, E]$, $U_0 = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}$, kann man annehmen $W_{23} = Z_{23}$. — Fortsetzung dieses Verfahrens für die sechsstufigen Untermatrizen, die symmetrisch zur Hauptdiagonale liegen, zeigt, daß man annehmen kann

$$W_{r,r+1} = Z_{r,r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, m-1).$$

Wir untersuchen nun W_{kl} für $l > k+1$. Seien

$$Z_{l-1,l} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_{kl} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, W_{kl} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

sonst alles Null unter Wahrung der Schiefsymmetrie. Der übliche Koeffizientenvergleich zeigt

$$w_1 \bar{w}_1 + w_3 \bar{w}_3 = x_1 \bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_3.$$

Setzen wir

$$Z_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$Z_{k,l}$ wie vorhin, sonst alles Null, so ergibt sich

$$w_3 \bar{w}_3 + w_4 \bar{w}_4 = x_3 \bar{x}_3 + x_4 \bar{x}_4.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$W_{kl} = \begin{pmatrix} f_1 x_1 & h_1 x_1 \\ \bar{h}_1 x_3 & \bar{f}_1 x_4 \end{pmatrix}.$$

Seien

$$Z_{l-1,l} = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{kl} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sonst alles Null, so erhält man durch ähnliche Betrachtungen

$$Re(w_1 \bar{w}_2 \bar{y}_1 y_2) = Re(x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2),$$

also $f_1 \bar{h}_2 = 1$. Wir müssen nun noch zeigen, daß $h_2 = 1$. Angenommen, es sei schon bewiesen

$$W_{k,k+1} = Z_{k,k+1}, \quad W_{k,k+2} = Z_{k,k+2}, \quad \dots, \quad W_{k,l-1} = Z_{k,l-1}.$$

Wir setzen

$$Z_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{l-1,l} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{k,l-1} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{l-1,l-1} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ -y_1 & 0 \end{pmatrix},$$

sonst alles Null unter Wahrung der Schiefsymmetrie. Dann ist

$$W_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der beschriebene Koeffizientenvergleich ergibt

$$Re(y_1 \bar{y}_2 \bar{w}_2 y_2) = Re(y_1 \bar{y}_2 \bar{x}_2 y_2).$$

Es folgt $h_2 = 1$ und damit durch Induktionsschluß $W_{kl} = Z_{kl}$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Wir fassen die beiden letzten Sätze unter Verwendung der Transitivität von Φ^* bezüglich \mathfrak{E}_* zusammen zu

Theorem 1: Die vollen Gruppen der eindeutigen analytischen Abbildungen von \mathfrak{E}_* auf sich lauten

$$\text{für } v = 1: \left. \begin{aligned} W(Z) &= F(Z), \\ W(Z) &= F(Z') \end{aligned} \right\} \text{ mit } F \in \Phi^1,$$

$$\text{für } v = 2, n \text{ gerade und } > 4: \left. \begin{aligned} W(Z) &= F(Z), \\ n = 4: W(Z) &= F(Z), \quad W(Z) = F(Z^*) \end{aligned} \right\} \text{ mit } F \in \Phi^2 \text{ und } Z^* = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z'_{12} \\ -Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{für } v = 3: W(Z) = F(Z) \text{ mit } F \in \Phi^3.$$

Da $\Phi_2, \Phi_3 \subset \Phi_1$, lassen sich im allgemeinen die Abbildungen von $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ auf sich analytisch fortsetzen zu Abbildungen von \mathfrak{E}_1 auf sich. Eine Ausnahme

liegt lediglich vor bei $r = 2$ und $n = 4$. Für $r = 3$ und $r = 2$, $n \neq 4$ ist Φ^3 bzw. Φ^2 die volle Gruppe der analytischen Abbildungen; für $r = 1$ und $r = 2$, $n = 4$ dagegen nicht.

§ 3. Riemannsche Geometrie in \mathfrak{H}_r .

Wir betten den SIEGELSchen Halbraum \mathfrak{H}_3 und \mathfrak{H}_2 ein in \mathfrak{H}_1 . Sodann bauen wir in \mathfrak{H}_1 eine Geometrie auf. Die geometrischen Eigenschaften von \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}_3 werden sich dann in einfacher Weise aus denjenigen von \mathfrak{H}_1 ergeben. $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ sind in dieser Geometrie Ebenen in \mathfrak{H}_1 , d. h. die geodätische Linie relativ zu \mathfrak{H}_1 zwischen zwei Punkten aus \mathfrak{H}_2 oder \mathfrak{H}_3 verläuft ganz in diesen Unterräumen.

Es soll zunächst untersucht werden, wann zwei vorgegebene Punkte aus \mathfrak{H}_r auf zwei weitere vorgegebene Punkte aus \mathfrak{H}_r durch Elemente von Ω^r abgebildet werden können. Es seien $Z, Z_1 \in \mathfrak{H}_1$. Unter dem Doppelverhältnis von Z und Z_1 verstehen wir die Matrix

$$R(Z, Z_1) = (Z - Z_1)(Z - \tilde{Z}_1)^{-1}(\tilde{Z} - \tilde{Z}_1)(\tilde{Z} - Z_1)^{-1}.$$

Dieser Ausdruck ist sinnvoll, da $|Z - \tilde{Z}_1| \neq 0$ wegen $Z - \tilde{Z}_1 \in \mathfrak{H}_1$. Wir benötigen zunächst

Satz 6: Seien $Z, Z_1 \in \mathfrak{H}_r$. Es gibt eine Abbildung aus Ω^r , die Z in iE und Z_1 in iT simultan überführt, wobei T die folgende Normalform hat:

für $r = 1, 3$: $T = [t_1, \dots, t_n]$, $1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$,

für $r = 2$: $T = \left[(1), \frac{E + T_1}{E - T_1}, \dots, \frac{E + T_m}{E - T_m} \right]$, $T_k = \begin{pmatrix} 0 & t_k \\ -t_k & 0 \end{pmatrix}$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m < 1$.

Beweis: Wir lösen die entsprechende Aufgabe für \mathfrak{E}_r . Nach (4) entsprechen iE und iT in \mathfrak{E}_r die Punkte 0 und

$$[t_1^*, \dots, t_n^*], \quad t_k^* = \frac{t_k - 1}{t_k + 1}, \quad 0 \leq t_1^* \leq \dots \leq t_n^* < 1 \quad \text{für } r = 1, 3,$$

$$[(0), T_1, \dots, T_m] \quad \text{für } r = 2.$$

Die den Punkten Z, Z_1 entsprechenden Punkte in \mathfrak{E}_r bezeichnen wir wieder mit Z, Z_1 . Wegen Satz 2 kann man annehmen $Z = 0$. Nach den Hilfssätzen 1, 2 und 3 gibt es unitäre Matrizen U_1, U_2 , so daß

$$U_1 Z_1 U_2 = \begin{cases} [q_1^{1/2}, \dots, q_n^{1/2}] & \text{für } r = 1, 3, \\ [(0), q_1^{1/2} I, \dots, q_m^{1/2} I] & \text{für } r = 2, \end{cases}$$

$U_1 = U_2'$ für $r \neq 1$; q_1, \dots, q_n , $0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_n < 1$, sind die Eigenwerte von $Z_1 \tilde{Z}_1$. Dann leistet die Abbildung $W = U_1 Z_0 U_2$ das Verlangte.

Z, Z_1 seien zwei beliebige Punkte aus \mathfrak{H}_1 ;

$$\left. \begin{aligned} W &= (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \\ W_1 &= (AZ_1 + B)(CZ_1 + D)^{-1} \end{aligned} \right\} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_1.$$

Dann ist

$$(21) \quad R(Z, Z_1) = Q R(W, W_1) Q^{-1},$$

wobei $Q = Z_1 \tilde{C} + \tilde{D}$. Es ist nämlich

$$(22) \quad Z_1 - Z = (Z_1 E) \tilde{M} I M \begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix} = (Z_1 \tilde{C} + \tilde{D}) (W_1 - W) (CZ + D).$$

Wegen $\tilde{M} I M = I$ gilt $\tilde{W} = (A \tilde{Z} + B) (C \tilde{Z} + D)^{-1}$, entsprechend für Z_1 und W_1 . Daher folgt aus (22)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 - Z &= (\tilde{Z}_1 \tilde{C} + \tilde{D}) (\tilde{W}_1 - W) (CZ + D), \\ Z_1 - \tilde{Z} &= (Z_1 \tilde{C} + \tilde{D}) (W_1 - \tilde{W}) (C \tilde{Z} + D), \\ \tilde{Z}_1 - \tilde{Z} &= (\tilde{Z}_1 \tilde{C} + \tilde{D}) (\tilde{W}_1 - \tilde{W}) (C \tilde{Z} + D) \end{aligned}$$

und damit (21). — Die Eigenwerte von $R(Z, Z_1)$ und $R(W, W_1)$ stimmen also überein.

Seien nun $Z, Z_1, W, W_1 \in \mathfrak{H}$, vorgegeben, derart daß $R(Z, Z_1)$ und $R(W, W_1)$ die gleichen Eigenwerte haben. Dann gibt es eine Abbildung aus Ω' , die Z in W und Z_1 in W_1 simultan überführt. Wegen Satz 6 und (21) genügt es nämlich zu zeigen, daß T in der Normalform von Satz 6 eindeutig festgelegt ist durch die Eigenwerte von $R(iE, iT)$.

$$R(iE, iT) = \begin{cases} \left[\left(\frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} \right)^2, \dots, \left(\frac{t_n - 1}{t_n + 1} \right)^2 \right] & \text{für } \nu = 1, 3, \\ [(0), t_1^2 E^{(2)}, \dots, t_m^2 E^{(2)}] & \text{für } \nu = 2. \end{cases}$$

Wegen $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ bzw. $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < 1$ folgt die Behauptung. — Damit ist bewiesen

Theorem 2: Ein Punktepaar $Z, Z_1 \in \mathfrak{H}$, läßt sich dann und nur dann auf ein weiteres Punktepaar $W, W_1 \in \mathfrak{H}$, abbilden durch Elemente von Ω' , wenn die Eigenwerte von $R(Z, Z_1)$ und $R(W, W_1)$ übereinstimmen.

Insbesondere folgt noch aus den obigen Betrachtungen, daß die Eigenwerte r_k von $R(Z, Z_1)$ stets reell sind und die Ungleichung

$$(23) \quad 0 \leq r_k < 1$$

befriedigen.

Wir führen nun in \mathfrak{H}_1 eine Metrik ein durch die Differentialform

$$ds^2 = \sigma(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\tilde{Z}).$$

Dabei ist $Y = \frac{1}{2i} (Z - \tilde{Z})$, $dZ = ((dz_k))$; $\sigma(A)$ bedeute die Spur der Matrix A . H. BRAUN [3] hat gezeigt, daß diese Differentialform invariant ist gegenüber Abbildungen aus Ω^1 .

$$\sigma(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\tilde{Z}) = \sigma(Y'^{-1} dZ' Y'^{-1} d\tilde{Z}').$$

Also ist ds^2 auch invariant gegenüber der Abbildung $W(Z) = Z'$ und damit gegenüber der vollen Gruppe der analytischen Abbildungen von \mathfrak{H}_1 auf sich. ds^2 ist positiv definit, da die Differentialform im Punkte $Z = iE$ positiv ist. Diese Form für das Linienelement wird nahegelegt durch die Formel für das Doppelverhältnis. — Wir betrachten nun geodätische Linien.

Satz 7: Zwischen zwei vorgegebenen verschiedenen Punkten $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{H}_1$ gibt es stets eine geodätische Linie.

Beweis: Wegen Satz 6 darf man annehmen, daß $Z_1 = iE$, $Z_2 = iT = i[t_1, \dots, t_n]$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n > 1$. Wir zeigen, daß

$$Z_0(u) = i[t_1^u, \dots, t_n^u], \quad 0 \leq u \leq 1,$$

eine geodätische Linie ist, die iE mit iT verbindet.

$$\frac{dZ_0}{du} = i[t_1^u \log t_1, \dots, t_n^u \log t_n], \quad Y_0^{-1}(u) = [t_1^{-u}, \dots, t_n^{-u}].$$

Daher ist

$$ds^2 = \sum_k (\log t_k)^2 du^2$$

und die Bogenlänge

$$\varrho = \left(\sum_k \log^2 t_k \right)^{1/2}.$$

Wir müssen zeigen, daß jede andere Kurve $Z(u)$ zwischen iE und iT mit stückweise stetiger Tangente eine Bogenlänge $\geq \varrho$ besitzt. Wir setzen an

$$Z(u) = X(u) + iQ(u)\{U(u)\}.$$

Dabei seien $X = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$, Q eine reelle Diagonalmatrix $[q_1, \dots, q_n]$, U unitär, $Q(0) = U(0) = U(1) = E$, $X(0) = X(1) = 0$, $Q(1) = T$. Wegen

$$ds^2 = \sigma(Y^{-1}dZ Y^{-1}d\bar{Z}) = \sigma(Y^{-1}dX Y^{-1}dX) + \sigma(Y^{-1}dY Y^{-1}dY)$$

ist die Bogenlänge von $Z(u)$ größer als diejenige von

$$Z_1(u) = iQ(u)\{U(u)\}.$$

Es genügt also, $Z_1(u)$ zu betrachten. \cdot bedeute Ableitung nach u . Für $F = \dot{U} \bar{U}$ gilt $F = -\bar{F}$. Durch die gleiche Rechnung [2] wie im Falle $v = 3$ erhält man

$$\begin{aligned} \sigma(Y^{-1}\dot{Y} Y^{-1}\dot{Y}) &= 2\sigma(F^2) + \sigma(Q^{-1}\dot{Q} Q^{-1}\dot{Q}) - 2\sigma(F Q F Q^{-1}) \\ &= \sum_{k,l} f_{kl} f_{kl} \frac{(q_k - q_l)^2}{q_k q_l} + \sum_k \left(\frac{\dot{q}_k}{q_k} \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen der Identität

$$\sum_{k=1}^n Q_k^2 = \left(\sum_k c_k Q_k \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l} (c_k Q_l - c_l Q_k)^2$$

für $\sum c_k^2 = 1$ folgt mit $c_k = \varrho^{-1} \log t_k$, $Q_k = \frac{\dot{q}_k}{q_k}$ für die Bogenlänge ϱ_1 von $Z_1(u)$

$$\varrho_1 \geq \int_0^1 \left(\sum_k c_k Q_k \right) du = \sum_k c_k \log t_k = \varrho.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn

$$\left. \begin{aligned} f_{kl}(q_k - q_l) &= 0, \\ c_k Q_l - c_l Q_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad k, l = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_k c_k Q_k \geq 0$$

für alle u aus dem Intervall $0 \leq u \leq 1$.

Satz 8: Zwischen zwei verschiedenen Punkten $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{H}_1$ gibt es genau eine geodätische Linie.

Beweis: Wir können wieder annehmen, daß $Z_1 = iE$, $Z_2 = iT$. $Z^*(u)$ sei eine zweite geodätische Linie, die iE mit iT verbindet. Es werden die gleichen Bezeichnungen wie bei Satz 7 verwendet. Der * deute an, daß die betreffenden Größen zu $Z^*(u)$ gehören. Dem Beweis von Satz 7 entnehmen wir, daß wir annehmen können:

$$Z^* = iQ^*\{U^*\}, \quad Q^*(0) = U^*(1) = U^*(0) = E, \quad Q^*(1) = T$$

mit einer positiven reellen Diagonalmatrix Q^* und unitärem U^* ,

$$(24) \quad f_{kl}^*(q_k^* - q_l^*) = 0, \quad c_k Q_l^* - c_l Q_k^* = 0, \quad \sum_k c_k Q_k^* \geq 0$$

für alle u aus $0 \leq u \leq 1$. Aus der letzten Gleichung folgt

$$(25) \quad q_k^* = t_k^{\gamma(u)} \quad \text{mit} \quad \gamma(u) = \log q_n^* (\log t_n^*)^{-1}.$$

Wegen $\sum_k c_k Q_k^* \geq 0$ ist $\dot{\gamma}(u) \geq 0$. Aus (24) und (25) ergibt sich

$$\begin{aligned} T F^* - F^* T &= 0, \\ \tilde{U}^* T U^* + \tilde{U}^* T U^* &= 0, \\ \tilde{U}^* T U^* &= T. \end{aligned}$$

Mit (25) folgt $Q^*\{U^*\} = Q^*$ und damit

$$Z^*(u) = i[t_1^{\gamma(u)}, \dots, t_n^{\gamma(u)}].$$

Da $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, stimmen die Kurven $Z_0(u)$ und $Z^*(u)$ in ihrem gesamten Verlauf überein.

Führen wir statt u den Parameter $\tau = \varrho u$ ein, so hat die geodätische Linie die Parameterdarstellung

$$Z(\tau) = i[e^{c_1 \tau}, \dots, e^{c_n \tau}], \quad \sum c_k^2 = 1, \quad 0 \leq \tau \leq \varrho$$

oder

$$Z(\tau) = i[p_1^r, \dots, p_n^r]$$

mit beliebigen positiven Konstanten p_k , für die $\sum_k \log^2 p_k = 1$. Es gilt also

Theorem 3: Zwischen zwei Punkten $Z, Z_1 \in \mathfrak{H}_1$ gibt es genau eine geodätische Linie; diese geodätischen Linien sind Bilder unter Elementen von Ω^1 der Kurven

$$Z(\tau) = i[p_1^r, \dots, p_n^r].$$

Dabei sind die p_k beliebige positive Konstante, für die $\sum_k \log^2 p_k = 1$. τ durchläuft das Intervall $0 \leq \tau \leq \varrho$, wobei ϱ der geodätische Abstand von Z und Z_1 ist.

Wegen Theorem 2 gilt für den geodätischen Abstand ϱ die Formel

$$(26) \quad \varrho^2 = \sum_{k=1}^n \log^2 \frac{1 + r_k^{1/2}}{1 - r_k^{1/2}}.$$

r_1, \dots, r_n sind die Eigenwerte von $R(Z, Z_1)$. — Man kann die gleichen Umformungen [2] vornehmen wie im Falle $v = 3$ und erhält

Theorem 4: Für den geodätischen Abstand ϱ gilt die Formel

$$\varrho^2 = \sigma \left(\log^2 \frac{1 + R^{1/2}}{1 - R^{1/2}} \right).$$

Dabei ist $R = R(Z, Z_1)$ und $\log^2 \frac{1 + R^{1/2}}{1 - R^{1/2}} = 4 R \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{2k+1} \right)^2$.

Mit Hilfe der üblichen Methode in der Variationsrechnung wollen wir die Differentialgleichung der geodätischen Linien aufstellen.

Satz 9: Die Differentialgleichung der geodätischen Linien lautet

$$(27) \quad \ddot{Z} = -i \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}.$$

Beweis: Sei $Z(s)$ eine geodätische Linie, s die Bogenlänge, $0 \leq s \leq s_e$. Wir berechnen die erste Variation von s .

$$\delta s = \frac{1}{2} \int_0^{s_e} \delta \sigma(Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}) ds.$$

Es seien $W = Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1}$, $V_1 = \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}$, $V_2 = \ddot{Z} Y^{-1} \dot{Z}$. Mit $R(A)$ bezeichnen wir den virtuellen Realteil der Matrix A : $R(A) = \frac{1}{2}(A + \tilde{A})$. Dann ist

$$\delta \sigma(Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}) = 2R \left\{ \sigma \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \delta Y^{-1} + (W \delta \tilde{Z}) - \dot{W} \delta \tilde{Z} \right) \right\},$$

$$\delta Y^{-1} = \frac{i}{2} Y^{-1} (\delta Z - \delta \tilde{Z}) Y^{-1},$$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= Y^{-1} \ddot{Z} Y^{-1} + i Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} - i Y^{-1} \dot{X} Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} - Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Y} Y^{-1} \\ &= Y^{-1} \ddot{Z} Y^{-1} + i Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} - \frac{i}{2} Y^{-1} (V_1 + V_2) Y^{-1}. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \delta s &= -R \left(\int_0^{s_e} \sigma \left(\dot{W} \delta \tilde{Z} - (W \delta \tilde{Z}) + \frac{i}{2} Y^{-1} (V_1 + V_2) Y^{-1} \delta \tilde{Z} \right) ds \right) \\ &= -R \left(\int_0^{s_e} \sigma(Y^{-1} (\ddot{Z} + i \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}) Y^{-1} \delta \tilde{Z}) ds \right), \end{aligned}$$

und daher folgt (27).

Wir wollen (27) direkt integrieren. Wegen Satz 2 können wir annehmen, daß $Z(0) = iE$, $\dot{Z}(0) = K$. Da $\sigma(Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z}) = 1$, ist $\sigma(K \tilde{K}) = 1$. Bei der Abbildung

$$\frac{W - iE}{W + iE} = U_1 \frac{Z - iE}{Z + iE} U_2, \quad U_1, U_2 \text{ unitär,}$$

wird K ersetzt durch $U_1 K U_2$. Nach Hilfssatz 1 können wir U_1, U_2 so bestimmen, daß

$$U_1 K U_2 = i[f_1, \dots, f_n] = iF, \quad 0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n, \quad \sum f_k^2 = 1.$$

Die Lösung von (27) unter den Anfangsbedingungen $Z(0) = iE$, $\dot{Z}(0) = iF$ lautet

$$Z(s) = i[e^{f_1 s}, \dots, e^{f_n s}].$$

Die allgemeinste geodätische Linie ergibt sich daraus durch eine beliebige Abbildung aus Ω^1 .

Wir wollen nun die Unterräume \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}_3 betrachten. Sie sind bei der eingeführten Metrik Ebenen in \mathfrak{H}_1 auf Grund von

Satz 10. Die geodätische Linie zwischen zwei Punkten Z_1, Z_2 aus \mathfrak{H}_1 verläuft vollständig in \mathfrak{H}_2 .

Beweis: $Z(u) = i[t_1^u, \dots, t_n^u]$ ist geodätische Linie zwischen iE und $iT = i[t_1, \dots, t_n]$, $1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < 1$. Es gilt $Z'(u) = Z(u)$ für alle u . Wegen Satz 6 folgt die Behauptung des Satzes für $\nu = 3$. — Für $\nu = 2$ können wir nach Satz 6 annehmen

$$Z_1 = iE, Z_2 = iT = i \left[(1), \frac{E+T_1}{E-T_1}, \dots, \frac{E+T_m}{E-T_m} \right], T_k = \begin{pmatrix} 0 & t_k \\ -t_k & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m < 1.$$

Seien

$$G^{(2)} = \frac{1}{2}(E + I), A^{(n)} = [(1), G, \dots, G], B^{(n)} = -i[(0), G', \dots, G'].$$

Wegen $2G'G = E$ und $2G^2 = I$ gilt

$$A\tilde{B} = B\tilde{A}, A\tilde{A} + B\tilde{B} = E, \text{ also } M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \Omega_1.$$

Die Abbildung $W = (AZ + B)(-BZ + A)^{-1}$ hat iE als Fixpunkt und führt iT über in

$$iT^* = i[(1), t_1^*E, \dots, t_m^*E], t_k^* = \frac{1+t_k}{1-t_k}, 1 \leq t_1^* \leq \dots \leq t_m^*;$$

denn

$$\begin{aligned} i(G(E+T_k) - G'(E-T_k))(-G'(E+T_k) + G(E-T_k))^{-1} \\ = i(I+T_k)(I-T_k)^{-1} = i \frac{1+t_k}{1-t_k} E. \end{aligned}$$

Die geodätische Linie $Z(u)$, die Z_1 und Z_2 verbindet, lautet dann nach Satz 7

$$Z(u) = [(i), Z_1^{(2)}, \dots, Z_m^{(2)}] = (A'W(u) + B')(-B'W(u) + A')^{-1}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

wobei $W(u) = i[(1), t_1^{*u}E, \dots, t_m^{*u}E]$. Sei $R_k = t_k^{*u}G' - G$, also $R_kR'_k = \frac{1}{2}(t_k^{*2u} + 1)E$. Dann ist

$$Z_k = -iR_kR'_k{}^{-1}, Z_kZ'_k = -E,$$

also auch $Z(u)Z'(u) = -E$ für alle u aus dem Intervall $0 \leq u \leq 1$.

Auf Grund dieses Satzes gelten die Sätze dieses Paragraphen auch für die Bereiche \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}_3 bei Beschränkung der Betrachtungen auf diese Unterräume. Jede geodätische Linie relativ zu \mathfrak{H}_ν ist auch geodätische Linie in \mathfrak{H}_1 .

Es sei noch erwähnt, daß für einen festen Punkt $Z_1 \in \mathfrak{H}_\nu$ und $c > 0$ durch

$$\varrho(Z, Z_1) \leq c$$

eine kompakte Punktmenge \mathfrak{G} in \mathfrak{H}_ν festgelegt ist. Es genügt, den Beweis für $\nu = 1$ zu führen, für $\nu = 2, 3$ ergibt sich die Aussage durch Bildung des Durchschnitts von \mathfrak{G} mit \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}_3 . Wegen der Transitivität von Ω^1 können wir annehmen, daß $Z_1 = iE$ ist.

$$R(Z, iE) = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}(\tilde{Z} + iE)(\tilde{Z} - iE)^{-1} = Z_0\tilde{Z}_0,$$

wobei $Z_0 = (Z - iE)(Z + iE)^{-1} \in \mathfrak{E}_1$. Wegen $\varrho \leq c$ und (26) genügen die Eigenwerte r_k von $Z_0\tilde{Z}_0$ der Ungleichung

$$0 \leq r_k \leq \vartheta < 1.$$

ϑ hängt nur von \mathfrak{G} ab. Jeder Häufungspunkt von Punkten aus \mathfrak{G} liegt wegen $\vartheta < 1$ in \mathfrak{H}_1 und erfüllt $\varrho(Z, Z_1) \leq c$ wegen der Stetigkeit von $\varrho(Z, Z_1)$. Da \mathfrak{E}_1

beschränkt ist, folgt die Behauptung. — Wegen der Stetigkeit von $\varrho(Z, Z_1)$ gilt natürlich auch die Umkehrung. Sei $Z_1 \in \mathfrak{H}$, und \mathfrak{G} eine kompakte Punktmenge in \mathfrak{H} , dann gibt es eine Konstante c , so daß $\varrho(Z, Z_1) \leq c$ für alle $Z \in \mathfrak{G}$.

§ 4. Diskontinuierliche Gruppen.

Eine Gruppe Λ von eindeutigen analytischen Abbildungen von \mathfrak{H} , auf sich heißt diskontinuierlich relativ zu \mathfrak{H} , wenn für jedes feste Z aus \mathfrak{H} , die Menge der Bildpunkte keinen Häufungspunkt in \mathfrak{H} , hat. Wir werden uns weiterhin, ohne es besonders hervorzuheben, stets auf die Betrachtung von Untergruppen von Ω^* beschränken. — Eine Menge von Matrizen heißt diskret, wenn jede unendliche Folge verschiedener Matrizen divergiert. Ordnen wir jeder Abbildung aus Ω^* genau eine Matrix aus Ω , zu, so gilt

Satz 11: Die Menge der zu einer relativ zu \mathfrak{H} , diskontinuierlichen Gruppe Λ gehörenden Matrizen M ist diskret. Jede diskrete Gruppe Λ von Matrizen aus Ω , liefert eine relativ zu \mathfrak{H} , diskontinuierliche Abbildungsgruppe Λ .

Beweis: Der erste Teil des Satzes ist sofort einleuchtend. Es genügt, den zweiten Teil für $\nu = 1$ zu beweisen, da Ω_2, Ω_3 Untergruppen von Ω_1 und $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ Unterräume von \mathfrak{H}_1 sind. Angenommen, Λ sei nicht diskontinuierlich. Dann gibt es ein $Z \in \mathfrak{H}_1$, so daß für $k \rightarrow \infty$

$$W_k = (A_k Z + B_k) (C_k Z + D_k)^{-1} \rightarrow W^* \in \mathfrak{H}_1, M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Wegen der Transitivität von Ω^1 kann man annehmen, daß $Z = iE$. Y_k bzw. Y^* seien die virtuellen Imaginärteile von W_k bzw. W^* . Aus

$$Y_k = E \{ (iC_k + D_k)^{-1} \}$$

folgt, daß $(iC_k + D_k)^{-1}$ beschränkt ist. Da $|Y_k|^{-1} = \|iC_k + D_k\|^2 \rightarrow |Y^*|^{-1}$, ist $iC_k + D_k$ beschränkt. Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen, daß $iC_k + D_k$ gegen F konvergiert. Wir setzen

$$D_k = F - iC_k + R_k, C_k = ((c_{\nu\mu}^{(k)})), F = ((f_{\nu\mu})), R_k = ((r_{\nu\mu}^{(k)})).$$

Das ν -te Diagonalelement von $C_k \tilde{D}_k$ lautet

$$i \sum_{\mu} |c_{\nu\mu}^{(k)}|^2 + \sum_{\mu} c_{\nu\mu}^{(k)} \bar{f}_{\nu\mu} + \sum_{\mu} c_{\nu\mu}^{(k)} r_{\nu\mu}^{(k)}.$$

Da $C_k \tilde{D}_k$ eine HERMITESCHE Matrix ist, sind die Diagonalelemente reell, also C_k und daher auch $D_k = (iC_k + D_k) - iC_k$ beschränkt. Aus $iA_k + B_k = W_k (iC_k + D_k)$ sehen wir, daß $iA_k + B_k$ und daher auch nach dem gleichen Schluß A_k, B_k beschränkt sind. Also gibt es eine konvergente Teilfolge der M_k , und Λ ist nicht diskret.

Wegen dieses Satzes kann man den Zusatz „relativ zu \mathfrak{H} “ bei diskontinuierlich weglassen. — Da \mathfrak{H}_1 überdeckt werden kann durch abzählbar viele kompakte Bereiche in \mathfrak{H}_1 , hat eine diskontinuierliche Gruppe stets abzählbar viele Elemente.

Die Beweise der folgenden Sätze von C. L. SIEGEL [2] über den Fundamentalbereich diskontinuierlicher Gruppen im Falle $\nu = 3$ lassen sich sofort

übertragen. Wir verzichten daher auf die Durchführung. Man betrachtet zunächst den Fall $\nu = 1$.

Der Durchmesser $\delta(\mathfrak{P})$ einer Punktmenge $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H}_1$ werde durch

$$\delta(\mathfrak{P}) = \overline{\lim}_{Z, Z^* \in \mathfrak{P}} \varrho(Z, Z^*)$$

und der Abstand $\varrho(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*)$ zweier Punktmenge $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^* \subseteq \mathfrak{H}_1$ durch

$$\varrho(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*) = \inf_{Z \in \mathfrak{P}, Z^* \in \mathfrak{P}^*} \varrho(Z, Z^*)$$

definiert. Seien D_1, D_2, \dots die Elemente einer diskontinuierlichen Gruppe Δ , \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} zwei kompakte Punktmenge aus \mathfrak{H}_1 , $D_k(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_k$ sei das Bild von \mathfrak{P} unter D_k , so strebt

$$(28) \quad \varrho(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_k) \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Daraus ergibt sich die Existenz eines Punktes $Z_1 \in \mathfrak{H}_1$, so daß

$$D_k(Z_1) \neq D_l(Z_1) \quad \text{für } l \neq k.$$

$\mathfrak{F}(Z_1)$ bestehe aus allen Punkten $Z \in \mathfrak{H}_1$, für die

$$\varrho(Z, Z_1) \leq \varrho(Z, Z_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

\mathfrak{S} sei die Komplementärmenge von $\mathfrak{F}(Z_1)$ in \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{B} der Rand von \mathfrak{F} , $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} - \mathfrak{B}$ die Menge der inneren Punkte. Dann besteht \mathfrak{F}_0 aus allen Punkten $Z \in \mathfrak{H}_1$, für die $\varrho(Z, Z_1) < \varrho(Z, Z_k)$ ($k = 2, 3, \dots$), \mathfrak{B} aus allen Punkten $Z \in \mathfrak{H}_1$, für die $\varrho(Z, Z_1) \leq \varrho(Z, Z_k)$ ($k = 2, 3, \dots$), das Gleichheitszeichen stehe für mindestens einen Index k , \mathfrak{S} aus allen Punkten $Z \in \mathfrak{H}_1$, für die $\varrho(Z, Z_1) > \varrho(Z, Z_k)$ für mindestens ein k . Man nennt einen Bereich \mathfrak{F} einen Stern, wenn es einen inneren Punkt $Z_1 \in \mathfrak{F}$ gibt, so daß für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{F}$ die gesamte geodätische Linie zwischen Z und Z_1 in \mathfrak{F} verläuft. Man zeigt dann leicht, daß $\mathfrak{F}(Z_1)$ ein Stern und Fundamentalbereich von Δ ist. Der Rand von $\mathfrak{F}(Z_1)$ besteht aus Teilen der Flächen $\varrho(Z, Z_1) = \varrho(Z, Z_k)$ ($k > 1$). Jeder kompakte Bereich aus \mathfrak{H}_1 wird von endlich vielen Bildern von $\mathfrak{F}(Z_1)$ unter Δ überdeckt. — Damit haben wir zunächst für $\nu = 1$

Theorem 5: Für jede diskontinuierliche Gruppe $\Delta \subset \Omega^r$ gibt es einen Fundamentalbereich \mathfrak{F} relativ zu \mathfrak{H}_r , der ein Stern ist und die Eigenschaft besitzt, daß jeder kompakte Bereich aus \mathfrak{H}_r von endlich vielen Bildern von \mathfrak{F} überdeckt wird.

Aus diesem Satz für $\nu = 1$ folgt leicht der Beweis für $\nu = 2, 3$. Jede diskontinuierliche Gruppe $\Delta \subset \Omega^r$ ($\nu = 2, 3$) kann man auffassen als diskontinuierliche Gruppe von Abbildungen von \mathfrak{H}_1 auf sich, da $\Omega_r \subseteq \Omega_1$. Wir können den Punkt Z_1 in \mathfrak{H}_r wählen. Es sei $\mathfrak{F}^{(\nu)}(Z_1) = \mathfrak{F}(Z_1) \cap \mathfrak{H}_r$. Dann ist $\mathfrak{F}^{(\nu)}(Z_1)$ ein Stern wegen Satz 10. $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ sei der Rand von $\mathfrak{F}^{(\nu)}(Z_1)$, $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{F}^{(\nu)}(Z_1)$ in \mathfrak{H}_r . Es gilt dann

$$(29) \quad \mathfrak{B}^{(\nu)} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}_r.$$

Denn einerseits ist natürlich $\mathfrak{B}^{(v)} \subseteq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}_v$. Sei andererseits $Z \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}_v$, so ist $\varrho(Z, Z_1) = \varrho(Z, Z_l)$ für ein gewisses $l > 1$. Wegen der Dreiecksungleichung und Satz 8 gilt für jeden Punkt $Z^* \neq Z$ auf der geodätischen Linie zwischen Z und Z_l

$$\varrho(Z_1, Z^*) + \varrho(Z^*, Z) > \varrho(Z, Z_l),$$

$$\varrho(Z_1, Z^*) + \varrho(Z, Z_l) - \varrho(Z^*, Z_l) > \varrho(Z, Z_l),$$

also

$$\varrho(Z^*, Z_l) > \varrho(Z^*, Z_l).$$

Die gesamte geodätische Linie, die Z mit Z_l verbindet, gehört also $\mathfrak{G}^{(v)}$ an bis auf den Punkt Z . Daher gilt (29). Aus den Eigenschaften von $\mathfrak{F}(Z_1)$ folgt, daß $\mathfrak{F}^{(v)}(Z_1)$ ein Fundamentalbereich von Δ relativ zu \mathfrak{H}_v ist, und es folgt Theorem 5 für $v = 2, 3$.

Wir nennen \mathfrak{H}_v kompakt relativ zu einer diskontinuierlichen Gruppe Δ , wenn es einen kompakten Bereich \mathfrak{G} in \mathfrak{H}_v gibt, so daß jeder Punkt von \mathfrak{H}_v mindestens einen unter Δ äquivalenten Punkt in \mathfrak{G} hat. Wenn \mathfrak{H}_v kompakt relativ zu Δ ist, so ist $\mathfrak{F}^{(v)}(Z_1)$ kompakt. In Verallgemeinerung der FUCHSschen Gruppen erster Art führte C. L. SIEGEL [4] die „diskontinuierlichen Gruppen erster Art“ ein. Aus Theorem 5 erhalten wir dann sofort

Theorem 6: \mathfrak{H}_v sei kompakt relativ zu einer diskontinuierlichen Gruppe Δ . Dann ist Δ diskontinuierlich von der ersten Art und hat einen kompakten Fundamentalbereich.

Dieser Satz gibt uns Aufschlüsse über die Struktur der Gruppen Δ . Bekanntlich [4] ist eine diskontinuierliche Gruppe erster Art endlich erzeugbar.

Literatur.

- [1] E. CARTAN: Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. Abhdl. Math. Sem. Hansischen Univ. 11, 116—162 (1936). — [2] C. L. SIEGEL: Symplectic Geometry. Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943). — [3] H. BRAUN: Hermitian Modular Functions III. Ann. of Math. 53, 143—160 (1951). — [4] C. L. SIEGEL: Discontinuous Groups. Ann. of Math. 44, 674—689 (1943).

(Eingegangen am 20. Januar 1955.)

Über automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinuitätsgebiet.

Von

HANS PETERSSON in Münster (Westf.).

Einleitung.

Im Bereich der automorphen Formen hat sich das Interesse bisher hauptsächlich auf die ganzen automorphen Formen gerichtet. Erst in neuerer Zeit ergaben sich im Zusammenhang mit Problemen der additiven Zahlentheorie sinnvolle Fragestellungen über nicht-ganze automorphe Formen¹⁾. Sie hängen sämtlich mit der Aufgabe zusammen, explizite Konstruktionen für die automorphen Formen von positiver (reeller) Dimension zu entwickeln. Die methodische Grundlage dieser Konstruktionen bilden in [1], [2] wie auch im folgenden gewisse analytische Funktionen zweier komplexen Variablen, in deren einer sie automorphe Formen mit einem frei beweglichen Pol im Diskontinuitätsgebiet darstellen.

Vom funktionentheoretischen Standpunkt liegt die folgende Situation vor: Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit der oberen τ -Halbebene \mathfrak{H} als Grenzkreisinnerem (= Diskontinuitätsgebiet). Eine automorphe Form, die zu Γ , zur Dimension $-r$ und zum Multiplikatorsystem v gehört, nennen wir eine (automorphe) Form $\{\Gamma, -r, v\}$, die Gesamtheit dieser Formen die Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$. Zur Erklärung der genannten Aufgabe setze man $r > 2$, $|v| = 1$ voraus. Dann handelt es sich um die Konstruktion der Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$. Ein Konstruktionsverfahren wurde in [2] entwickelt mit dem Ziel, übersichtliche Darstellungen für die Fourierkoeffizienten der betreffenden Formen abzuleiten. Dieses Verfahren ist jedoch gänzlich ungeeignet zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten in den Punkten von \mathfrak{H} . Hierfür wird im folgenden ein neues Verfahren entwickelt. In seinen Endformeln treten mit einer Ausnahme nur noch Funktionen auf, die automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinuitätsgebiet darstellen. Dadurch rechtfertigt sich der Titel der vorliegenden Arbeit.

Die folgende Untersuchung verläuft im großen nach dem in [2] angegebenen Beweisgang. Es werden demgemäß nur diejenigen Einzelheiten genauer ausgeführt, in denen eine Abweichung von [2] eintritt. Zur Orientierung möge hier noch eine kurze Zusammenfassung der für die genannten Konstruktionen wesentlichen Prinzipien Platz finden.

¹⁾ HANS PETERSSON [1]: Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten, Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg 1950, 8, S. a. die hier zitierte Literatur; [2]: Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver Dimension. Math. Ann. 127, 33 (1954).

1. Da es außer Null keine ganzen automorphen Formen positiver Dimension gibt, ist eine Form $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ durch ihre Pole und Hauptteile in einem Fundamentalbereich \mathfrak{F} von Γ eindeutig bestimmt. Die Aufgabe, eine solche Form aus ihren Polen und Hauptteilen zu konstruieren, ist daher sinnvoll.

2. Die genannten Pole und Hauptteile sind im allgemeinen nicht willkürlich, sondern unterliegen einer wohldefinierten Einschränkung (Hauptteilbedingung). Insbesondere existieren im allgemeinen keine Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ mit nur einem Pol in \mathfrak{F} und eingliedrigen Hauptteilen.

3. Als Ersatz für diese Formen dienen Funktionen, deren Regularitätsverhalten in \mathfrak{F} zwar genau von dieser Art ist, die aber im allgemeinen keine Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ darstellen. Vielmehr unterscheiden sich die beiden Seiten der (für die Formen dieser Klasse gültigen) Invarianzrelation um einen additiven Zusatzterm von bestimmter Beschaffenheit. Funktionen, die solchen Funktionalgleichungen genügen, sollen hier kurz zur Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ assoziiert genannt werden.

4. Die Grundlage der Konstruktion bildet ein System von Poincaréschen Reihen der Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$, die in einem variablen Punkte z in \mathfrak{S} einen formalen (meistens auch realen) Pol erster Ordnung besitzen. Als Funktionen von z stellen diese Reihen assoziierte Funktionen der Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ dar. Eine assoziierte Funktion dieser Klasse von der unter 3. genannten Art, d. h. mit einem einzigen Pol in \mathfrak{F} und eingliedrigem Hauptteil, entsteht durch Bildung des Entwicklungskoeffizienten irgendeiner der obigen Poincaré-Reihen in diesem Pol mit der Polordnung als Index.

5. Durch Linear-Komposition kann man aus diesen (unter 3. genannten) Objekten leicht eine assoziierte Funktion von $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ gewinnen, die in \mathfrak{F} willkürliche Pole und Hauptteile aufweist. Wenn diese Pole und Hauptteile mit denen einer automorphen Form F aus $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ übereinstimmen, so ergibt die Hauptteilbedingung, daß jenes Linear-Kompositum selbst eine automorphe Form $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ und daher mit F identisch ist. In diese Darstellung von F geht die gemäß 4. zugrunde liegende Poincaré-Reihe als strukturbestimmendes Element ein.

6. Diese Darstellungen erwiesen sich als streng spezifisch in bezug auf das Problem, Darstellungen für die Entwicklungskoeffizienten von F in den Spitzen und in den Punkten von \mathfrak{S} abzuleiten; für jedes Entwicklungszentrum benötigt man eine besondere, diesem angepaßte Darstellung. Liegt das Entwicklungszentrum in \mathfrak{S} , so befolgen die Koeffizienten das genaue Analogon des Satzes 17 in [2] (vgl. auch S. 38, 39 am Ende der Einleitung von [2]). Eine weitere Analogie besteht für ganzes r darin, daß man durch $(r-1)$ -malige Differentiation von den unter 3. genannten Objekten zu den einpoligen Orthogonalfunktionen mit eingliedrigen Hauptteilen der Klasse $\{\Gamma, -r, v^{-1}\}$ gelangt.

* Die im folgenden mitgeteilte Konstruktion basiert völlig auf einer sinn-gemäßen Bestimmung einer Poincaréschen Reihe von der unter 4. angedeuteten Art. Diese muß nach Lage der Dinge von drei komplexen Unbestimmten, nämlich außer von r und z noch dem in \mathfrak{S} gelegenen Entwicklungszentrum s

abhängen. Durch die Einführung des Parameters s erreicht man, daß die entstehende Funktion nicht nur die erforderlichen Invarianzeigenschaften, sondern überdies analytisches Verhalten in τ und z aufweist; sie hängt daher lediglich von s nichtanalytisch ab. Die genauere Diskussion zeigt, daß dies keine Schwierigkeit verursacht, weil s festgehalten werden kann; ebenso fällt ein Pol im Punkte $z = s$ im Endresultat heraus. Im ganzen kann von der Konstruktion gesagt werden, daß sie, da ihr Ansatz stärker linearisiert ist als der von [2], oft eleganter geführt werden kann, als es in [2] möglich war. Der erwähnte Pol $z = s$ stellt eine der wenigen Komplikationen gegenüber [2] dar²⁾.

Die Hauptergebnisse finden sich in § 3 unter (A)—(D) und (3.8), (3.9). In einem angehängten § 4 erbringe ich — unabhängig von dem Vorangehenden — den rein algebraischen Beweis für den hinreichenden Charakter der Hauptteil-Bedingung unter den allgemeinst-möglichen Voraussetzungen, d. h. für automorphe Formen, die zu einer beliebigen Grenzkreisgruppe von erster Art, einer beliebigen komplexen Dimension und beliebigen Multiplikatoren gehören und die Multipla eines beliebigen festen Divisors sind. In zwei Spezialfällen wurde dieser Satz bereits von A. WEIL und O. TEICHMÜLLER bewiesen³⁾. Bei RITTER⁴⁾, wo er zum ersten Male angewendet wird, vermißt man die Klarheit der Darstellung, die darüber, ob ein Beweis geführt wurde, mit vertretbarem Aufwand zu entscheiden gestattet. Ich neige nachträglich dazu, an einigen Stellen in Anm. ⁴⁾ Andeutungen eines Schlusses zu sehen, der hier in § 4 wesentlich benutzt wird.

§ 1. Die Poincaréschen Reihen $Q(\tau, z, s, K)$.

Wir fixieren zunächst die Bezeichnungen, indem wir, um Wiederholungen zu vermeiden, auf [2] hinweisen. $\Gamma, -r, v$ sind wie in [2], § 1 erklärt; im folgenden wird stets $r > 2$, $|v| = 1$ vorausgesetzt. Unter \mathfrak{F} verstehen wir eine endlich-teilige Fundamentalmenge von Γ , deren (endlich viele) Teile Bereiche im Sinne von [2], S. 40 α) sind. \mathfrak{F} wird eine reguläre Fundamentalmenge r FM von Γ genannt, wenn \mathfrak{F} überdies die in [2] auf der gleichen Seite angegebenen Eigenschaften b), d), e) hat. Die Spitzen und Ecken von \mathfrak{F} treten mit den zugehörigen Bestimmungsstücken wie in [2], S. 41 in der Bezeichnung

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \zeta_j &= A_j^{-1} \infty, \quad P_j = A_j^{-1} U^{N_j} A_j \in \Gamma \quad (1 \leq j \leq \sigma_0); \\ \omega_k, E_k &\in \Gamma, \quad l_k \quad (1 \leq k \leq e_0) \end{aligned}$$

auf. Wird der Index j bzw. k weggelassen, so verwenden wir die Symbole

²⁾ In [2] sind zwei Berichtigungen anzubringen: In (47), S. 59 ist der Exponent $r - 2$ von $c_1 z + c_2$ auf der linken Gleichungsseite durch $2 - r$ zu ersetzen. In (69), S. 69 ist das erste Zeichen \leq unter dem zweiten Σ auf der rechten Gleichungsseite durch $<$ zu ersetzen; es heißt dort also $0 < n + \alpha_j \leq m_0(\zeta_j) + \alpha_j$.

³⁾ A. WEIL: Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. pures et appl. IX. s. 17, 47 (1938). — O. TEICHMÜLLER: Skizze einer Begründung der algebraischen Funktionentheorie durch Uniformisierung. Dtsch. Math. 6, 257 (1941).

⁴⁾ E. RITTER: Math. Ann. 44, 261—374 (1893).

$\kappa, \kappa^+, \kappa', a$ wie bei [2] (4), (7) gemäß

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v(P) &= e^{2\pi i \kappa}, \quad 0 \leq \kappa < 1; \quad \kappa = \kappa^+ \bmod 1, \quad 0 < \kappa^+ \leq 1; \quad \kappa' = 1 - \kappa^+, \\ v(E) &= \exp \left(\pi i \frac{r}{l} + 2\pi i \frac{a}{l} \right), \quad 0 \leq a \leq l-1, \quad a \text{ ganz}; \end{aligned}$$

vgl. auch [2] (32), (32a) und die Erklärungen zu [2] (26). Wird der Index j bzw. k nicht weggelassen, so verwenden wir die Symbole

$$\underline{A}_j = \{a_{j1}, a_{j2}\}, \quad N_j, \kappa_j, \kappa'_j \quad (1 \leq j \leq \sigma_0) \quad \text{und} \quad a_k \quad (1 \leq k \leq e_0)$$

gemäß [2], S. 62. Im übrigen wird nicht verboten, daß σ_0 oder e_0 oder beide verschwinden; wenn σ_0 nicht verschwindet, so sei $\zeta_1 = \infty$ ($A = I$) eine Spitze von Γ und von \mathfrak{F} . Wir setzen wie in [2] (5), (2)

$$u_N^\lambda = u_N^\lambda(\tau) = \exp \left(2\pi i \lambda \frac{\tau}{N} \right) \quad (N > 0, \lambda \text{ reell}),$$

$$w(\tau, z) = \frac{\tau - z}{\tau - \bar{z}} \quad (\tau \text{ und } z \text{ in } \mathfrak{H}).$$

K bezeichnet die Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$, \hat{K} ihre Komplementärklasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$. Im Gegensatz zu [2] verwenden wir K als Argument in Funktionszeichen, um die drei Parameter $\Gamma, -r, v$ abkürzend zusammenzufassen. Alle im folgenden auftretenden Matrizen sind zweireihig und quadratisch. Der Querstrich unter dem Symbol einer Matrix bestimmt deren zweite Zeile. Für eine reelle Matrix S der Determinante 1 setzen wir

$$\Gamma'_S = S^{-1} \Gamma S, \quad \Gamma_S = S \Gamma S^{-1},$$

$$K'_S = \{\Gamma'_S, -r, v'_S\}, \quad v'_S(L') = \frac{\sigma(L, S)}{\sigma(S, L')} v(L) \quad (L' = S^{-1} L S \in \Gamma'_S).$$

Die zweiten Zeilen der Matrizen S, L, A, M, E werden stets mit

$$S = \{c, d\}, \quad L = \{\gamma, \delta\}, \quad A = \{a_1, a_2\}, \quad M = \{m_1, m_2\}, \quad E = \{e_1, e_2\}$$

bezeichnet; die entsprechende Bezeichnung (vgl. oben \underline{A}_j) wird verwendet, wenn das Symbol der Matrix einen oberen oder unteren Index trägt. Wie in [2] sei $\tau = x + iy$ ($y = \text{Im } \tau > 0$), $p = \text{Im } z > 0$. Für die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen bedienen wir uns der Schreibweise in [2] (4), (7).

Wir bilden mit irgendeiner reellen Matrix A der Determinante 1, wenn τ, z, s Punkte in \mathfrak{H} darstellen und $\tau \not\equiv z \bmod \Gamma, z \not\equiv s$ ist, den Ausdruck

$$(1.3) \quad \begin{aligned} Q(\tau, z, s, A, K) &= \\ &= v(A) (a_1 z + a_2)^{r-2} \frac{(A z - A \bar{s})^r}{A z - A s} \sum_{M \in A \Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M \tau - A \bar{s})^r} \frac{M \tau - A s}{M \tau - A z}. \end{aligned}$$

Die naheliegende, mit

$$(M \tau - A \bar{s})^r = (A L \tau - A \bar{s})^r = \frac{(\gamma \tau + \delta)^r (L \tau - \bar{s})^r}{\sigma(A, L) (m_1 \tau + m_2)^r (a_1 \bar{s} + a_2)^r} \quad (M = A L \in A \Gamma)$$

beginnende Umformung führt (1.3) gliedweise in den (1.3) mit $A =$ Einheitsmatrix I entsprechenden Ausdruck über, den wir mit

$$(1.4) \quad Q(\tau, z, s, K) = \frac{(z - \bar{s})^r}{z - s} \sum_{M \in \Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M\tau - \bar{s})^r} \frac{M\tau - s}{M\tau - z}$$

bezeichnen. Eine andere, ebenfalls gliedweise Umformung ergibt bei reellem S der Determinante 1:

$$(1.5) \quad Q(S\tau, Sz, Ss, A, K) = (c\tau + d)^r (cz + d)^{2-r} Q(\tau, z, s, AS, K'_S).$$

Um die Konvergenz der Reihen in (1.3), (1.4) zu untersuchen, lasse man τ und z , wenn σ_0 verschwindet, auf einer kompakten Menge \mathfrak{A} in \mathfrak{H} variieren; für $\sigma_0 > 0$ variere z auf einer solchen Menge \mathfrak{A} , τ auf einem abgeschlossenen Vertikalhalbstreifen \mathfrak{B} in \mathfrak{H} , auf dem also $y \geq \alpha$ mit einem $\alpha > 0$ zutrifft. Dann konvergieren die Reihen nach Abtrennung eines endlichen, nur von \mathfrak{A} und Γ bzw. \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und Γ abhängigen Gliederaggregats gleichmäßig absolut, und die vollständigen Reihen streben, wenn τ in \mathfrak{B} über alle Grenzen geht, gleichmäßig gegen Null. Bei diesen Überlegungen wie auch stets im folgenden bleibt s fest.

Erklärt man $Q(\tau, z, s, K)$ durch (1.4), so gilt

$$(1.6) \quad Q(\tau, z, s, A, K) = Q(\tau, z, s, K),$$

also (1.5) unter Tilgung der Argumente A links, AS rechts. Im Zusammenhang mit den obigen Aussagen über die Konvergenz und das asymptotische Verhalten der Funktion Q gewinnt man aus (1.5) den folgenden Satz:

Für beliebige z und s in \mathfrak{H} stellt $Q(\tau, z, s, K)$, wenn $z \neq s$, eine automorphe Form der Klasse K in der Variablen τ dar. Diese verhält sich für $\tau \in \mathfrak{H}$ höchstens in den Punkten $\tau = Lz$ ($L \in \Gamma$) singular, wo sie dann lauter einfache Pole besitzt; wenn $\sigma_0 > 0$ ist, verschwindet sie in allen Spitzen von Γ .

Wir notieren noch zwei weitere Umformungen der Darstellung (1.4) von Q , die aus dieser leicht zu erhalten sind:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} Q(\tau, z, s, K) &= \\ &= (s - \bar{s}) (z - \bar{s})^{r-2} w^{-1}(z, s) \sum_{M \in \Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M\tau - \bar{s})^r} \frac{w(M\tau, s)}{w(M\tau, s) - w(z, s)} \\ &= \frac{(z - \bar{s})^r}{z - s} \Psi(\tau, s, K, 0) + (z - \bar{s})^r \sum_{M \in \Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M\tau - \bar{s})^r (M\tau - z)}; \end{aligned}$$

hierzu setzen wir (vgl. [2] (22)) für ganzes ν und reelles A der Determinante 1

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \Psi(\tau, z, K, A, \nu) &= \sum_{M \in A\Gamma} \frac{(M\tau - z)^\nu}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M\tau - \bar{z})^{r+\nu}}, \\ \Psi(\tau, z, K, \nu) &= \Psi(\tau, z, K, I, \nu). \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Funktion (1.4) Q in ihrer Abhängigkeit von den beiden komplexen Variablen τ und z . Mit der einzigen Ausnahme des Poles $z = s$ entstehen Singularitäten genau für diejenigen τ, z , welche $M\tau = z$ ($M \in \Gamma$) erfüllen. Die lokale Struktur dieser Singularitäten ergibt sich, wenn sogleich der kompliziertere Fall betrachtet wird, in dem τ und z in der Umgebung je eines elliptischen Fixpunktes von Γ liegen, wie

folgt: Es sei \mathfrak{t} eine hinreichend kleine offene H -Kreisscheibe um den elliptischen Fixpunkt ω von Γ . Wir betrachten den Dizylinder $\mathfrak{D}(L_0)$, der durch $\tau \in L_0^{-1}\mathfrak{t}$, $z \in \mathfrak{t}$ mit einem festen $L_0 \in \Gamma$ beschrieben wird. Weil in erster Näherung $M\tau \sim M L_0^{-1}\omega$, $z \sim \omega$ zutrifft, können $M\tau$ und z einander nur dann unterhalb einer gewissen Abstandsschranke benachbart sein, wenn $M L_0^{-1}\omega = \omega$, also $M = E^h L_0 = L_0^{(h)}$ gilt, wo E die Grundmatrix der Ecke ω von Γ bezeichnet und h ein volles Restsystem mod $2l$ durchläuft; unter l ist die inhomogene Ordnung des Fixpunktes ω von Γ zu verstehen. Nennt man wie in [2] analytische Funktionen von τ und z , deren Differenz auf $\mathfrak{D}(L_0)$ holomorph ist, einander kongruent mod $\mathfrak{D}^{-1}(L_0)$, so liefert die zweite Darstellung (1.7)

$$(1.9) \quad Q(\tau, z, s, K) = \sum_{h=0}^{l-1} \frac{1}{v(L_0^{(h)}) (\gamma_0^{(h)} \tau + \delta_0^{(h)})^r} \frac{2}{L_0^{(h)} \tau - z} \bmod \mathfrak{D}^{-1}(L_0),$$

vorausgesetzt, daß s nicht in \mathfrak{t} liegt. Liegt hingegen s in \mathfrak{t} , so hat man auf der rechten Seite das Zusatzglied

$$(1.10) \quad \frac{(s - \bar{s})^r}{z - s} \Psi(\tau, s, K, 0)$$

zu addieren. Daraus erschließt man (vgl. [2], S. 55), wenn s nicht in \mathfrak{t} liegt:

$$\begin{aligned} Q(\tau, z, s, K) &= \\ &= \sum_{h=0}^{l-1} v(L_0) (\gamma_0 E^h z + \delta_0)^{r-2} v(E^h) (e_1^{(h)} z + e_2^{(h)})^{r-2} \frac{2}{\tau - L_0 E^h z} \bmod \mathfrak{D}^{-1}(L_0^{-1}); \end{aligned}$$

auf der rechten Seite erscheint für $s \in \mathfrak{t}$ der additive Zusatzterm (1.10). Dies gibt

$$(1.11) \quad \text{Res}_{\tau=L_0 z} Q(\tau, z, s, K) = \varepsilon(z) v(L_0) (\gamma_0 z + \delta_0)^{r-2} \quad (L_0 \in \Gamma)$$

mit

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 2 & \text{wenn } z \text{ nicht Fixpunkt (von } \Gamma), \\ 2l & \text{wenn } z = \omega \text{ Fixpunkt der Ordnung } l \text{ und } a = l - 1, \\ 0 & \text{wenn } z = \omega \text{ Fixpunkt der Ordnung } l \text{ und } 0 \leq a < l - 1; \end{cases}$$

dabei ist $Q(\tau, z, s, K)$ als Funktion von τ aufzufassen.

Vermöge (1.11) gelangt man unmittelbar zu der [2] Satz 14 entsprechenden Aussage: Für beliebige z, s, s' in \mathfrak{H} und jedes L in Γ stellt, wenn $s \neq z \neq s'$,

$$(1.12) \quad Z(\tau, z, s, s', K, L) = Q(\tau, Lz, s', K) - v^{-1}(L) (\gamma z + \delta)^{2-r} Q(\tau, z, s, K)$$

eine ganze Spitzenform der Klasse K in der Variablen τ dar. — Im Falle $\sigma_0 > 0$ hat überdies

$$(1.13) \quad H_{-r}(\tau, v, z, A, \Gamma) - Q(\tau, z, s, K)$$

als Funktion von τ die gleiche Eigenschaft (zu H_{-r} vgl. [2], § 3).

Zum Schluß dieses Paragraphen untersuchen wir das Verhalten der Funktion (1.4) Q unter der Bedingung, daß τ einer kompakten Menge \mathfrak{A} in \mathfrak{H} angehört und z in eine Spitze $A^{-1}\infty$ von Γ rückt (A reell, $|A| = 1$, $A = \{a_1, a_2\}$). Der Grenzübergang ist so zu vollziehen, daß Az einen festen Vertikalstreifen in \mathfrak{H} nicht verläßt.

Nach (1.3), (1.6), (1.8) gilt zunächst

$$(1.14) \quad v^{-1}(A) (a_1 z + a_2)^{2-r} Q(\tau, z, s, K) = \\ = (Az - A\bar{s})^r \sum_{M \in A\Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M\tau - A\bar{s})^r} \frac{1}{M\tau - Az} + \\ + \frac{(Az - A\bar{s})^r}{Az - A\bar{s}} \Psi(\tau, s, K, A, 0).$$

Ferner weiß man, daß die Reihe $\Psi(\tau, s, K, A, 0)$ unter den vorliegenden Umständen gleichmäßig absolut konvergiert und daher beschränkt ist. Hiermit folgt aus (1.14) unmittelbar

$$(1.15) \quad (a_1 z + a_2)^{2-r} Q(\tau, z, s, K) = O(p_A^{-r}) \text{ für } p_A = \text{Im } Az \rightarrow \infty,$$

wenn $\text{Re } Az$ beschränkt bleibt; die Konstante in O hängt höchstens von K, A, \mathfrak{A} und s und der Schranke von $\text{Re } Az$ ab.

Die Relation (1.12) wird später nur für $s' = s$ angewendet. Wir schreiben dann

$$(1.16) \quad Z(\tau, z, s, s, K, L) = Z(\tau, z, s, K, L).$$

§ 2. Aufstellung der Konstruktionselemente.

Es handelt sich um die in der Einleitung unter 3. genannten assoziierten Funktionen der Klasse \tilde{K} . In ihrer Eigenschaft als automorphe Form der Klasse K in der Variablen τ hat die Funktion Q (von Sonderfällen abgesehen) nach (1.9)–(1.11) die Pole $\tau = Lz$ ($L \in \Gamma$). Es sei $\sigma_0 > 0$, $\zeta = A^{-1} \infty$ eine Spitze von Γ , dabei A eine reelle Matrix der Determinante 1, $A = \{a_1, a_2\}$. Wir unterstellen im folgenden, soweit Spitzen von Γ in Betracht kommen, die Voraussetzung (F) ([2], S. 56). Faßt man Q als Funktion von $A\tau$ auf, so liegen ihre möglichen Pole in den Punkten $A\tau = ALz$ ($AL \in A\Gamma$), also, wenn z einer kompakten Menge in \mathfrak{A} angehört, unterhalb einer Horizontalgeraden in der oberen Halbebene der Variablen $A\tau$. Daher existiert, wenn $A\tau$ über dieser Geraden liegt, eine Fourier-Entwicklung der Gestalt

$$(2.1) \quad Q(\tau, z, s, K) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n+\kappa^* > 0} P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) \exp\left(2\pi i(n+\kappa^*) \frac{A\tau}{N^*}\right),$$

deren von τ unabhängige Koeffizienten $P_{n+\kappa^*}$ nach (1.5), (1.6) den Relationen

$$(2.2) \quad P_{n+\kappa^*}(Sz, Ss, A, K) = \sigma(A, S) (cz + d)^{2-r} P_{n+\kappa^*}(z, s, AS, K'_S)$$

genügen (S eine reelle Matrix der Determinante 1). Aus (1.5), (1.6) und (2.1) gewinnt man auch die Integraldarstellung

$$(2.3) \quad P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = \\ = (a_1 z + a_2)^{r-2} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + N^*} Q(\tau, Az, As, K'_{A^{-1}}) \exp\left(-2\pi i(n+\kappa^*) \frac{\tau}{N^*}\right) \frac{d\tau}{N^*},$$

in der entlang einer Strecke integriert wird und $y_0 = \text{Im } \tau_0$ gemäß

$$(2.4) \quad y_0 > \vartheta^{-2}(A, \Gamma) p^{-1} \text{ und, wenn } A = I, \text{ außerdem } y_0 > p \text{ (} p = \text{Im } z \text{)}$$

zu wählen ist. Hieraus geht hervor, daß alle $P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K)$ analytische Funktionen von z darstellen, die in der oberen z -Halbebene, abgesehen höchstens vom Punkte $z = s$, überall regulär sind.

Wir untersuchen das Verhalten der $P_{n+\kappa^*}$ in den Spitzen von Γ . Nach (2.2) gilt, wenn $B^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ darstellt ($B = \{b_1, b_2\}$):

$$(2.5) \quad P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = \sigma(A, B^{-1}) (b_1 z + b_2)^{r-2} P_{n+\kappa^*}(Bz, Bs, AB^{-1}, K'_{B^{-1}}).$$

Daher genügt es, das Verhalten von $P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K)$ unter der Bedingung zu kennzeichnen, daß z in einem Vertikalhalbstreifen in \mathfrak{H} gegen ∞ strebt. Weil in (2.3) die Integrationsvariable τ auf einer kompakten Menge in \mathfrak{H} variiert und $A \infty$ eine Spitze von $\Gamma'_{A^{-1}} = A\Gamma A^{-1}$ ist, kann (1.15) angewendet werden. Es sei zunächst $A \neq I$. Schreibt man den Vorfaktor auf der rechten Seite von (2.3) in der Gestalt

$$(\alpha_1^{(-1)} A z + \alpha_2^{(-1)})^{2-r} \quad (\underline{A^{-1}} = \{\alpha_1^{(-1)}, \alpha_2^{(-1)}\}),$$

so ergibt sich nach (1.15) sofort

$$(2.6) \quad P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = O(p^{r-1}) \quad (p = \text{Im } z \rightarrow \infty, \text{Re } z \text{ beschränkt});$$

die Konstante in O kann von K, A, s, n und der Schranke von $\text{Re } z$ abhängen.

Im Falle $A = I$ muß z — bei geeigneter Lage der Integrationsstrecke — diese überspringen. Wir wählen in (2.3) $x_0 = \text{Re } \tau_0$ gemäß $x_0 < \text{Re } z < x_0 + N$ und wenden den Residuensatz auf

$$\frac{(z - \bar{s})^r}{N} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa) \frac{\tau}{N}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-2\pi i k \kappa}}{(\tau - \bar{s} + kN)^r (\tau - z + kN)}$$

an; dadurch entsteht der Beitrag $-4\pi i N^{-1} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa) \frac{z}{N}\right)$. Nach (1.15) wird also

$$(2.7) \quad P_{n+\kappa^*}(z, s, I, K) = -\frac{4\pi i}{N} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa) \frac{z}{N}\right) + O(p^{r-1}) \quad (p \rightarrow \infty),$$

wenn $\text{Re } z$ beschränkt bleibt; die Konstante in O kann von K, s, n und der Schranke von $\text{Re } z$ abhängen. Zusammenfassend findet man nach (2.5), (2.6), (2.7)

$$(2.8) \quad (b_1 z + b_2)^{2-r} P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = -\frac{4\pi i}{N^*} \delta_{A, B} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa^*) \frac{Az}{N^*}\right) + O(p^{r-1}),$$

wenn $p_B \rightarrow \infty$ und $\text{Re } Bz$ beschränkt bleibt; die Konstante in O kann von K, A, B, s, n und der Schranke von $\text{Re } Bz$ abhängen.

Eine Aussage über das Verhalten von $P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K)$ bei Anwendung von Transformationen aus Γ ergibt sich unmittelbar aus (1.12) und (2.1): Es gilt

$$(2.9) \quad P_{n+\kappa^*}(Lz, s, A, K) - v^{-1}(L) (\gamma z + \delta)^{2-r} P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = b_{n+\kappa^*}(A, Z(*, z, s, K, L))$$

für beliebige z, s mit $z \neq s$ in \mathfrak{H} und beliebige L in Γ ($n + \kappa^* > 0$).

Schließlich soll noch eine Entwicklung von $P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K)$ nach Potenzen von $w(z, s)$ angegeben werden: Aus der ersten Darstellung (1.7) folgt in der

Bezeichnung (1.8), wenn $|w(z, s)| \leq \varrho_0 < \min_{M \in \Gamma} |w(M\tau, s)|$ für ein festes $\varrho_0 > 0$ zutrifft:

$$(2.10) \quad Q(\tau, z, s, K) = (s - \bar{s})(z - \bar{z})^{-s} \sum_{h=0}^{\infty} \Psi(\tau, s, K, -h) w^{h-1}(z, s);$$

die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmäßig in τ, z absolut, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist. Aus (2.10) folgt sodann die für beliebige $z \neq s$ in \mathfrak{H} gültige Entwicklung

$$(2.11) \quad P_{n+s^*}(z, s, A, K) = (s - \bar{s})(z - \bar{z})^{r-2} \sum_{h=0}^{\infty} b_{n+s^*}(A, \Psi(*, s, K, -h)) w^{h-1}(z, s).$$

Fällt s auf eine Ecke ω^* der Ordnung l^* von Γ , so kann nach [2] (27) in beiden Entwicklungen (2.10), (2.11) die Summationsbedingung $h \equiv -a^* \pmod{l^*}$ hinzugefügt werden, wenn a^* gemäß (1.2) der Ecke ω^* zugeordnet ist.

Die Konstruktion der Grundelemente mit Polen in \mathfrak{H} erfolgt durch den Ansatz

$$(2.12) \quad Q(\tau, z, s, K) = (\tau - \bar{\tau}_0)^{-r} \sum_{v=0}^{\infty} V_v(z, s, \tau_0, K) w^{v-1}(\tau, \tau_0);$$

er definiert V_v (unter der einzigen Bedingung $z \neq s$) als Entwicklungskoeffizienten der automorphen Form Q in der Variablen τ für ein beliebiges Entwicklungszentrum $\tau = \tau_0$ in \mathfrak{H} . Nach (1.5), (1.6) gilt für eine reelle Matrix S der Determinante 1

$$(2.13) \quad V_v(Sz, Ss, S\tau_0, K) = (cz + d)^{2-r}(c\bar{\tau}_0 + d)^{-r} \left(\frac{c\tau_0 + d}{c\bar{\tau}_0 + d} \right)^{r-1} V_v(z, s, \tau_0, K'_S).$$

Aus (2.12) folgt für $v \geq 1$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} V_v(z, s, \tau_0, K) &= \frac{1}{(v-1)!} \frac{\partial^{v-1}}{\partial w^{v-1}} \{ (\tau - \bar{\tau}_0)^r Q(\tau, z, s, K) \}_{\tau=\tau_0} \quad (w = w(\tau, \tau_0)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varrho'} (\tau - \bar{\tau}_0)^r Q(\tau, z, s, K) \frac{dw}{w^v}; \end{aligned}$$

hier ist $\varrho' > 0$ so klein zu wählen, daß kein von $\tau = \tau_0$ verschiedener Pol der Funktion Q im Kreise $|w| < \varrho'$ liegt. Eine zu (2.9) analoge Transformationsgleichung ergibt sich nach (1.12), (2.12) in der Gestalt

$$(2.15) \quad \begin{aligned} V_v(Lz, s, \tau_0, K) - v^{-1}(L)(\gamma z + \delta)^{2-r} V_v(z, s, \tau_0, K) &= \\ &= b_{v-1}(\tau_0, Z(*, z, s, K, L)) \quad (L \in \Gamma). \end{aligned}$$

Wir untersuchen das Verhalten der $V_v(z, s, \tau_0, K)$ ($v \geq 1$) als Funktionen von z ; s und τ_0 werden dabei als feste Werte angesehen. Man entnimmt (1.7) und der Integraldarstellung (2.14) zunächst, daß jedes $V_v(z, s, \tau_0, K)$ eine in der oberen z -Halbebene mit allein möglicher Ausnahme der Punkte $z = s$, $z = L\tau_0$ ($L \in \Gamma$) reguläre analytische Funktion von z darstellt. Ferner folgt aus (1.15) unmittelbar, daß, wenn sich z einer Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von Γ annähert, eine Abschätzung

$$(2.16) \quad V_v(z, s, \tau_0, K) = O(p_A^{r-1}) \quad (p_A = \text{Im } Az \rightarrow \infty, \text{Re } Az \text{ beschränkt})$$

zutrifft; die Konstante in O kann von K, A, s, τ_0, v und der Schranke von $\text{Re } Az$ abhängen.

Etwas schwieriger ist die *Bestimmung des Verhaltens der V_r als Funktionen von z in den zu $z = \tau_0$ nach Γ äquivalenten Punkten der oberen z -Halbebene und im Punkte $z = s$. Es soll erstens gezeigt werden, daß sich die V_r in den Punkten $z = L\tau_0$ ($L \in \Gamma$) meromorph verhalten; in diesen Punkten sind überdies die Hauptteile der V_r explizit anzugeben. Zweitens sollen die Entwicklungen der V_r nach Potenzen von $w(z, s)$, die also für die z in einer Umgebung des Punktes $z = s$ gelten, aufgestellt werden. Die hier genannten Fragen führen, der speziellen Lage der Punkte $L\tau_0$ und s entsprechend, zu den folgenden konkreten Aufgaben:*

α) Es sei $\tau_0 \equiv s \pmod{\Gamma}$. Man bestimme die Entwicklung von $V_r(z, s, \tau_0, K)$ im Punkte $z = s$, d. h. nach Potenzen von $w(z, s)$.

β) Für ein festes L_0 aus Γ sei $L_0\tau_0 \neq s$. Man zeige, daß sich $V_r(z, s, \tau_0, K)$ im Punkte $z = L_0\tau_0$ meromorph verhält und bestimme den Hauptteil dieser Funktion in $z = L_0\tau_0$.

γ) Es sei $\tau_0 \equiv s \pmod{\Gamma}$. Man bestimme die Entwicklung von $V_r(z, s, \tau_0, K)$ im Punkte $z = s$, d. h. nach Potenzen von $w(z, s)$.

Über die Lösungen dieser Aufgaben werde kurz vorausgeschickt: α) läßt sich nach (2.10) unmittelbar erledigen. β) ist mit der in [2], S. 60 behandelten Aufgabe identisch und wird daher nicht eingehend diskutiert; die an der zitierten Stelle übergangenen Rechnungen sind mit den zur Lösung von γ) erforderlichen verwandt. Die Lösung von γ) wird im folgenden ausführlich dargestellt.

Zu α): Aus (2.10) folgt

$$(2.17) \quad V_r(z, s, \tau_0, K) = (s - \bar{s})(z - \bar{s})^{-2} \sum_{h=0}^{\infty} b_{r-1}(\tau_0, \Psi(s, s, K, -h)) w^{h-1}(z, s).$$

Die Potenzreihe konvergiert für $|w(z, s)| < \min_{M \in \Gamma} |w(M\tau_0, s)|$.

Die Aufgaben β) und γ) behandeln wir in dem komplizierteren der möglichen Fälle, in dem z einer Ecke ω der Ordnung l von Γ [vgl. (1.2)] benachbart ist und τ_0 mit der nach Γ zu ω äquivalenten Ecke $\omega_1 = L_0^{-1}\omega$ ($L_0 \in \Gamma$) koinziiert. Mit den Bezeichnungen von [2], S. 60 ist also für β) und γ) gemeinsam

$$(2.18) \quad \begin{aligned} z \sim \omega, t = w(z, \omega); \quad \tau_0 = \omega_1 = L_0^{-1}\omega \quad (L_0 \in \Gamma), \quad w_1 = w(\tau, \omega_1); \\ \varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{l}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma_0 \bar{\omega}_1 + \delta_0}{\gamma_0 \omega_1 + \delta_0}, \quad q_1 = v(L_0) (\gamma_0 \omega_1 + \delta_0)^r. \end{aligned}$$

Zu β): Hier ist $\omega \neq s$, $Q(\tau, z, s, K)$ wird also in $\mathfrak{D}(L_0)$ bis auf eine additive, dort reguläre Funktion durch die rechte Seite von (1.9) dargestellt. Da dies das gleiche Verhalten ausdrückt, wie es die Funktion $H_{-r}(\tau, v, z, A, \Gamma)$ nach [2] (35) aufweist, kann das Ergebnis von [2], S. 60 ungeändert übernommen werden; die in [2] zugrunde liegende Voraussetzung $\sigma_0 > 0$ ist für diese Diskussion bedeutungslos. Das Resultat besagt: Für hinreichend kleine $|t| > 0$ gilt (in einer gegenüber [2] etwas vereinfachten Schreibweise)

$$(2.19) \quad V_r(z, s, \tau_0, K) = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} \left\{ -2l\delta \left(\frac{v-1-a}{l} \right) \bar{q}_1 \eta_1^{r-1} t^{-r} + P(t) \right\},$$

wo $P(t)$ in der genannten t -Umgebung regulär ist.

$\gamma)$ Hier ist $\omega = s$; gesucht wird die vollständige Entwicklung von $V_r(z, \omega, \omega_1, K)$ nach Potenzen von t [vgl. (2.18)]. Wir benutzen die erste Darstellung (1.7) und zerlegen die rechte Seite, indem wir dort von der Summe über M die Glieder mit $M = L_0^{(h)} = E^h L_0$ ($0 \leq h \leq 2l-1$) abspalten. Dies werde durch

$$(2.20) \quad Q(\tau, z, \omega, K) = K(\tau, z) + R(\tau, z), \\ K(\tau, z) = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} t^{-1} \sum_{M=L_0^{(h)}}^{\infty}, \quad R(\tau, z) = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} t^{-1} \sum_{M \neq L_0^{(h)}}^{\infty}$$

angedeutet. Ferner verstehen wir unter $\Phi(\tau, \omega, K, \nu)$ die mit $A = I$, $z = \omega$, $M \neq L_0^{(h)}$ gebildete Summe (1.8). Der Zerlegung (2.20) entspricht eine Zerlegung der V_r in der Gestalt

$$(2.21) \quad V_r(z, \omega, \omega_1, K) = U_r(z) + W_r(z) \quad (\nu \geq 1),$$

die man durch die Entwicklung der Summanden K und R nach Potenzen von w_1 gewinnt. Wir betrachten zunächst den zweiten Summanden $W_r(z)$ und leiten sogleich seine Entwicklung nach Potenzen von t ab.

Bei hinreichend kleinem $|w_1|$ konvergiert die Reihe in

$$R(\tau, z) = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} \sum_{h=0}^{\infty} \Phi(\tau, \omega, K, -h) t^{h-1}$$

für $|t| < \min |w(M\tau, \omega)|$, wenn dieses Minimum für $M \subset \Gamma$, $M \neq L_0^{(h)}$ gebildet wird. Setzt man andererseits

$$R(\tau, z) = (\tau - \bar{\omega}_1)^{-r} \sum_{\nu=1}^{\infty} W_r(z) w_1^{\nu-1},$$

so ergibt sich die Entwicklung von $W_r(z)$ nach Potenzen von t in der Gestalt

$$(2.22) \quad W_r(z) = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} \sum_{h=0}^{\infty} b_{r-1}(\omega_1, \Phi(*, \omega, K, -h)) t^{h-1};$$

diese Reihe konvergiert für $|t| < \min |w(M\omega_1, \omega)|$, das Minimum im obigen Sinne verstanden. Nach (2.21) wird überdies $U_r(z)$ durch

$$(2.23) \quad U_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w_1|=\varrho_1} (\tau - \bar{\omega}_1)^r K(\tau, z) \frac{dw_1}{w_1^r}$$

dargestellt, wo $0 < \varrho_1 = |w_1| < |t| < \varrho'_1$ und ϱ'_1 hinreichend klein zu wählen ist.

Wir beginnen mit der Umformung von

$$K(\tau, z) = \\ = (\omega - \bar{\omega})(z - \bar{\omega})^{r-2} 2t^{-1} \sum_{h=0}^{l-1} \frac{1}{v(L_0^{(h)})(\gamma_0^{(h)}\tau + \delta_0^{(h)r}(L_0^{(h)}\tau - \bar{\omega}))} \frac{w(L_0^{(h)}\tau, \omega)}{w(L_0^{(h)}\tau, \omega) - t}.$$

Es ist

$$w(L_0^{(h)}\tau, \omega) = w(E^h L_0 \tau, E^h \omega) = \varepsilon^h w(L_0 \tau, L_0 \omega) = \eta_1 \varepsilon^h w_1,$$

$$(L_0^{(h)}\tau - \bar{\omega})^r = (L_0^{(h)}\tau - L_0^{(h)}\bar{\omega}_1)^r = \frac{(\tau - \bar{\omega}_1)^r}{(\gamma_0^{(h)}\tau + \delta_0^{(h)r}(\gamma_0^{(h)}\bar{\omega}_1 + \delta_0^{(h)r})^r},$$

also

$$\frac{1}{v(L_0^{(h)})(\gamma_0^{(h)}\tau + \delta_0^{(h)r}(L_0^{(h)}\tau - \bar{\omega}))} = \frac{(\tau - \bar{\omega}_1)^{-r} \bar{v}(L_0^{(h)})(\gamma_0^{(h)}\bar{\omega}_1 + \delta_0^{(h)r})}{v(L_0^{(h)}) \bar{q}_1 \varepsilon^{-ah}};$$

denn man hat nach [2] (26)

$$\varepsilon^{ah} = v(L^h) (e_1^{(h)} L_0 \omega_1 + e_2^{(h)})^r = v(L_0^{(h)}) (\gamma_0^{(h)} \omega_1 + \delta_0^{(h)})^r q_1^{-1}.$$

Zusammenfassend findet man daher

$$\begin{aligned} (\tau - \bar{\omega}_1)^r K(\tau, z) &= (\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} 2t^{-1} \bar{q}_1 \sum_{h=0}^{l-1} \varepsilon^{-ah} \frac{\eta_1 \varepsilon^h w_1}{\eta_1 \varepsilon^h w_1 - t} \\ &= (\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} \left\{ 2l \delta \left(\frac{a}{l} \right) \bar{q}_1 t^{-1} + 2 \bar{q}_1 \sum_{h=0}^{l-1} \frac{\varepsilon^{-ah}}{\eta_1 \varepsilon^h w_1 - t} \right\}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unter dem Integral (2.23) einzutragen. Als Beitrag vom ersten Summanden in der geschweiften Klammer entsteht

$$(\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} 2l \delta \left(\frac{a}{l} \right) \delta_{1,r} \bar{q}_1 t^{-1}.$$

Den Beitrag des zweiten Summanden in der geschweiften Klammer berechnen wir, indem wir den Integrationskreis durch den Kreis $|w_1| = \rho_1'$ ersetzen und dann ρ_1' über alle Grenzen wachsen lassen. Dabei strebt das Integral wegen $r \geq 1$ gegen Null, so daß lediglich die — negativ genommene — Residuensumme übrigbleibt. Man erhält also

$$(2.24) \quad U_r(z) = (\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} \left\{ 2l \delta \left(\frac{a}{l} \right) \delta_{1,r} \bar{q}_1 t^{-1} - 2l \delta \left(\frac{r-1-a}{l} \right) \bar{q}_1 \eta_1^{r-1} t^{-r} \right\};$$

zusammen mit (2.21), (2.22) stellt dies bereits die Entwicklung von V_r nach Potenzen von t dar.

Diese Darstellung läßt sich nun noch erheblich vereinfachen. Nach der obigen Umformung ist

$$\Psi(\tau, \omega, K, -h) = 2l \delta \left(\frac{a+h}{l} \right) (\tau - \bar{\omega}_1)^{-r} \bar{q}_1 \eta_1^{-h} w_1^{-h} + \Phi(\tau, \omega, K, -h);$$

also gilt

$$b_{r-1}(\omega_1, \Psi(*, \omega, K, -h)) = b_{r-1}(\omega_1, \Phi(*, \omega, K, -h)) \quad (h \geq 0, r \geq 1)$$

mit einziger Ausnahme des Falles $h=0, r=1$. In diesem Falle tritt in der letzten Gleichung rechts $2l \delta \left(\frac{a}{l} \right) \delta_{1,r} \bar{q}_1$ hinzu. Berücksichtigt man dieses Phänomen in (2.24), so erhält man die Endformel

$$\begin{aligned} V_r(z, \omega, \omega_1, K) &= -(\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} 2l \delta \left(\frac{r-1-a}{l} \right) \bar{q}_1 \eta_1^{r-1} t^{-r} + \\ (2.25) \quad &+ (\omega - \bar{\omega}) (z - \bar{\omega})^{r-2} \sum_{h=0}^{\infty} b_{r-1}(\omega_1, \Psi(*, \omega, K, -h)) t^{h-1}. \end{aligned}$$

Sie zeigt, daß im Falle γ) der in (2.19) angegebene Hauptteil mit der Entwicklung (2.17) zu vereinigen ist. In der Summe über h kann der Faktor $\delta \left(\frac{h-1-a}{l} \right) \times \delta \left(\frac{a+h}{l} \right)$ hinzugefügt werden.

§ 3. Konstruktion der automorphen Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$.

Wie in [2] § 4 bilden wir, indem wir den Spitzen $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$ ($1 \leq j \leq \sigma_0$; $\sigma_0 \geq 0$), den Ecken ω_k ($1 \leq k \leq e_0$; $e_0 \geq 0$) und irgendwelchen Nichtfixpunkten

$c_r (1 \leq r \leq K; K \geq 0)$ einer rFM \mathfrak{F} von Γ willkürliche Hauptteil-Koeffizienten

$$\begin{aligned} & \lambda_{j, n + \kappa_j} \quad (0 < n + \kappa_j \leq m_0(\zeta_j) + \kappa_j; m_0(\zeta_j) \text{ ganz}, \\ & \quad m_0(\zeta_j) + \kappa_j \geq 0; 1 \leq j \leq \sigma_0) \\ (3.1) \quad & \mu_{k, n} \quad (0 < n \leq m_0(\omega_k), n \equiv a_k + 1 \pmod{l_k}; m_0(\omega_k) \text{ ganz und } \geq 0; \\ & \quad 1 \leq k \leq e_0) \\ & \mu'_{r, n} \quad (0 < n \leq m_0(c_r); m_0(c_r) \text{ ganz und } \geq 0; 1 \leq r \leq K) \end{aligned}$$

zuordnen, die in \mathfrak{H} und in den Spitzen von Γ meromorphe Funktion

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \Lambda(z, s, K; (c), (\lambda), (\mu), (\mu')) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_0} \frac{N_j}{2\pi i} \sum_{0 < n + \kappa_j \leq m_0(\zeta_j) + \kappa_j} \lambda_{j, n + \kappa_j} P_{n + \kappa_j}(z, s, A_j, K) + \\ (3.2) \quad & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{e_0} \frac{1}{l_k(\omega_k - \bar{\omega}_k)} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv a_k + 1 \pmod{l_k}}}^{m_0(\omega_k)} \mu_{k, n} V_n(z, s, \omega_k, K) + \\ & -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^K \frac{1}{c_r - \bar{c}_r} \sum_{n=1}^{m_0(c_r)} \mu'_{r, n} V_n(z, s, c_r, K). \end{aligned}$$

Um das analytische Verhalten der Funktion $\Lambda(z)$ in \mathfrak{F} übersichtlich zu beschreiben, wollen wir, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit erreichbar ist, annehmen, daß jedes c_r , falls $m_0(c_r) > 0$ ist, und daß auch s , falls s nicht Fixpunkt ist, im Innern eines Teilbereichs von \mathfrak{F} enthalten sei. Ist \mathfrak{F} gegeben und werden die Punkte c_r oder s in \mathfrak{F} willkürlich gewählt, so wollen wir überdies stillschweigend unterstellen, daß die soeben genannte Annahme durch eine lokale Änderung von \mathfrak{F} nachträglich erfüllt worden sei. Für die Endergebnisse ist diese Annahme bedeutungslos. Auf die Voraussetzung, daß eine der Spitzen ζ_j im Unendlichen liege, kann von vornherein verzichtet werden. — Unter diesen Bedingungen fassen wir die Symbole \mathfrak{F} , A_j , c_r und die Hauptteil-Koeffizienten (3.1) zu einem einzigen Symbol M zusammen und schreiben demgemäß auch $\Lambda(z) = \Lambda(z, s, K, M)$; M enthält s nicht.

Die folgenden Aussagen beruhen auf den Ergebnissen des vorangehenden § 2.

1. Es bezeichne \mathcal{O} eine offene Menge in \mathfrak{H} mit den Eigenschaften: \mathcal{O} enthält ganz \mathfrak{F} bis auf die Spitzen; die abgeschlossene Hülle von \mathcal{O} enthält keinen derjenigen Punkte, die zu einem der ω_k , c_r nach Γ äquivalent, von ihm aber verschieden sind. Dann gilt: $\Lambda(z)$ ist auf \mathcal{O} überall außerhalb der Punkte $z = \omega_k$, $z = c_r$, $z = s$ regulär.

2. Es strebe z so gegen $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$, daß $p_j = \text{Im } A_j z \rightarrow \infty$, $\text{Re } A_j z$ beschränkt bleibt. Dann gilt

$$(a_{j1}z + a_{j2})^{2-r} \Lambda(z) = \sum_{0 < n + \kappa_j \leq m_0(\zeta_j) + \kappa_j} \lambda_{j, n + \kappa_j} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa_j) \frac{A_j z}{N_j}\right) + O(p_j^{-1}).$$

3. Für $s \neq \omega_k$ gilt in einer Umgebung von $z = \omega_k$ ($1 \leq k \leq e_0$)

$$\Lambda(z) = (z - \overline{\omega}_k)^{r-2} \sum_{n=1}^{m_s(\omega_k)} \mu_{k,n} w^{-n}(z, \omega_k) + (z - \overline{\omega}_k)^{r-2} \mathfrak{P}_k(w(z, \omega_k));$$

$$n = a_k + 1(l_k)$$

für $s \neq c_v$ gilt in einer Umgebung von $z = c_v$ ($1 \leq v \leq K$)

$$\Lambda(z) = (z - \overline{c}_v)^{r-2} \sum_{n=1}^{m_s(c_v)} \mu'_{v,n} w^{-n}(z, c_v) + (z - \overline{c}_v)^{r-2} \mathfrak{P}_v^*(w(z, c_v)).$$

Dabei bezeichnen $\mathfrak{P}_k(t)$, $\mathfrak{P}_v^*(t)$ reguläre Potenzreihen in t .

4a. Wir benutzen weiterhin die in [2] (70) S. 69 eingeführten linearen Operatoren D und deren in [2] (71) S. 70 mit \mathbf{H} bezeichnetes Linearkompositum; da dieses durch die in \mathbf{M} zusammengefaßten Daten und seinen Anwendungsbereich \mathbf{K} eindeutig bestimmt ist, schreiben wir hier genauer $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{M}}$. Wenn nun s von allen ω_k , c_v verschieden ist, besteht in einer Umgebung des Punktes $z = s$ die Entwicklung

$$(z - \bar{s})^{2-r} \Lambda(z) = (s - \bar{s}) \sum_{h=0}^{\infty} (\mathbf{H}_{\mathbf{M}} \Psi(*, s, \mathbf{K}, -h)) w^{h-1}(z, s).$$

4b. Fällt dagegen s etwa auf eine Ecke $\omega = \omega_k$ von \mathfrak{F} , so gilt in einer Umgebung von $z = \omega$

$$(z - \bar{\omega})^{2-r} \Lambda(z) = \sum_{n=1}^{m_s(\omega)} \mu_n w^{-n}(z, \omega) + (\omega - \bar{\omega}) \sum_{h=0}^{\infty} (\mathbf{H}_{\mathbf{M}} \Psi(*, \omega, \mathbf{K}, -h)) w^{h-1}(z, \omega).$$

$$n = a + 1(l)$$

Dabei wurde der dieser Ecke zugeordnete Index k_0 an ω , a , l , μ_n getilgt. Die analoge Entwicklung besteht für $s = c = c_v$ in einer Umgebung von $z = c$; man hat dann ω , a , l , μ_n durch c , 0 , 1 , μ'_n zu ersetzen. —

Nach 4a, b ist der Beitrag des Punktes $z = s$ zu den Polen und Hauptteilen von $\Lambda(z)$ in \mathfrak{F} stets durch

$$(3.3) \quad (z - \bar{s})^{r-2} (s - \bar{s}) (\mathbf{H}_{\mathbf{M}} \Psi(*, s, \mathbf{K}, 0)) w^{-1}(z, s)$$

gegeben. Als Beitrag der Spitzen ζ_j betrachten wir nach 2. sinngemäß den Ausdruck

$$(3.4) \quad (a_{j1}z + a_{j2})^{r-2} \sum_{0 < n + \kappa_j \leq m_s(\zeta_j) + \kappa_j} \lambda_{j,n+\kappa_j} \exp\left(-2\pi i(n + \kappa_j) \frac{A_j z}{N_j}\right).$$

Zu den obigen Aussagen 1.—4. über die Funktion $\Lambda(z)$ treten noch zwei weitere, die sich auf die Eigenschaften dieser Funktion und der automorphen Formen mit gegebenen Polen und Hauptteilen in \mathfrak{F} beziehen:

5. Für jedes L aus Γ gilt mit der durch (1.12) (1.16) erklärten ganzen Spitzenform $\mathbf{Z}(\tau, z, s, \mathbf{K}, L)$ der Klasse \mathbf{K} (in der Variablen τ):

$$\Lambda(Lz) - v^{-1}(L) (\gamma z + \delta)^{2-r} \Lambda(z) = \mathbf{H}_{\mathbf{M}} \mathbf{Z}(*, z, s, \mathbf{K}, L).$$

6. Gesucht wird eine notwendige Bedingung für die Existenz einer automorphen Form $F(z)$ der Klasse $\tilde{\mathbf{K}} = \{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1*. $F(z)$ ist auf \mathfrak{O} überall außerhalb der Punkte $z = \omega_k$, $z = c_v$ regulär (insbesondere also, wenn s von den ω_k und den c_v verschieden ist, auch in $z = s$);

2*. $F(z)$ hat in den Spitzen $z = \zeta_j$ ($1 \leq j \leq \sigma_0$) die Hauptteile (3.4);

3*. $F(z)$ hat in den Punkten $z = \omega_k$, $z = c_v$ diejenigen Hauptteile, welche in den in 3. angegebenen Entwicklungen auf der rechten Seite erscheinen [die also, wenn s auf einen dieser Punkte fällt, nicht den Beitrag (3.3) enthalten].

Diese notwendige Bedingung (in [2] als Hauptteil-Bedingung bezeichnet) sagt aus, daß

(3.5) $\mathbf{H}_M \varphi = 0$ für alle ganzen Spitzenformen φ der Klasse $\mathbf{K} = \{\Gamma, -r, v\}$

zutrifft. Für das einzelne φ bedeutet $\mathbf{H}_M \varphi = 0$ eine lineare Relation vom Charakter vektorieller Orthogonalität zwischen den Hauptteil-Koeffizienten (3.1) (die als Unbekannte aufzufassen sind) und den gemäß (3.1) zu bildenden Entwicklungs-Koeffizienten $b_{n+\kappa_j}(A_j, \varphi)$, $b_{n-1}(\omega_k, \varphi)$, $b_{n-1}(c_v, \varphi)$ (die als Koeffizienten aufzufassen sind). Wegen der Linearität des Operators \mathbf{H}_M besteht die Hauptteil-Bedingung genau dann, wenn $\mathbf{H}_M \varphi_j$ für die Formen einer Basis φ_j der Schar der ganzen Spitzenformen aus \mathbf{K} verschwindet.

Wir formulieren jetzt die Hauptergebnisse der vorliegenden Untersuchung; die Beweise werden wenige Zeilen beanspruchen.

(A) Besteht die Hauptteil-Bedingung für vorgegebene \mathfrak{F} , \mathbf{K} , A_j , c_v und vorgegebene Hauptteil-Koeffizienten (3.1), so existiert genau eine automorphe Form $F(z)$ der Klasse $\hat{\mathbf{K}}$ mit den unter 6. genannten Eigenschaften. Diese Form wird für jedes in \mathfrak{F} und \mathfrak{H} gelegene s durch die zugehörige Funktion $\Lambda(z, s, \mathbf{K}, \mathbf{M})$ explizit dargestellt.

Beweis. Man bilde $\Lambda(z)$ mit irgendeinem s , das in \mathfrak{F} und \mathfrak{H} liegt. Nach (3.5) und 5. gilt

$$\Lambda(Lz) = v^{-1}(L) (\gamma z + \delta)^{2-r} \Lambda(z) \quad (L \in \Gamma),$$

nach 2. und bekannten Schlüssen gestattet daher $\Lambda(z)$ in den Spitzen ζ_j von \mathfrak{F} Fourierentwicklungen in den Variablen $A_j z$ mit den Hauptteilen (3.4), nach (3.5) verschwindet der Hauptteil-Beitrag (3.3) im Punkte $z = s$, und die in 3. angegebenen Entwicklungen haben sowohl die für automorphe Formen aus $\hat{\mathbf{K}}$ typische Gestalt als auch die vorgeschriebenen Hauptteile.—

(B) Man denke sich eine r FM \mathfrak{F} von Γ und für $\sigma_0 > 0$ die die Spitzen ζ_j von \mathfrak{F} darstellenden Matrizen A_j beliebig gemäß $\zeta_j = A_j^{-1} \infty$ gewählt. Dann entspricht jeder nicht identisch verschwindenden Form $F(z)$ der Klasse $\hat{\mathbf{K}}$ eindeutig eine (evtl. leere) Menge von Nichtfixpunkten c_v in \mathfrak{F} und ein möglichst wenige Zahlen umfassendes System von Hauptteil-Koeffizienten (3.1) derart, daß $F(z)$ bezüglich dieser Daten \mathfrak{F} , (A) , (c) , (λ) , (μ) , (μ') die unter 6. genannten Eigenschaften hat. Für das dadurch bestimmte \mathbf{M} und jedes s in \mathfrak{H} und \mathfrak{F} gilt

$$F(z) = \Lambda(z, s, \mathbf{K}, \mathbf{M}).$$

(C) Die Entwicklungskoeffizienten $b_h(s, F)$ ($h \geq 0$) haben die Werte

$$(3.6) \quad b_h(s, F) = (s - \bar{s}) \mathbf{H}_M \Psi(*, s, \mathbf{K}, -h-1) \quad (h \geq 0).$$

Wir fügen noch den Beweis des folgenden Satzes hinzu:

(D) Unter den Funktionen $Z(\tau, z, s, K, L)$, die bei festen s, K für alle $z \in \mathfrak{H}$, $L \subset \Gamma$ gebildet werden, findet sich eine Basis der Schar \mathfrak{E}_K^* der ganzen Spitzenformen aus K .

Beweis. Es bezeichne ϱ den Rang, $\varphi_j(\tau)$ ($1 \leq j \leq \varrho$) eine Basis von \mathfrak{E}_K^* . Man bestimme ein System von Nichtfixpunkten $c_v \neq s$ ($1 \leq v \leq \varrho$) in \mathfrak{H} derart, daß die Determinante $|\varphi_j(c_k)| \neq 0$ ausfällt. Für eine automorphe Form $F(z)$ aus \hat{K} , die auf \mathfrak{H} überall mit allein möglicher Ausnahme der Punkte c_v regulär ist, in diesen höchstens Pole erster Ordnung besitzt und dort im Sinne von 3. die Residuen $\mu'_v = \mu'_{v,1}$ aufweist, ist der Operator H_M durch

$$H_M \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\varrho} \mu'_v (c_v - \bar{c}_v)^{r-1} \varphi(c_v) \quad (\varphi \in K) \quad (3.5)$$

zu bestimmen. Nach (3.5) verschwinden alle μ'_v und daher verschwindet $F(z)$ identisch.

Anderseits werde angenommen, es sei der Rang ϱ' der von den ganzen Spitzenformen $Z(\tau, z, s, K, L)$ (s, K fest, $z \in \mathfrak{H}$, $L \subset \Gamma$) aufgespannten linearen Schar kleiner als ϱ . Man bilde

$$A_0(z) = -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\varrho} \frac{\mu'_v}{c_v - \bar{c}_v} V_1(z, s, c_v, K)$$

und bestimme hier die μ'_v so, daß sie nicht sämtlich verschwinden und die Relation

$$H_M Z(s, z, s, K, L) = 0 \text{ für alle } z \in \mathfrak{H}, L \subset \Gamma$$

erfüllen. Dann folgt aus 5., daß $A_0(z)$ eine automorphe Form der Klasse \hat{K} darstellt, deren Verhalten von dem der obigen hypothetischen Form $F(z)$ höchstens insofern abweicht, als $A_0(z)$ einen weiteren möglichen Pol im Punkte $z = s$ besitzt. Dieser Pol kann aber deshalb nicht auftreten, weil keiner der von s verschiedenen Punkte Ls ($L \subset \Gamma$) ein Pol von $A_0(z)$ ist. $A_0(z) \equiv 0$ bedeutet einen Widerspruch.

Zum Schluß wollen wir für ganzes $r > 2$ die $(r-1)$ -ten Ableitungen der oben verwendeten Konstruktionselemente $P_{n+n^*}(z, s, A, K)$ und $V_n(z, s, \tau_0, K)$ nach z berechnen. Hinsichtlich der Bedeutung dieser Aufgabe vgl. die entsprechenden Abschnitte in [1], 5. und [2], § 5.

Wir benutzen zu diesem Zwecke neben [1] 5c), Hilfssatz 3 die Darstellung [vgl. (1.3)]

$$Q(\tau, z, s, K) = \sum_{M \subset \Gamma} \frac{v(A)}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (M \tau - A \bar{s})^r} (a_1 z + a_2)^{r-2} \left\{ \frac{(Az - A\bar{s})^r}{Az - A\bar{s}} - \frac{(Az - A\bar{s})^r}{Az - M\tau} \right\};$$

Dabei sei, wenn $\sigma_0 > 0$ ist, $A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ , sonst $A = I$. Wir betrachten zunächst den Fall $\sigma_0 > 0$ im Hinblick auf die P_{n+n^*} . Wegen

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} \frac{(z - \bar{s})^r}{z - \tau} = (-1)^{r-1} + \left(\frac{\tau - \bar{s}}{z - \tau} \right)^r$$

und nach [1], 5c) Hilfssatz 3 wird

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} \left\{ (a_1 z + a_2)^{r-2} \left(\frac{(Az - A\bar{s})^r}{Az - As} - \frac{(Az - A\bar{s})^r}{Az - M\tau} \right) \right\} =$$

$$= (a_1 z + a_2)^{-r} \left(\frac{(As - A\bar{s})^r}{Az - As} - \frac{(M\tau - A\bar{s})^r}{Az - M\tau} \right),$$

also

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} Q(\tau, z, s, K) =$$

$$(3.7) \quad = \left(\frac{s - \bar{s}}{z - s} \right)^r \Psi(\tau, s, K, 0) - v(A) (a_1 z + a_2)^{-r} \sum_{M \in A\Gamma} \frac{1}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r (Az - M\tau)^r}.$$

Zur Umformung des zweiten Summanden auf der rechten Seite führe man die Variablen $\tau' = A\tau$, $z' = Az$ ein. Dann erhält man für diesen:

$$(-1)^{r-1} (a_1 \tau + a_2)^{-r} (a_1 z + a_2)^{-r} \sum_{L' \in \Gamma_A} \frac{1}{v^*(L') (\gamma' z' + \delta')^r (\tau' - L' z')^r},$$

wo $v^*(L') = (v'_{A^{-1}}(L'))^{-1} = v^{-1}(L)$ für $L' = ALA^{-1} \in \Gamma_A$. Hier liefert die gleiche Umformung wie in [2] nach (81) durch eine kurze Rechnung

$$(3.8) \quad \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} P_{n+\kappa^*}(z, s, A, K) = (-1)^{r-1} (r-1)! \left(\frac{s - \bar{s}}{z - s} \right)^r b_{n+\kappa^*}(A, \Psi(\cdot, s, K, 0)) +$$

$$+ \frac{(-2\pi i)^r}{N^*} \left(\frac{n + \kappa^*}{N^*} \right)^{r-1} v^{-1}(A) G_{-r}(z, v^{-1}, A, \Gamma, -n - \kappa^*).$$

Im Falle $\sigma_0 \geq 0$ liefert (3.7), gebildet für $A = I$, „fast“ dasselbe Resultat wie [2] (82); genau ergibt sich

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} Q(\tau, z, s, K) = \left(\frac{s - \bar{s}}{z - s} \right)^r \Psi(\tau, s, K, 0) - \Psi(z, \tau, \hat{K}, -r),$$

wo $\hat{K} = \{\Gamma, -r, v^{-1}\}$. Daraus folgt nach den Umformungen in [2] S. 80

$$(3.9) \quad \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} V_n(z, s, \tau_0, K) = (-1)^{r-1} (r-1)! \left(\frac{s - \bar{s}}{z - s} \right)^r b_{n-1}(\tau_0, \Psi(\cdot, s, K, 0)) +$$

$$+ (-1)^r n(n+1) \dots (n+r-2) (\tau_0 - \bar{\tau}_0)^r \Psi(z, \tau_0, \hat{K}, -r-n+1).$$

Diese Formeln (3.8), (3.9) enthalten gegenüber den analogen Formeln [2] (80), (84) auf der rechten Seite im allgemeinen *ein in z nicht-automorphes* (elementares) *Zusatzglied*. Infolgedessen treten im vorliegenden Problembereich kompliziertere Relationen an die Stelle der in [2], Satz 22 genannten Zusammenhänge. Es ist anzunehmen, daß diese Relationen durch eine systematische Theorie der Integralförmeln dem Verständnis zugänglich gemacht werden können.

§ 4. Anhang.

Die Hauptteil-Bedingung für die Multipla eines beliebigen Divisors unter den automorphen Formen einer Klasse komplexer Dimension.

Die folgenden Ausführungen sind ohne Kenntnis des Vorangehenden verständlich. Nur zur Erklärung der Bezeichnungen wird auf den Beginn des § 1 zurückverwiesen.

Wie bisher sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art, \mathfrak{F} eine reguläre Fundamentalmenge (s. Beginn des § 1) von Γ in der oberen τ -Halbebene \mathfrak{H} ; es durchlaufe $\zeta_j = A_j^{-1} \infty$ ($1 \leq j \leq \sigma_0$; $\sigma_0 \geq 0$) die Spitzen, ω_k ($1 \leq k \leq$

$\leq e_0$; $e_0 \geq 0$) die elliptischen Ecken von \mathfrak{F} und, wenn v ein beliebiges Multiplikatorsystem zu Γ und der komplexen Dimension $-r$ bezeichnet, $\kappa_j, \kappa'_j, \kappa_j^+, \kappa_j^+$ die gemäß (1.1), (1.2) für $1 \leq j \leq \sigma_0$ bzw. $1 \leq k \leq e_0$ durch

$$(4.1) \quad v(P_j) = e^{2\pi i \kappa_j}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \kappa_j < 1, \quad \kappa_j^+ = \kappa_j \bmod 1, \quad 0 < \operatorname{Re} \kappa_j^+ \leq 1, \quad \kappa_j' = 1 - \kappa_j^+$$

$$(4.2) \quad v(E_k) = \exp \left(\pi i \frac{r}{l_k} + 2\pi i \frac{a_k}{l_k} \right), \quad a_k \text{ ganz}, \quad 0 \leq a_k \leq l_k - 1, \quad a'_k = l_k - 1 - a_k$$

bestimmten Werte. Wir setzen A_j (ohne Einschränkung) als reelle zweireihige quadratische Matrix der Determinante 1 voraus, schreiben $\{a_{j1}, a_{j2}\}$ für die zweite Zeile von A_j , ferner

$$t_j^\lambda = \exp \left(2\pi i \lambda \frac{A_j \tau}{N_j} \right) \quad (\lambda \text{ komplex}), \quad w(\tau, z) = \frac{\tau - z}{\tau - \bar{z}} \quad (\tau \text{ und } z \text{ in } \mathfrak{H})$$

und denken uns die Werte $(a_{j1}\tau + a_{j2})^r, (\tau - \bar{z})^r$ wie üblich gemäß $-\pi < \arg \leq +\pi$ fixiert.

Wir untersuchen diejenigen automorphen Formen in den Formenklassen

$$K = \{\Gamma, -r, v\}, \quad \hat{K} = \{\Gamma, r-2, v^{-1}\},$$

welche in bestimmter Weise mit dem willkürlich auf \mathfrak{F} vorgegebenen Divisor

$$(4.3) \quad \mathfrak{d} = \prod_{j=1}^{\sigma_0} (\zeta_j)^{\alpha_j} \prod_{k=1}^K (\omega_k)^{\beta_k}$$

verknüpft sind, wobei die ω_k ($e_0 + 1 \leq k \leq K$; $K \geq e_0$) irgendwelche paarweise verschiedenen Nicht-Fixpunkte in \mathfrak{F} , die α_j, β_k irgendwelche ganzen Zahlen bezeichnen. Versteht man unter \mathfrak{a} den Ergänzungsdivisor der Klasse K :

$\mathfrak{a} = \prod (\zeta_j)$, zu erstrecken über die j mit $\operatorname{Re} \kappa_j = 0$, $1 \leq j \leq \sigma_0$, und unter

$\mathfrak{C}^+(\mathfrak{d})$ die lineare Schar der Multipla von $\mathfrak{a} \mathfrak{d}$ unter den Formen von K ,

$\mathfrak{C}'(\mathfrak{d}^{-1})$ die lineare Schar der Multipla von \mathfrak{d}^{-1} unter den Formen von \hat{K} , so gilt der verallgemeinerte Riemann-Rochsche Satz in der Gestalt

$$(4.4) \quad \operatorname{Rg} \mathfrak{C}^+(\mathfrak{d}) = -\operatorname{ord} \mathfrak{d} + R(K) + \operatorname{Rg} \mathfrak{C}'(\mathfrak{d}^{-1}) \quad (\operatorname{Rg} = \operatorname{Rang})$$

mit einer nur von K abhängigen ganzen Zahl $R(K)$.

Wir geben neben \mathfrak{d} ein Polygon g auf \mathfrak{F} durch

$$(4.5) \quad g = \prod_{j=1}^{\sigma_0} (\zeta_j)^{\alpha_j^*} \prod_{k=1}^K (\omega_k)^{\beta_k^*} \quad (\alpha_j^* \text{ und } \beta_k^* \text{ ganz und } \geq 0)$$

vor; bei passender Wahl der Exponenten und der ω_k ($e_0 + 1 \leq k \leq K$) in (4.3), (4.5) können der allgemeinste Divisor \mathfrak{d} und das allgemeinste Polygon g mit ganzen Exponenten auf \mathfrak{F} wie in (4.3), (4.5) dargestellt werden. Im folgenden betrachten wir $K, \mathfrak{F},$ die A_j, \mathfrak{d} und g als fest gegeben.

Für eine automorphe Form $F(\tau)$ der Schar $\mathfrak{C}'(\mathfrak{d}^{-1}g^{-1})$ bestehen in den ζ_j, ω_k Entwicklungen von der Gestalt [vgl. (4.1), (4.2)]:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} (a_1\tau + a_2)^{2-r} F(\tau) &= \sum_{m=\alpha}^{\alpha+\alpha^*-1} b_{-m-\alpha^*}(A, F) t^{-m-\alpha^*} + \sum_{m=-\alpha}^{\infty} b_{m+\alpha^*}(A, F) t^{m+\alpha^*} \\ (\tau - \bar{\omega})^{2-r} F(\tau) &= \sum_{m=\beta}^{\beta+\beta^*-1} b_{-m-\beta-1}(\omega, F) w^{-m-\beta-1} + \sum_{m=-\beta}^{\infty} b_{m+\beta+1}(\omega, F) w^{m+\beta+1}; \end{aligned}$$

hier wurden die Indices j, k getilgt; in der zweiten Zeile ist überdies wie im folgenden stets

$$a = a_k = 0, l = l_k = 1 \text{ für } e_0 + 1 \leq k \leq K$$

zu setzen. Indem wir — zunächst abkürzend —

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \lambda_j(m + \alpha_j^+) &= b_{-m-\alpha_j^+}(A_j, F) \quad (\alpha_j \leq m \leq \alpha_j + \alpha_j^* - 1, 1 \leq j \leq \sigma_0), \\ \mu_k(ml_k + a_k + 1) &= b_{-ml_k - a_k - 1}(\omega_k, F) \quad (\beta_k \leq m \leq \beta_k + \beta_k^* - 1, 1 \leq k \leq K) \end{aligned}$$

schreiben, erhalten wir für die Existenz einer Form F in $\mathfrak{C}'(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{g}^{-1})$ mit den „Hauptteil“-Koeffizienten (4.7) die notwendige (verallgemeinerte Hauptteil-) Bedingung

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\sigma_0} \frac{N_j}{2\pi i} \sum_{m=\alpha_j}^{\alpha_j + \alpha_j^* - 1} \lambda_j(m + \alpha_j^+) b_{m+\alpha_j^+}(A_j, \varphi) + \\ + \sum_{k=1}^K \frac{1}{l_k(\omega_k - \bar{\omega}_k)} \sum_{m=\beta_k}^{\beta_k + \beta_k^* - 1} \mu_k(ml_k + a_k + 1) b_{ml_k + a_k}(\omega_k, \varphi) = 0, \end{aligned}$$

die für alle Formen φ aus $\mathfrak{C}^+(\mathfrak{b})$ zu erfüllen ist. (4.8) folgt aus dem Residuensatz für das abelsche Differential $F\varphi$. Wir beweisen den folgenden Satz:

Notwendig und hinreichend für die Existenz einer automorphen Form F in $\mathfrak{C}'(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{g}^{-1})$ mit dem Hauptteil-Koeffizienten (4.7) ist das Bestehen der Relationen (4.8) für jede Form φ in $\mathfrak{C}^+(\mathfrak{b})$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß das Bestehen der Relationen (4.8) für die Existenz einer Form der genannten Art hinreicht. Wir setzen diese Relationen zunächst nicht als erfüllt voraus, sondern betrachten beliebige Systeme komplexer λ, μ , die gemäß (4.7) auf die dort in Klammern angegebenen Paare j, m und k, m bezogen sind. Da die Aussage des Satzes für $\text{ord } \mathfrak{g} = 0$ inhaltslos ist, sei im folgenden $g = \text{ord } \mathfrak{g} > 0$. Wir denken uns die λ, μ eines solchen Systems irgendwie, etwa lexikographisch so geordnet, daß zunächst die Paare j, m , dann die Paare k, m auftreten, wobei j und k über m dominieren und die kleineren m vorangehen. Den g -dimensionalen Vektor mit diesen Komponenten λ, μ nennen wir τ , die linke Seite der mit den Komponenten von τ und einem $\varphi \in \mathfrak{C}^+(\mathfrak{b})$ gebildeten Gleichung (4.8) nennen wir $\Phi(\tau, \varphi)$.

Es sei ϱ der Rang, φ_j ($1 \leq j \leq \varrho$) eine Basis von $\mathfrak{C}^+(\mathfrak{b})$. Wir bestimmen ϱ paarweise und von den ω_k ($1 \leq k \leq K$) verschiedene Punkte s_h ($1 \leq h \leq \varrho$) in $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ derart, daß die

$$(4.9) \quad \text{Determinante der } \varphi_j(s_h) \neq 0 \quad (j, h = 1, 2, \dots, \varrho)$$

ausfällt und bilden das Polygon

$$m = \prod_{h=1}^{\varrho} (s_h).$$

Aus (4.4) folgt

$$\begin{aligned} \varrho &= -\text{ord } \mathfrak{b} + R(K) + \text{Rg } \mathfrak{C}'(\mathfrak{b}^{-1}), \\ 0 &= \text{Rg } \mathfrak{C}^+(\mathfrak{b}m) = -\text{ord } \mathfrak{b} - \varrho + R(K) + \text{Rg } \mathfrak{C}'(\mathfrak{b}^{-1}m^{-1}), \\ 0 &= \text{Rg } \mathfrak{C}^+(\mathfrak{b}m\mathfrak{g}) = -\text{ord } \mathfrak{b} - \varrho - g + R(K) + \text{Rg } \mathfrak{C}'(\mathfrak{b}^{-1}m^{-1}\mathfrak{g}^{-1}) \end{aligned}$$

und hieraus durch Subtraktion

$$(4.10) \quad \operatorname{Rg} \mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}) = \operatorname{Rg} \mathfrak{C}'(b^{-1}), \quad \operatorname{Rg} \mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1}) = \operatorname{Rg} \mathfrak{C}'(b^{-1}) + g.$$

Wir nennen zwei Formen F_1, F_2 aus $\mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1})$ einander kongruent mod b^{-1} , wenn ihre Differenz in $\mathfrak{C}'(b^{-1})$ enthalten ist. Die dadurch erklärten Restklassen mod b^{-1} gestatten eine lineare Komposition mit komplexen konstanten Koeffizienten und bilden in diesem Sinne einen Vektorraum \mathfrak{V} über dem Körper der komplexen Zahlen, dessen Rang nach der zweiten Relation (4.10) gleich g ist. Bezeichnet $r_0(F)$ für ein F aus $\mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1})$ den mit den Komponenten (4.7) in der genannten Anordnung gebildeten Vektor r , so gilt genau dann $r_0(F_1) = r_0(F_2)$, wenn $F_1 \equiv F_2 \pmod{b^{-1}}$; denn aus $r_0(F_1 - F_2) = 0$ folgt nach der ersten Relation (4.10), daß $F_1 - F_2$ in $\mathfrak{C}'(b^{-1})$ enthalten ist. Daher entspricht jeder Restklasse mod b^{-1} genau ein solcher Vektor $r_0(F)$, der Vektorraum \mathfrak{V} ist zu dem aus den $r_0(F)$ bestehenden linearen Vektorgebilde \mathfrak{Q} isomorph, \mathfrak{Q} hat also den Maximalrang g , es gibt mithin zu einem beliebig vorgeschriebenen g -dimensionalen Vektor r eine (mod b^{-1} eindeutig bestimmte) Form F in $\mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1})$ mit $r_0(F) = r$.

Durch die Hauptteilbedingung (4.8), die für alle φ aus $\mathfrak{C}^+(b)$, d. h. für alle $\varphi = \varphi_j (1 \leq j \leq \varrho)$ zu erfüllen ist, wird ein lineares Teilgebilde \mathfrak{M} in \mathfrak{Q} bestimmt. Die Behauptung besagt offenbar, daß die Vektoren von \mathfrak{M} vermöge des obigen Isomorphismus genau denjenigen Restklassen entsprechen, deren Formen in den Punkten s_h von m regulär sind. Zu beweisen ist lediglich, daß aus der Hauptteilbedingung die genannte Regularität folgt.

Es seien $G_{j,m}, H_{k,m}$ irgendwelche den Einheitsvektoren unter den r zugeordneten Formen aus $\mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1})$. Wegen $b_0(s_h, \varphi) = (s_h - \bar{s}_h)^r \varphi(s_h)$ findet man, indem man (4.8) auf $m g$ anstelle von g anwendet, für jedes φ aus $\mathfrak{C}^+(b)$

$$(4.11) \quad \frac{N_j}{2\pi i} b_{m+\kappa_j^+}(A_j, \varphi) = - \sum_{h=1}^{\varrho} (s_h - \bar{s}_h)^{r-1} \varphi(s_h) b_{-1}(s_h, G_{j,m}),$$

$$\frac{1}{l_k(\omega_k - \bar{\omega}_k)} b_{m l_k + a_k}(\omega_k, \varphi) = - \sum_{h=1}^{\varrho} (s_h - \bar{s}_h)^{r-1} \varphi(s_h) b_{-1}(s_h, H_{k,m});$$

dabei treten die in (4.7) genannten Paare j, m und k, m auf. Multipliziert man für einen vorgegebenen Vektor r einerseits $G_{j,m}$, andererseits die erste Gleichung (4.11) mit $\lambda_j(m + \kappa_j^+)$, ferner einerseits $H_{k,m}$, andererseits die zweite Gleichung (4.11) mit $\mu_k(m l_k + a_k + 1)$ und summiert über die Paare j, m und die Paare k, m wie in (4.8), so erhält man einerseits eine dem Vektor r vermöge $r_0(F) = r$ zugeordnete Form F aus $\mathfrak{C}'(b^{-1}m^{-1}g^{-1})$, andererseits die Gleichung

$$\Phi(r, \varphi) = - \sum_{h=1}^{\varrho} (s_h - \bar{s}_h)^{r-1} \varphi(s_h) b_{-1}(s_h, F).$$

Nun folgt aus $\Phi(r, \varphi_j) = 0$ ($1 \leq j \leq \varrho$) nach (4.9) in der Tat, daß

$$b_{-1}(s_h, F) = 0 \quad (1 \leq h \leq \varrho), \text{ d. h. } F \text{ ein Multiplum von } b^{-1}g^{-1}$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen. Beim Beweise wurde $\varrho \geq 1$ vorausgesetzt, der Extremfall $\varrho = 0$ ist vergleichsweise trivial.

Die nächstliegende Anwendung des Satzes geschieht auf folgende Weise: Man zeichnet einen Punkt τ_0 in \mathfrak{F} aus und betrachtet die Scharen $\mathfrak{E}'(\mathfrak{d}^{-1}(\tau_0)^{-g})$ für beliebige natürliche Zahlen g . Wir legen τ_0 in eine Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von \mathfrak{F} ; die anderen Fälle sind analog zu diskutieren. Man verstehe unter $q(\tau)$ den Funktionenvektor mit den Komponenten $q_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, \varrho$) und schreibe

$$q(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} \sum_{m=\alpha}^{\infty} b(m) t^{m+\kappa^+};$$

untersucht werden diejenigen Formen der Klasse \hat{K} , welche sich auf \mathfrak{F} außerhalb von ζ wie Multipla von \mathfrak{d}^{-1} verhalten. Für eine solche Form $F(\tau)$ mit der Entwicklung [vgl. (4.6)]

$$(4.12) \quad (a_1\tau + a_2)^{2-r} F(\tau) = \sum_{m=\alpha}^{\alpha+g-1} \lambda_m t^{-m-\kappa^+} + \sum_{m=-\alpha}^{\infty} b_{m+\kappa'}(A, F) t^{m+\kappa'}$$

besagt die Hauptteil-Bedingung:

$$\sum_{m=\alpha}^{\alpha+g-1} \lambda_m b(m) = 0.$$

Zur Formulierung der Konsequenzen unseres Satzes verabreden wir die folgende Ausdrucksweise: Wir nennen eine Form F der genannten Art ganz $\text{mod } \mathfrak{d}^{-1}$ bis auf einen (möglichen) Pol auf \mathfrak{F} in $\tau = \zeta$; die erste Summe auf der rechten Seite in (4.12) bezeichnen wir als den Hauptteil von $F \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}$.

Es ergibt sich:

In \hat{K} existiert dann und nur dann eine bis auf den Pol ζ auf $\mathfrak{F} \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}$ ganze Form mit dem Hauptteil $t^{-m-\kappa^+}$ ($m \geq \alpha$) $\text{mod } \mathfrak{d}^{-1}$, wenn $b(m) = 0$ ist.

Es seien m_i ($1 \leq i \leq \mu$) verschiedene ganze Zahlen $\geq \alpha$, und es seien die Vektoren $b(m_i)$ linear unabhängig. Dann existiert in \hat{K} keine bis auf den Pol ζ auf $\mathfrak{F} \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}$ ganze Form mit einem Hauptteil $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_{m_i} t^{-m_i-\kappa^+} \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}$, es sei denn, daß alle λ_{m_i} verschwinden.

Es seien m_i ($1 \leq i \leq \nu$) verschiedene ganze Zahlen $\geq \alpha$, und es mögen die Vektoren $b(m_i)$ ($1 \leq i \leq \mu$; $\mu < \nu$) ein Maximalsystem linear unabhängiger unter den sämtlichen $b(m_i)$ ($1 \leq i \leq \nu$) bilden. Dann existiert in \hat{K} für jedes $j = \mu + 1, \dots, \nu$ eine bis auf den Pol ζ auf $\mathfrak{F} \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}$ ganze Form mit einem Hauptteil

$$\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_{m_i}^{(j)} t^{-m_i-\kappa^+} + t^{-m_j-\kappa^+} \text{ mod } \mathfrak{d}^{-1}.$$

Dieser ist bei gegebenen $K, \mathfrak{F}, \mathfrak{d}, A, m_i$ durch j eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 1. März 1955.)

Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. I.

Von

HELMUT UNKELBACH in Bonn.

	Seite
§ 1. Anschauungsmaterial	393
§ 2. Geometrische Grundbegriffe über Kreisbogenpolygone	398
§ 3. Allgemeine Formeln über die konforme Abbildung	406
§ 4. Konforme Abbildung spezieller Polygone	413

In der Arbeit des Verfassers „Die konforme Abbildung echter Polygone“, Math. Ann. 125, 82—118 (1952) (nachstehend zitiert unter Arbeit [1]), ist der herkömmliche Begriff des einfach zusammenhängenden, geradlinigen Polygons in der Weise verallgemeinert, daß auch unendlich-vielblättrige Polygone \mathfrak{P} zugelassen werden. Daß es sich hierbei um eine wesentliche Verallgemeinerung handelt, ergibt sich aus folgendem Sachverhalt: Wenn eine beliebige (nicht notwendig zusammenhängende) endliche Menge \mathfrak{M} von linearen Randstücken, d. h. von Vollgeraden, Halbgeraden, endlichen Strecken und isolierten Punkten, und wenn außerdem noch eine beliebige Reihenfolge dieser Randstücke vorgegeben ist, dann gibt es „in der Regel“ (mindestens) ein Polygon \mathfrak{P} , das genau von den vorgegebenen Randstücken in der vorgegebenen Reihenfolge berandet wird. Eine „Ecke“ E von \mathfrak{P} besteht aus endlich vielen Punkten, und die Anzahl dieser Punkte heißt die „Ordnung“ von E .

Das Polygon \mathfrak{P} , das in der z -Ebene gelegen sei, heißt „echt“, wenn es den Punkt $z = \infty$ höchstens endlich oft überdeckt. In der Arbeit [1], Satz 3 sind diejenigen Funktionen $z = f(\zeta)$ explizit angegeben, welche die obere ζ -Halbebene konform auf ein echtes \mathfrak{P} abbilden¹⁾. Alle Punkte von E entsprechen dabei einem einzigen Punkt κ der reellen ζ -Achse. Die Ordnung und andere Eigenschaften von E kommen in der Abbildungsfunktion in expliziter Weise zum Ausdruck.

Die Untersuchungen der Arbeit [1] werden im folgenden in naheliegender Weise verallgemeinert, indem statt der geradlinigen Polygone \mathfrak{P} Kreisbogenpolygone \mathfrak{Q} betrachtet werden. Hierbei besteht die Verallgemeinerung nicht nur darin, daß an die Stelle der linearen Randstücke Kreisbogenrandstücke treten können, sondern auch darin, daß außer den schlichten Randstücken

¹⁾ Wenn \mathfrak{P} nur isolierte Randpunkte besitzt, erfolgt die Abbildung auf die punktierte ζ -Ebene.

mehrblättrige und sogar unendlich-vielblättrige Randstücke vorkommen²⁾. Gegenüber den Polygonen \mathfrak{P} treten bei den \mathfrak{Q} die folgenden wesentlich neuen Randstücke auf:

1. Der „*unendliche Kreisbogen*“ (§ 2, Definition Ib), das ist z. B. der über dem Kreis $|z| = 1$ gelegene Teil der Riemannschen Fläche von $\log z$, wobei die Punkte des Kreisbogens den Werten φ in $z = e^{i\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$ umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Es wird sich als zweckmäßig herausstellen, für jeden unendlichen Kreisbogen zwei uneigentliche Endpunkte (Definition VII) zu definieren, welche den Werten $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$ entsprechen.

2. Der „*halbunendliche Kreisbogen*“ (Definition Ic), der aus einem unendlichen Kreisbogen durch einfache Zerschneidung entsteht und der deshalb einen eigentlichen und einen uneigentlichen Endpunkt besitzt.

Als „*Ordnung einer Ecke*“ bezeichnet man nun bei den Polygonen \mathfrak{Q} zweckmäßig die um Eins vermehrte Gesamtzahl der Punkte (der eigentlichen und der uneigentlichen), aus denen eine Ecke besteht³⁾ (Definition XII, XII a, XIII, XIV, XVI). Lediglich für die Ecken 1. Ordnung (die „*glatten*“ Ecken) läßt sich eine Anomalie in der Definition der Ordnung nicht vermeiden, wie aus den folgenden Betrachtungen hervorgehen wird. Die „*Ordnung k eines Polygons \mathfrak{Q}* “ ist der maximale Wert, den die Ordnungen k , der Ecken E , von \mathfrak{Q} annehmen (Definition XVI).

Bezeichnen wir nun mit $z = f(\zeta)$ eine Funktion, welche die obere ζ -Halbebene konform auf \mathfrak{Q} abbildet, dann werden wir beweisen, daß diese Abbildungsfunktion einer Differentialgleichung der folgenden Gestalt genügt:

$$(1) \quad \{z, \zeta\} = \frac{2z'z''' - 3z''^2}{2z'^2} = R(\zeta).^{4)}$$

Dabei ist $R(\zeta)$ stets eine rationale Funktion, deren sämtliche Koeffizienten und Pole reell sind. Ist E , eine Ecke k -ter Ordnung von \mathfrak{Q} , dann ist das Bild κ , von E , ein Pol k -ter Ordnung von $R(\zeta)$. Auch die „*Art*“ l , von E , (Definitionen XVII und XVIIIa) kommt in der Funktion $R(\zeta)$ explizit zum Ausdruck (Hauptsatz 5 und Sätze 5a und 5b)⁵⁾. Die konforme Abbildung der unechten geradlinigen Polygone \mathfrak{P} wird ebenfalls durch Lösungen von (1) gewonnen (§ 4).

²⁾ Bei den Polygonen \mathfrak{P} trifft dies nicht zu. Obgleich diese in ihrem Innern unendlich-vielblättrig sein können, sind doch stets höchstens endlich viele schlichte Randstücke übereinander geschichtet.

³⁾ Faßt man ein Polygon \mathfrak{P} als spezielles Polygon \mathfrak{Q} auf, dann ist die hier definierte Ordnung einer Ecke von der in Arbeit [1] definierten Ordnung verschieden. Beiden Definitionen ist jedoch gemeinsam, daß man eine Ecke E , von der Ordnung k , durch „Zusammenrücken“ von k , Ecken 1. Ordnung gewinnen kann (vgl. Satz 2, S. 404).

⁴⁾ Inzwischen hat auch F. STALLMANN in seiner Arbeit „Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen I“, Math. Z. 60, 187—212 (1954), die Gültigkeit dieser Differentialgleichung für die betreffenden Abbildungsfunktionen ausgesprochen, allerdings ohne Durchführung eines Beweises und ohne auf die Geometrie der verallgemeinerten Kreisbogenpolygone näher einzugehen.

⁵⁾ Dabei erscheint es merkwürdig, daß die gewöhnlichen Ecken 2.O., also gerade diejenigen Ecken, die man als die „normalen“ anzusehen geneigt ist, sowohl in der Geometrie als auch in der konformen Abbildung eine Sonderstellung einnehmen (vgl. Satz 2, S. 404).

Die Frage, wie die Winkeldefinition auf Ecken E , mit $k_v > 2$ (und auf Ecken 2. Art) übertragen werden kann und wie die Winkel in $R(\zeta)$ zum Ausdruck kommen, wird im II. Teil meiner Arbeit behandelt.

§ 1. Anschauungsmaterial.

Eine Geometrie der Polygone Q läßt sich nicht ohne zahlreiche Definitionen aufbauen. Bevor dies in § 2 durchgeführt wird, sollen hier die Definitionen zunächst durch einige konkrete Beispiele anschaulich motiviert werden. Die vollständigen Formulierungen sollen dabei dem § 2 vorbehalten bleiben.

Wir betrachten zunächst ein Dreieck $Q^{(1)}$, dessen Rand von drei unendlichen Kreisbogen gebildet wird^{a)}, die wir die Seiten von $Q^{(1)}$ nennen. Durch eine lineare Transformation läßt sich $Q^{(1)}$ stets in eine solche Lage bringen, daß die drei Seiten über den drei Randkreisen R_1 , R_2 und R_3 eines einfach gelochten konzentrischen Kreisringes $Q^{(10)}$ liegen (Fig. 1a). Dann läßt sich $Q^{(1)}$ folgendermaßen aus schlichten Bausteinen zusammensetzen:

Wir gehen aus von einer Hälfte $Q^{(11)}$ von $Q^{(10)}$, die durch Zerschneiden von $Q^{(10)}$ längs der geradlinigen Schnitte $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$ und $s_3^{(1)}$ entsteht (Fig. 1b). Außerdem betrachten wir unendlich viele Exemplare $Q_v^{(12)}$ des zwischen R_1 und R_2 gelegenen und längs $s_{1,v}^{(2)}$ aufgeschnittenen Kreisringes (Fig. 1c), sowie je unendlich viele Exemplare $Q_v^{(13)}$ und $Q_v^{(14)}$ des gelochten und längs $s_{2,v}^{(3)}$ aufgeschnittenen Äußeren von R_1 und des gelochten und längs $s_{3,v}^{(4)}$ aufgeschnittenen

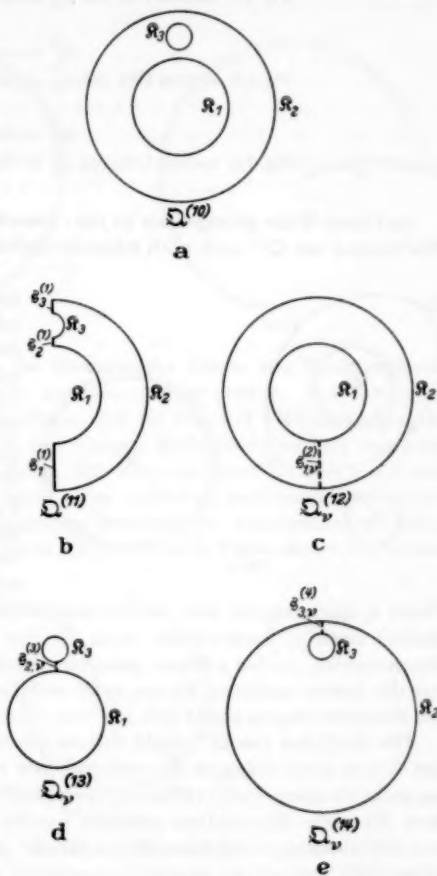


Fig. 1a—1e.

^{a)} In allen Beispielen von § 1 werden die Polygone Q nur von einem Ufer der betreffenden Kreisbogen berandet.

Innern von \mathfrak{R}_2 (Fig. 1 d und 1 e). Dann führen wir die folgenden Heftungen durch:

$s_1^{(1)}$ an linkes Ufer von $s_{11}^{(2)}$
 Fig. 1 c: rechtes Ufer von $s_{11}^{(2)}$ an linkes Ufer von $s_{12}^{(2)}$

$s_2^{(1)}$ an linkes Ufer von $s_{21}^{(3)}$
 Fig. 1 d: rechtes Ufer von $s_{21}^{(3)}$ an linkes Ufer von $s_{22}^{(3)}$

$s_3^{(1)}$ an linkes Ufer von $s_{31}^{(4)}$
 Fig. 1 e: rechtes Ufer von $s_{31}^{(4)}$ an linkes Ufer von $s_{32}^{(4)}$

Auf diese Weise gelangen wir zu dem unendlich-vielblättrigen Dreieck $\mathfrak{Q}^{(1)}$. Wir können uns $\mathfrak{Q}^{(1)}$ auch noch folgendermaßen veranschaulichen:

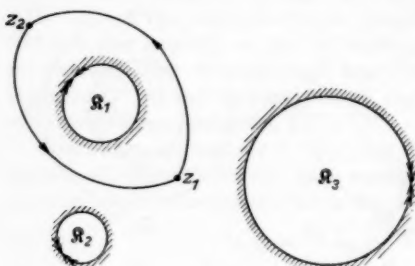


Fig. 2.

Durch eine lineare Transformation können wir $\mathfrak{Q}^{(1)}$ in eine solche Lage bringen, daß sich die Fläche um das Äußere dreier getrennt liegender Kreise unendlich oft herumschlingt (Fig. 2). Für dieses Herumschlingen ist aber folgendes zu beachten: Wenn man von dem entsprechend Fig. 2 „zwischen“ den drei Kreisen gelegenen Punkt z_1 ausgeht, zwischen zwei Kreisen, etwa zwischen \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_3 , bis zum

Punkt z_2 hindurchgeht und anschließend einen dieser Kreise, etwa \mathfrak{R}_1 , umlaufend nach z_1 zurückkehrt, dann ist der dritte Kreis \mathfrak{R}_2 einem zweidimensionalen, in der z -Ebene gelegenen Blickfeld entschwunden, während nur die beiden anderen Kreise noch sichtbar bleiben. Diese Eigenschaft des Herumschlingens ergibt sich aus dem obigen Heftungsprozeß.

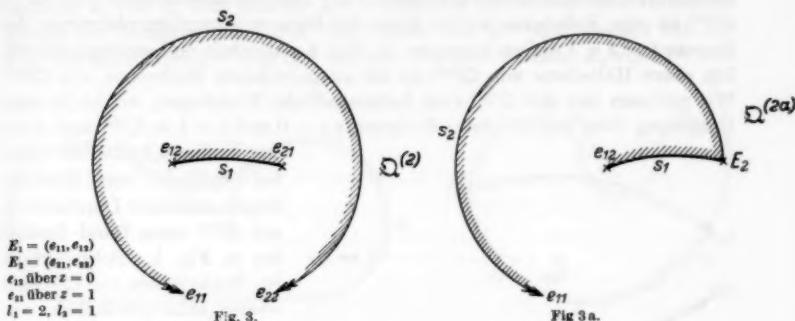
Für die Ecken von $\mathfrak{Q}^{(1)}$ ergibt sich ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Ecken eines Polygons \mathfrak{P} : während jede außergewöhnliche Ecke von \mathfrak{P} aus mehr als einem Punkt (Element) besteht, so daß die Ecken nach der Anzahl ihrer Elemente übersichtlich geordnet werden können, enthalten die Ecken von $\mathfrak{Q}^{(1)}$ überhaupt kein Element, so daß die „Ordnung“ der Ecken zunächst offen bleibt⁷⁾.

Als ein zweites Beispiel wollen wir jetzt ein Zweieck $\mathfrak{Q}^{(2)}$ betrachten, dessen Rand von einem endlichen und einem unendlichen Kreisbogen gebildet wird (Fig. 3)⁸⁾. Dabei gehen wir aus von einem einfach zusammenhängenden

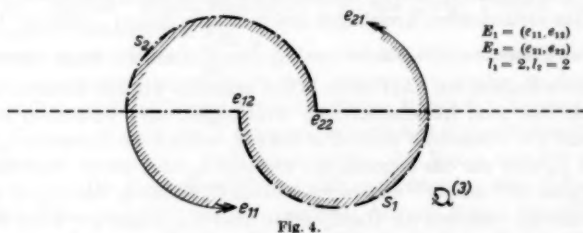
⁷⁾ Von den in der Einleitung erwähnten „uneigentlichen Punkten“ soll zunächst noch abgesehen werden. Die Einführung einer „Ordnung Null“ wäre unzweckmäßig.

⁸⁾ In den Figuren deutet ein Doppelpfeil stets an, daß sich der Kreisbogen in der betreffenden Richtung über unendlich viele Umdrehungen erstreckt. Diejenigen Ufer der Polygonseiten, welche das Polygon beranden, sind schraffiert.

Punktpolygon $\Omega^{(20)}$, welches aus $\Omega^{(1)}$ dadurch entsteht, daß man alle drei Randkreise auf einen Punkt zusammenzieht. Solche Punktpolygone wurden bereits in der Arbeit [1] betrachtet. Es ist hier zweckmäßig, die drei Randpunkte durch eine lineare Transformation über die Punkte $z = 0, 1$ und ∞ zu



legen. Wir können uns dann die Riemannsche Fläche des Punktpolygons aus unendlich vielen Halbebenen zusammengesetzt denken. Von diesen ist eine Halbebene dadurch ausgezeichnet, daß sie alle drei Flächenrandpunkte auf ihrem Rand enthält. Jede der übrigen Halbebenen enthält nur zwei Flächenrandpunkte auf ihrem Rand. Wir verbinden nun die über $z = 0$ und $z = 1$ gelegenen Randpunkte durch einen endlichen, schlichten Kreisbogen, der (abgesehen von seinen Endpunkten) innerhalb der ausgezeichneten Halbebene verläuft. Außerdem zeichnen wir durch einen Punkt dieser Halbebene



einen unendlichen Kreisbogen, der auf $\Omega^{(20)}$ verläuft und den endlichen Kreisbogen nicht trifft. Beide Kreisbogen beranden ein Zweieck $\Omega^{(2)}$, wie es gesucht war.

Beide Ecken von $\Omega^{(2)}$ sind außergewöhnlich, obwohl jede Ecke nur ein Element ($z = 0$ und $z = 1$) enthält. Bei den Polygonen \mathfrak{P} in der Arbeit [1] kommt dieser Sachverhalt nicht vor.

Verschiebt man den unendlichen Kreisbogen nach links, bis er den Punkt $z = 1$ enthält, dann gelangt man zu einem Zweieck $\Omega^{(2a)}$ (Fig. 3a) mit einer gewöhnlichen Ecke im Punkt $z = 1$ und einer außergewöhnlichen Ecke.

Solche Zweiecke benötigen wir in § 2, um ein beliebiges Polygon Ω aus endlich vielen elementaren Bausteinen zusammenzusetzen.

Auf ähnliche Weise läßt sich ein Zweieck $\Omega^{(3)}$ konstruieren, dessen Rand von zwei halbumendlichen Kreisbogen gebildet wird (Fig. 4). Dabei gehen wir aus von einem schlichten Teilgebiet $\Omega^{(30)}$ der Riemannschen Fläche $\Omega^{(20)}$. $\Omega^{(30)}$ ist eine Vollebene, welche längs der linearen Komplementärmenge der Strecke $0 < z < 1$ aufgeschlitzt ist (in Fig. 4 gestrichelt und strichpunktirt). Die obere Halbebene von $\Omega^{(30)}$ sei die ausgezeichnete Halbebene von $\Omega^{(20)}$. Wir zeichnen nun auf $\Omega^{(20)}$ zwei halbumendliche Kreisbogen, welche in einer Umgebung ihrer (eigentlichen) Endpunkte $z = 0$ und $z = 1$ in $\Omega^{(30)}$ und sonst

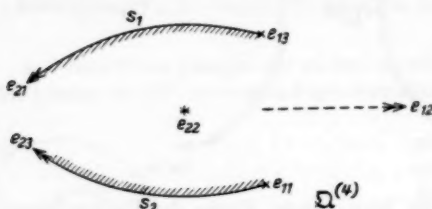


Fig. 5.

e_{22} über $z = 0$ $E_1 = (e_{11}, e_{13}, e_{13})$ $E_2 = (e_{11}, e_{22}, e_{13})$ $l_1 = 1$ $l_2 = 2$

wie in Fig. 4 verlaufen. Hierbei entsteht ein Zweieck, dessen schlichter Durchschnitt mit $\Omega^{(30)}$ einen Rand besitzt, der in Fig. 4 strichpunktirt ist. Beide Ecken von $\Omega^{(3)}$ sind wieder außergewöhnlich, wobei jede Ecke nur ein Element enthält.

Es gibt noch einen anderen Eckentyp mit nur einem (eigentlichen) Element, zu welchem man auf folgendem Wege gelangt: Wir wählen auf einem Blatt der Riemannschen Fläche von $\log z$ zwei Punkte e_{11} und e_{13} , welche voneinander und vom Nullpunkt verschieden sind. Dann zeichnen wir zwei halbumendliche Kreisbogen mit den Endpunkten e_{11} bzw. e_{13} ; die Kreisbogen sollen sich in entgegengesetzten Richtungen um den Punkt $z = 0$ herumschlingen (Fig. 5). Die Punkte e_{11} und e_{13} verbinden wir durch einen schlichten, innerhalb des Blattes verlaufenden Kreisbogen und heften an dessen „äußeres“ Ufer eine Hälfte der Riemannschen Fläche von $\log \frac{z - e_{11}}{z - e_{13}}$, welche längs dieses Kreisbogens zerschnitten ist. Auf diese Weise erhalten wir ein Zweieck $\Omega^{(4)}$, das wiederum von zwei halbumendlichen Kreisbögen, aber außerdem noch von dem Punkt $z = 0$ berandet wird. Die Ecke E_1 enthält die Elemente e_{11} und e_{13} , die Ecke E_2 aber nur das (eigentliche) Element e_{22} über $z = 0$. Von den Ecken der Polygone $\Omega^{(2)}$ und $\Omega^{(3)}$ unterscheidet sich E_2 dadurch, daß e_{22} ein isolierter Randpunkt ist, während die Randpunkte über $z = 0$ und $z = 1$ der Polygone $\Omega^{(2)}$ und $\Omega^{(3)}$ nicht isolierte Randpunkte sind.

Die bisherigen Beispiele zeigen bereits, daß die Anzahl der eigentlichen Eckenelemente als Unterscheidungsmerkmal der Ecken bei den Polygonen Ω weniger leistet als bei den Polygonen \mathfrak{P} . Dieser Sachverhalt wird durch die nachstehenden Untersuchungen noch deutlicher werden. Wir werden infolgedessen zur Definition der „uneigentlichen Eckenelemente“ geführt (Definitionen VII, VIII, IX), die, wie in der Einleitung bereits bemerkt, den Umdrehungswinkeln $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$ von unendlichen und halbumendlichen Kreisbogen entsprechen. Es ist dann noch erforderlich, die uneigentlichen Eckenelemente in gewisser Weise miteinander zu identifizieren

(Definitionen XII und XIIIa); beispielsweise ist in Fig. 2 das uneigentliche Element $\varphi = -\infty$ einer unendlichen Dreiecksseite und das Element $\varphi = +\infty$ der darauffolgenden Seite zu identifizieren. Die Anzahl der Elemente einer Ecke E_r ist dann eindeutig bestimmt (Definitionen XIII und XIV), und die Ordnung k_r von E_r läßt sich für $k_r > 1$ eindeutig als die um Eins vermehrte Anzahl der Elemente definieren. Die Ecken von $\mathcal{Q}^{(1)}$ sind danach von der 2. 0., die Ecken von $\mathcal{Q}^{(2)}$ und $\mathcal{Q}^{(3)}$ von der 3. 0. und die Ecke E_2 von $\mathcal{Q}^{(4)}$ von

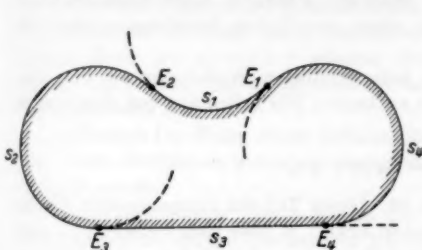


Fig. 6.

$$l_1 = l_2 = 1 \quad l_3 = l_4 = 2$$

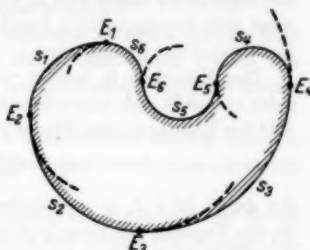


Fig. 7.

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \quad l_1 = l_2 = 2$$

der 4. 0. Auch die Ecke E_1 von $\mathcal{Q}^{(4)}$ ist nach den Definitionen des § 2 von der 4. 0., weil hier ein uneigentliches Eckenelement e_{12} existiert, welches auf einem innerhalb $\mathcal{Q}^{(4)}$ verlaufenden halbumendlichen Kreisbogen erreicht wird⁹⁾. Das uneigentliche Element von E_1 ist ein isolierter Randpunkt von $\mathcal{Q}^{(4)}$, während die uneigentlichen Eckenelemente von E_2 sowie von $\mathcal{Q}^{(2)}$ und $\mathcal{Q}^{(3)}$ nicht isolierte Randpunkte sind (Definitionen XII und XIIIa, Begriff der Konvergenz von Punktfolgen gegen uneigentliche Punkte). Als Ecken 1. 0. werden die „glatten“ Ecken bezeichnet (vgl. das glatte Viereck von Fig. 6 und das glatte Sechseck von Fig. 7).

Da von zwei aufeinanderfolgenden Elementen einer Ecke stets eines eigentlich und eines uneigentlich ist (Satz 1a, § 2), können wir analog zu den echten Polygonen \mathfrak{P} der Arbeit [1] zwei Arten von Ecken E_r mit $k_r > 1$ unterscheiden: Bei den Ecken 1. Art ist das 1. Element eigentlich, bei den Ecken 2. Art ist das 1. Element uneigentlich (Definition XVII). Die Ecken von $\mathcal{Q}^{(1)}$ sind also von der 2. Art. Die Zweiecke $\mathcal{Q}^{(2)}$ und $\mathcal{Q}^{(3)}$ unterscheiden sich dadurch, daß die beiden Ecken von $\mathcal{Q}^{(2)}$ von verschiedener Art, die Ecken von $\mathcal{Q}^{(3)}$ jedoch von derselben Art sind. Bei dem Zweieck $\mathcal{Q}^{(4)}$ ist die Ecke E_1 von der 1. Art, die Ecke E_2 dagegen von der 2. Art. Für die glatten Ecken ist eine besondere Definition der Art erforderlich (Definition XVIIa und Gl. (2), S. 404). Bei dem Viereck in Abb. 6 sind die Ecken E_1 und E_3 von der 1. Art, während die Ecken E_2 und E_4 von der 2. Art sind.

Bei den Polygonen \mathcal{Q} sind auch die Einecke von Interesse, die nach Satz 4 mindestens von der 4. Ordnung sind. Ein Eineck 4. Ordnung $\mathcal{Q}^{(6)}$ ist gewissermaßen das elementarste Polygon \mathcal{Q} , da in diesem Fall die Werte n und Σk_r

⁹⁾ Dieser Kreisbogen kann beispielsweise aus einer Halbgeraden und unendlich vielen daran angereihten Vollgeraden bestehen. Erstere ist in Fig. 5 gestrichelt angedeutet.

ihren kleinsten Betrag annehmen, und dem entspricht es, daß nach Satz 5b eine Lösung von

$$\{z, \zeta\} = \text{Konstante}$$

die konforme Abbildung der oberen ζ -Halbebene auf $\mathcal{Q}^{(0)}$ liefert. Dabei ist die Konstante negativ oder positiv, je nachdem die Art l der Ecke $= 1$ oder $= 2$ ist. Der Unterschied der Art bedeutet hierbei folgendes: für $l = 1$ ist der eigentliche Rand von $\mathcal{Q}^{(0)}$ ein endlicher, schlichter Kreisbogen, für $l = 2$ setzt sich der eigentliche Rand aus einem unendlichen Kreisbogen und einem isolierten Punkt zusammen.

Das Eineck 5. 0. besitzt einen halbumendlichen Kreisbogen als Polygone-seite und läßt sich folgendermaßen aufbauen: Wir gehen aus von demjenigen Teil der Riemannschen Fläche von

$$\log z = \log |z| + \varphi i,$$

der durch $|z| < 1$, $\varphi > 0$ bestimmt ist. Dieser Teil der Riemannschen Fläche ist ein Zweieck mit einer gewöhnlichen Ecke 2. 0. über dem Punkt $z = 1$ und einer Ecke 3. 0. mit dem eigentlichen Element $z = 0$ und dem uneigentlichen Element $\varphi = +\infty$ (spezieller Fall von $\mathcal{Q}^{(2a)}$, Fig. 3a). An das untere Ufer der Seite $0 \leq z \leq 1$ heften wir nun eine Hälfte der Riemannschen Fläche von $\log \frac{z}{z-1}$. Dadurch entsteht ein Eineck 5. 0. mit einer Ecke von der 2. Art.

Die Elemente dieser Ecke sind der Reihe nach die folgenden:

1. Nichtisoliertes uneigentliches Element $\varphi = +\infty$,
2. isoliertes eigentliches Element $z = 0$,
3. isoliertes uneigentliches Element der Hälfte der Riemannschen Fläche

von $\log \frac{z}{z-1}$,

4. nichtisoliertes eigentliches Element $z = 1$.

Die Formel für die konforme Abbildung eines Einecks 5. 0. ergibt sich aus § 4.

Bei einem Eineck 6. 0. ist der Winkel der Ecke von besonderem Interesse. Dieses Beispiel wird im II. Teil meiner Arbeit behandelt.

§ 2. Geometrische Grundbegriffe über Kreisbogenpolygone.

Die Geometrie der geradlinigen Polygone \mathfrak{P} aus Arbeit [1] wird durch die vorliegenden Betrachtungen nicht nur verallgemeinert. Vielmehr ergeben sich verschiedene geometrische Grundbegriffe und Sätze, je nachdem wir ein geradliniges Polygon nach der Geometrie der Arbeit [1] oder als spezielles Kreisbogenpolygon \mathcal{Q} betrachten. Die Ordnung und die Art einer Ecke sind in beiden Fällen verschieden definiert (und für den Winkel können sich in beiden Fällen verschiedene Vorzeichen ergeben)¹⁰⁾.

Die Kreisbogen teilen wir in 3 Klassen ein, die jeweils in den folgenden Definitionen Ia, Ib und Ic definiert sind:

¹⁰⁾ Wenn nachstehend von Kreisen die Rede ist, dann sind stets auch die Geraden miteinbegriffen.

Definition Ia: Unter einem endlichen Kreisbogen verstehen wir eine zusammenhängende, nichtgeschlossene Kurve, welche auf endlich vielen Blättern einer Riemannschen Fläche (der z -Ebene) verläuft, über einem Kreis gelegen ist und keinen Verzweigungspunkt im Innern besitzt.

Die endlichen Kreisbogen besitzen auf der Riemannschen Kugel endliche Länge. Zu den endlichen Kreisbogen gehört auch jede Halbgerade, außerdem jede Vollgerade, sofern sie in einem (doppelt zu zählenden) ihrer Punkte zwei verschiedenen Blättern der Riemannschen Fläche angehört.

Definition Ib: Unter einem unendlichen Kreisbogen verstehen wir die über einem Kreis $|z - z_0| = c > 0$ gelegene Kurve der Riemannschen Fläche von $\log(z - z_1)$, falls $|z_1 - z_0| < c$ ist, sowie die durch lineare Transformationen daraus hervorgehenden Kurven.

Definition Ic: Unter einem halbusendlichen Kreisbogen verstehen wir jede der beiden Hälften, in welche ein unendlicher Kreisbogen durch einen einfachen Schnitt zerfällt.

Diese Definitionen führen uns zu den Kreisbogenrandstücken der Kreisbogenpolygone, welche den linearen Randstücken der Arbeit [1] (dortige Definition I, S. 88) entsprechen:

Definition II: Als ein Kreisbogenrandstück bezeichnen wir jedes der beiden Ufer eines unendlichen Kreisbogens, eines halbusendlichen Kreisbogens, eines endlichen Kreisbogens sowie einen isolierten Punkt, und zwar sprechen wir von unendlichen, halbusendlichen, endlichen und ausgearteten Randstücken¹¹⁾. Ein nicht ausgeartetes Kreisbogenrandstück einer Riemannschen Fläche soll keinen Verzweigungspunkt im Innern besitzen.

Bei der Abzählung der Kreisbogenrandstücke eines einfach zusammenhängenden Gebietes wird im Falle der ausgearteten Randstücke ebenso verfahren wie in der Arbeit [1]. Dagegen kann bei den nicht ausgearteten Randstücken die Vielfachheit natürlich nicht an der Zahl der berandeten Blätter abgelesen werden. Vielmehr werden zwei übereinanderliegende Randstücke dann und nur dann gesondert gezählt, wenn sie auf der Riemannschen Fläche, die sie beranden, entweder nicht zusammenhängen oder nur in einer „Ecke“ (Definition XIV) zusammenhängen. Diese Abzählungsregel legen wir zugrunde bei der folgenden

Definition III: Unter einem Kreisbogenpolygon Ω verstehen wir ein einfach zusammenhängendes (offenes) Gebiet auf einer Riemannschen Fläche, das keinen Verzweigungspunkt im Innern enthält und von endlich vielen Kreisbogenrandstücken begrenzt wird¹²⁾.

Diejenigen Polygone Ω , die nur isolierte Randpunkte besitzen, bezeichnen wir wie in der Arbeit [1] als ausgeartete Polygone oder Punktpolygone.

¹¹⁾ Ein Ufer der linearen Komplementärmenge eines endlichen Intervalls ist im Gegensatz zu Arbeit [1] ebenfalls unter den Randstücken, und zwar den endlichen Kreisbogenrandstücken.

¹²⁾ Nicht jedes geradlinig begrenzte Polygon Ω ist ein Polygon \mathfrak{P} . Zum Beispiel kann Ω im Gegensatz zu \mathfrak{P} u. a. von unendlich vielen aufeinanderfolgenden Vollgeraden begrenzt werden. Andererseits gehörte zu den Polygonen \mathfrak{P} auch der triviale Fall der Halbebene (Eineck 1.0.). Diese gehört jedoch nach Definition Ia nicht zu den Polygonen Ω .

Die Punktpolygone \mathcal{Q} sind stets Punktpolygone \mathfrak{P} . Wie in der Arbeit [1] gilt

Definition IV: Die nicht ausgearteten Randstücke eines Polygons \mathcal{Q} bezeichnen wir als seine Seiten s_i . Entsprechend Definition II unterscheiden wir unendliche, halibunendliche und endliche Polygonseiten. Ein Polygon \mathcal{Q} mit n Seiten bezeichnen wir auch als Kreisbogen- n -Eck.

Die letztere Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß ein Kreisbogen- n -Eck gemäß Definition XIV genau n Ecken besitzt.

Die Definition der Polygonecken setzt zunächst die Definition der beiden Endpunkte einer Polygonseite voraus. Hierbei ist im Falle unendlicher und halibunendlicher Polygonseiten die Einführung uneigentlicher Endpunkte erforderlich, gemäß den beiden folgenden Definitionen:

Definition VII: Ist s_i eine unendliche Seite von \mathcal{Q} , so bezeichnen wir mit u_{i+} bzw. u_{i-} diejenige Umlaufsrichtung von s_i , bei welcher \mathcal{Q} links bzw. rechts liegt. Wir nennen u_{i+} und u_{i-} die uneigentlichen Endpunkte von s_i .

Definition VIII: Ist s_i eine halibunendliche Seite von \mathcal{Q} , so bezeichnen wir diejenige Umlaufsrichtung als „zu s_i gehörig“, welche sich beim Umlauf auf s_i in unendlich vielen Umdrehungen beibehalten läßt. Diese Umlaufsrichtung nennen wir u_{i+} oder u_{i-} , je nachdem \mathcal{Q} links oder rechts liegt, und bezeichnen sie als den uneigentlichen Endpunkt von s_i .

In analoger Weise definieren wir auch uneigentliche Endpunkte von „inneren“ halibunendlichen Kreisbogen $\mathfrak{k}^{(i)}$:

Definition IX: Ist $\mathfrak{k}^{(i)}$ ein halibunendlicher Kreisbogen, der (abgesehen von seinen Endpunkten) ganz innerhalb von \mathcal{Q} verläuft, so bezeichnen wir diejenige Umlaufsrichtung $u^{(i)}$ als „zu $\mathfrak{k}^{(i)}$ gehörig“, welche sich beim Umlauf auf $\mathfrak{k}^{(i)}$ in unendlich vielen Umdrehungen beibehalten läßt. Wir bezeichnen $u^{(i)}$ als den uneigentlichen Endpunkt von $\mathfrak{k}^{(i)}$.

Die Punkte u_{i+} , u_{i-} und $u^{(i)}$ bezeichnen wir sinngemäß als uneigentliche Randpunkte u von $\mathcal{Q}^{(1)}$. Insbesondere sind die Punkte $u^{(i)}$ isolierte Randpunkte, falls sie nicht gemäß Definition XIIa mit einem Seiten-Endpunkt identisch sind.

Wir benötigen nun eine Topologie der uneigentlichen Randpunkte, z. B. zur Beantwortung der Frage, wann eine auf \mathcal{Q} gelegene Punktfolge gegen einen solchen Randpunkt konvergiert. Diese Topologie wird auf den Begriffen des „logarithmischen Streifens“ und des „logarithmischen Halbstreifens“ aufgebaut, gemäß den beiden folgenden Definitionen:

Definition X: Unter einem logarithmischen Streifen verstehen wir ein Kreisbogenpolygon \mathcal{Q} , welches zwei unendliche Seiten s_1 und s_2 und sonst keine weiteren Randpunkte besitzt.

Definition XI: Unter einem logarithmischen Halbstreifen \mathcal{Q} verstehen wir jedes der beiden Teilpolygone, in welche sich ein logarithmischer Streifen durch einen schlichten Kreisbogen-Schnitt von s_1 nach s_2 zerschneiden läßt.

¹³⁾ Nach Einführung der uneigentlichen Punkte ist der Satz nicht mehr richtig, daß 3 Punkte stets genau einen Kreis bestimmen. Dies erscheint durchaus natürlich, wenn man bedenkt, daß nach Einführung des Punktes $z = \infty$ der Satz nicht mehr richtig ist, daß 2 Punkte stets genau eine Gerade bestimmen.

Mit Hilfe dieser Begriffe wird eine sinngemäße Festsetzung ermöglicht, wann uneigentliche Endpunkte u_{v+} und u_{v+1-} zweier aufeinanderfolgender Polygonseiten s_v und s_{v+1} zu identifizieren sind:

Definition XII: Die Endpunkte u_{v+} und u_{v+1-} zweier aufeinanderfolgender Polygonseiten s_v und s_{v+1} werden als identische Randpunkte von Ω angesehen, wenn Ω einen logarithmischen Halbstreifen \mathcal{L} enthält, dessen halbunendliche Seiten bis auf Kreisbogen endlicher Länge mit s_v und s_{v+1} übereinstimmen. \mathcal{L} heißt ein definierender Streifen von $u_{v+} = u_{v+1-}$. Im übrigen werden alle uneigentlichen Endpunkte von Polygonseiten als verschieden voneinander (und verschieden von den eigentlichen Polygonpunkten) angesehen.

Über die Identifizierung von Randpunkten $u^{(i)}$ gilt die folgende

Definition XII a: Zwei Randpunkte $u_1^{(i)}$ und $u_2^{(i)}$ werden dann und nur dann als identisch angesehen, wenn die zugehörigen halbunendlichen Kreisbogen $\mathcal{L}_1^{(i)}$ und $\mathcal{L}_2^{(i)}$ bis auf Kreisbogen endlicher Länge einen logarithmischen Halbstreifen $\mathcal{L}^{(i)}$ beranden, der in Ω gelegen ist. $\mathcal{L}^{(i)}$ heißt ein definierender Streifen von $u_1^{(i)} = u_2^{(i)}$. In analoger Weise wird $u^{(i)}$ mit einem Seiten-Endpunkt u_{v+} oder u_{v-} identifiziert.

Mit Hilfe der definierenden Streifen löst man ohne weiteres die Frage, wann eine Folge von Punkten P_v auf Ω gegen u konvergiert: die Folge konvergiert dann und nur dann gegen u , wenn von einem gewissen v an alle P_v in einem definierenden Streifen \mathcal{L} von u liegen, der von v unabhängig ist, und wenn die Folge keinen eigentlichen Häufungspunkt im Innern oder auf dem Rand von Ω besitzt. Außerdem ist ohne weiteres klar, was es heißt, einen Punkt von Ω durch eine stetige, ganz in Ω verlaufende Kurve mit u zu verbinden.

Die Definition der uneigentlichen Randpunkte ermöglicht nunmehr auch die Definition der Eckenelemente:

Definition XIII: Als Eckenelemente eines Polygons Ω bezeichnen wir die isolierten Randpunkte sowie die beiden Endpunkte jeder Polygonseite.

Bei der Abzählung der Eckenelemente sind die beiden Fälle zu berücksichtigen, in denen Endpunkte von Polygonseiten identifiziert werden:

1. Wenn Endpunkte zweier aufeinanderfolgender Polygonseiten in denselben eigentlichen Punkt der Riemannschen Fläche fallen, der nicht logarithmischer Verzweigungspunkte ist (wie in Arbeit [1]);

2. wenn uneigentliche Endpunkte gemäß Definition XII zu identifizieren sind.

Die Reihenfolge der Eckenelemente e_v ($v = 1, 2, \dots, N$) ergibt sich analog zur Arbeit [1] aus dem einfachen Zusammenhang von Ω . Daran knüpfen wir an bei der folgenden

Definition XIV: Unter einer Ecke E_v eines nicht ausgearteten Kreisbogenpolygons verstehen wir eine Gesamtheit aufeinanderfolgender Eckenelemente, die mit je einem Seitenendpunkt beginnt und abschließt und sonst höchstens noch isolierte Randpunkte aufweist¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Ist $n > 1$, dann beginnt E_v mit einem Endpunkt von s_{v-1} und schließt mit einem Endpunkt von s_v ab.

Darin ist auch der Fall enthalten, daß eine Ecke nur aus einem Element besteht, das Endpunkt zweier Polygonseiten ist.

Definition XV: Eine Ecke heißt gewöhnlich, wenn sie nur aus einem, und zwar einem eigentlichen Eckenelement besteht; andernfalls heißt sie außergewöhnlich. Falls ein Polygon nur gewöhnliche Ecken besitzt, bezeichnen wir es als gewöhnlich, andernfalls als außergewöhnlich.

Man überlegt sich leicht, daß ein Polygon Q dann und nur dann gewöhnlich ist, wenn es endlich-vielblättrig ist. In dieser Hinsicht ist also der Begriff des gewöhnlichen Polygons analog zur Arbeit [1]. Für die gewöhnlichen Ecken E_v ist der Winkel w_v in herkömmlicher Weise definiert ($w_v \geq 0$).

Definition XVI: Ist k_v^* die Anzahl der Elemente einer Ecke E_v , so definieren wir die Ordnung k_v der Ecke folgendermaßen: $k_v = 1$, falls E_v gewöhnlich und $w_v = \pi$. In allen anderen Fällen ist $k_v = k_v^* + 1$. $k = \max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ nennen wir die Ordnung des Polygons Q .

Im Fall $k_v = 1$ sprechen wir auch von glatten Polygonecken. Ein Polygon Q , das nur glatte Ecken besitzt, nennen wir auch ein glattes Polygon.

Gewöhnliche Polygonecken sind nach Definition XVI stets von der 1. oder 2. Ordnung. Jedoch gibt es auch außergewöhnliche Ecken 2. Ordnung, z. B. die Ecken des Dreiecks $Q^{(1)}$, Fig. 1 und 2.

Wir wollen nun analog zur Arbeit [1], S. 89 das Polygon Q aus endlich vielen elementaren Bausteinen zusammensetzen. Dabei ergeben sich mehr Sorten von Bausteinen als bei einem geradlinigen Polygon P , und zwar außer einem gewöhnlichen Kreisbogenpolygon noch die folgenden Sorten:

1. $\mathfrak{H}_v^{(1)}$ ist die Hälfte einer Riemannschen Fläche von $\log \frac{z - e_v}{z - e_{v+1}}$, welche längs der Strecke $\bar{e}_v \bar{e}_{v+1}$ zerschnitten ist. Falls e_{v+1} bzw. e_v unendlich fern ist, so ist $\log \frac{z - e_v}{z - e_{v+1}}$ durch $\log(z - e_v)$ bzw. $\log(z - e_{v+1})$ zu ersetzen, und an die Stelle von $\bar{e}_v \bar{e}_{v+1}$ tritt eine von e_v bzw. e_{v+1} aus auf der Riemannschen Fläche verlaufende Halbgerade h_v .

2. $\mathfrak{H}_v^{(2)}$ ist ein Kreisbogen-Zweieck mit einer gewöhnlichen Ecke und einer Ecke 3. Ordnung, welche aus einem eigentlichen und einem uneigentlichen Element besteht. Ein Beispiel ist das in § 1 besprochene Zweieck $Q^{(2a)}$ (Fig. 3a).

3. $\mathfrak{H}_v^{(3)}$ ist ein logarithmischer Halbstreifen.

Mit Hilfe dieser Bausteine und eines gewöhnlichen Kreisbogen-Polygons können wir Q folgendermaßen aufbauen:

Die eigentlichen Eckenelemente von Q bezeichnen wir in einer gemäß Arbeit [1] definierten Reihenfolge mit e_v^* ($v = 1, 2, \dots, N^*$). Wie in Arbeit [1] verbinden wir einen festen Punkt P im Innern von Q mit jedem e_v^* durch einen zusammenhängenden, geradlinigen Polygonzug \mathfrak{C}_v , so daß jedes \mathfrak{C}_v (abgesehen vom „Endpunkt“ e_v^*) ganz in Q verläuft und kein \mathfrak{C}_v auf der Riemannschen Fläche ein anderes trifft (außer in P). Besitzt die Polygonseite s_v einen uneigentlichen Endpunkt u_{v-} bzw. u_{v+} , dann wählen wir auf ihr einen beliebigen Nicht-Endpunkt S_{v-} bzw. S_{v+} ; sind zwei uneigentliche Endpunkte u_{v-} und u_{v+} vorhanden, dann wählen wir auf s_v zwei Nicht-Endpunkte S_{v-} und S_{v+} , so daß die Reihenfolge besteht: $u_{v-}, S_{v-}, S_{v+}, u_{v+}$. Wir verbinden dann P

mit allen Punkten $S_{\nu-}$ und $S_{\nu+}$ sinngemäß wie oben durch zusammenhängende, geradlinige Polygonzüge \mathfrak{C}'_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, N'$). Für die Polygonzüge \mathfrak{C}_{ν} und \mathfrak{C}'_{ν} führen wir die gemeinsame Bezeichnungswiese \mathfrak{C}''_{ν} ein ($\nu = 1, 2, \dots, N''$) mit $N'' = N' + N'$, wobei die Reihenfolge wieder wie bisher definiert ist. Dann zerlegen die \mathfrak{C}''_{ν} unser Polygon \mathfrak{Q} in N'' Teilpolygone \mathfrak{Q}_{ν} , wobei der Rand von \mathfrak{Q}_{ν} aus \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ und außerdem höchstens noch aus einem Teil des Randes von \mathfrak{Q} besteht. Die \mathfrak{Q}_{ν} zerfallen dann in 4 Klassen, die geometrisch folgendermaßen charakterisiert sind:

I. Die Endpunkte von \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ sind eigentliche Endpunkte derselben Polygonseite s_{μ} oder Punkte $S_{\mu-}$ und $S_{\mu+}$ derselben Polygonseite s_{μ} . Dann ist \mathfrak{Q}_{ν} ein gewöhnliches Kreisbogenpolygon.

II. Die Endpunkte von \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ sind eigentliche Elemente e_{μ}^* und $e_{\mu+1}^*$ derselben Ecke E_{λ} , die nicht über demselben Punkt der z -Ebene gelegen sind. Dann setzt sich \mathfrak{Q}_{ν} zusammen aus einem gewöhnlichen Kreisbogenpolygon und der Hälfte $\mathfrak{H}_v^{(1)}$ einer logarithmischen Riemannschen Fläche. Man erkennt leicht, daß \mathfrak{Q}_{ν} außer e_{μ}^* und $e_{\mu+1}^*$ noch ein isoliertes, uneigentliches Eckenelement von E_{λ} enthält und sonst kein weiteres Eckenelement von \mathfrak{Q} .

III. Die Endpunkte von \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ sind ein isoliertes, eigentliches Element $e_{\mu_1}^*$ der Ecke E_{λ} und ein Punkt S_{μ_2+} oder S_{μ_2-} einer zur Ecke E_{λ} gehörenden Seite s_{μ_2} . Dann setzt sich \mathfrak{Q}_{ν} zusammen aus einem gewöhnlichen Kreisbogenpolygon und einem Kreisbogenzweieck $\mathfrak{H}_v^{(2)}$. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, daß \mathfrak{Q}_{ν} außer $e_{\mu_1}^*$ noch ein uneigentliches, nicht isoliertes Element von E_{ν} (Seitenende von s_{μ_2}) enthält und sonst kein weiteres Eckenelement von \mathfrak{Q} .

IV. Die Endpunkte von \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ sind Punkte S_{μ_1} und S_{μ_1+1-} zweier aufeinanderfolgender Seiten s_{μ_1} und s_{μ_1+1} . Dann setzt sich \mathfrak{Q}_{ν} zusammen aus einem gewöhnlichen Kreisbogenpolygon und einem logarithmischen Halbstreifen $\mathfrak{H}_v^{(3)}$. Man sieht ohne weiteres, daß \mathfrak{Q}_{ν} das uneigentliche Element der Ecke E_{μ_1+1} enthält und sonst kein weiteres Eckenelement von \mathfrak{Q} .

Unter den Fällen I.—IV. fehlt noch der Fall, daß die Endpunkte von \mathfrak{C}''_{ν} und $\mathfrak{C}''_{\nu+1}$ eigentliche Elemente e_{μ}^* und $e_{\mu+1}^*$ derselben Ecke E_{λ} sind, die über demselben Punkt der z -Ebene gelegen sind. Wie in Arbeit [1], S. 90, beweist man, daß dieser Fall nicht vorkommt. Die Fallunterscheidung I.—IV. ist also vollständig.

Beim Aufbau eines Polygons \mathfrak{Q} , gewinnt man in allen vier Fällen ein gewöhnliches Kreisbogenpolygon als Baustein. Im ganzen erhält man also N'' gewöhnliche Kreisbogenpolygone, die zusammengesetzt ein einziges gewöhnliches Kreisbogenpolygon ergeben. Es gilt daher der folgende

Satz 1: Jedes Polygon \mathfrak{Q} läßt sich zusammensetzen aus einem gewöhnlichen Kreisbogenpolygon und aus endlich vielen Polygonen $\mathfrak{H}_v^{(1)}$, $\mathfrak{H}_v^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_v^{(3)}$.

Aus dem Aufbau der Polygone \mathfrak{Q}_{ν} ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 1a: Bei jedem Polygon \mathfrak{Q} ist von zwei aufeinanderfolgenden Elementen einer Ecke stets eines eigentlich und eines uneigentlich¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Vgl. Satz 1 in Arbeit [1], S. 93. Man erkennt an diesem Beispiel besonders deutlich, daß in der Kreisbogenpolygon-Geometrie die uneigentlichen Punkte eine analoge Rolle spielen wie in der Geometrie der echten geradlinigen Polygone diejenigen Punkte, welche über $z = \infty$ gelegen sind.

Nach Satz 1a können, wie in Arbeit [1] bei den echten geradlinigen Polygonen, zwei Arten von Ecken unterschieden werden gemäß der folgenden

Definition XVII: Wir rechnen bei den Polygonen Q eine Ecke E_v mit $k_v \geq 2$ zur ersten Art ($l_v = 1$) oder zweiten Art ($l_v = 2$), je nachdem ihr erstes Element eigentlich oder uneigentlich ist¹⁶⁾.

Für $k_v = 1$ wäre eine solche Unterscheidung gegenstandslos, da es hierbei ein uneigentliches Eckenelement nicht gibt. Jedoch gibt es hierbei eine andere Unterscheidung, bei der die Bezeichnung „1. Art“ und „2. Art“ zweckmäßig ist:

Definition XVIIa: Wir rechnen bei den Polygonen Q eine Ecke E_v mit $k_v = 1$ zur ersten Art ($l_v = 1$) oder zur zweiten Art ($l_v = 2$), je nachdem die Seite s_{v-1} , über E_v hinaus fortgesetzt, in einer Umgebung von E_v innerhalb oder außerhalb von Q verläuft (vgl. Fig. 6 u. 7, wo die betreffenden Fortsetzungen gestrichelt sind).

Zu einer anschaulichen Deutung von l_v für $k_v = 1$ gelangt man auch auf folgende Weise: Wir versehen die Krümmung K_v von s_v mit einem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem Q von dem konkaven oder konvexen Ufer von s_v berandet wird; dann ist

$$(2) \quad (-1)^{l_v} = \frac{K_v - K_{v-1}}{|K_v - K_{v-1}|}.$$

Man erkennt leicht, daß l_v gegenüber linearen Transformationen der z -Ebene invariant ist, obwohl K_v bei solchen Transformationen sein Vorzeichen wechseln kann.

Für manche Zwecke ist oft der nachstehende Spezialfall von (2) nützlich: Ist s_{v-1} geradlinig und E_v glatt, dann ist E_v von der 1. oder 2. Art, je nachdem Q von dem konvexen oder konkaven Ufer von s_v berandet wird¹⁷⁾.

Zwischen den Definitionen XVII und XVIIa besteht ein engerer Zusammenhang, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Dieser Zusammenhang tritt in einem Approximationssatz zu Tage, wonach man ein Polygon Q „in der Regel“ durch eine Folge glatter Teilpolygone \mathfrak{G}_μ von Q approximieren kann. Dabei bestimmt die Art einer Ecke E_v der Ordnung k_v von Q die Arten der k_v glatten Ecken, die bei der Approximation in E_v „zusammenrücken“. Es ist bemerkenswert, daß die gewöhnlichen Ecken 2.0. eine Ausnahme von dieser Regel bilden. Der Approximationssatz besagt folgendes (wobei die auf S. 410 mit Hilfe der konformen Abbildung definierte „ μ -Umgebung“ von E_v benutzt wird):

Satz 2: Ist Q ein Kreisbogenpolygon, bei welchem gewöhnliche Ecken 2.0. nicht vorkommen, dann gibt es eine Folge von glatten Polygonen \mathfrak{G}_μ mit den Ecken $E_{r,\lambda}^{(\mu)}$, $\lambda = 1, 2, \dots, k_v$; $v = 1, 2, \dots, n$ (Reihenfolge $E_{11}^{(\mu)}, \dots, E_{1k_1}^{(\mu)}, \dots, E_{n1}^{(\mu)}, \dots, E_{nk_n}^{(\mu)}$) und den Arten $l_{r,\lambda}^{(\mu)}$ für welche folgendes gilt:

1. $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \mathfrak{G}_3 \subseteq \dots$
2. Q ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2 \dot{+} \mathfrak{G}_3 \dot{+} \dots$
3. $E_{r,\lambda}^{(\mu)}$ liegt in einer μ -Umgebung von E_v .

¹⁶⁾ Vgl. Definition XII in Arbeit [1], S. 93.

¹⁷⁾ Würde man bei Ecken höherer Ordnung l_v auf Grund von (2) definieren, dann wäre l_v gegenüber linearen Transformationen der z -Ebene nicht invariant, und zwar auch nicht bei gewöhnlichen Ecken 2. Ordnung ($w_v \neq \pi$).

4. $l_{r,\lambda}^{(\mu)} - l_r - \lambda \equiv 1 \pmod{2}$.

Besitzt dagegen Ω eine gewöhnliche Ecke 2.0., dann ist

- a) Bedingung 1. und 2. nicht erfüllbar, falls die betreffende Ecke einspringend,
- b) Bedingung 4. nicht erfüllbar, falls die betreffende Ecke ausspringend ist.

Der Beweis der ersten Aussage von Satz 2 (Bedingungen 1.—4.) wird in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Beweis von Hauptsatz 5 geführt.

In der zweiten Aussage ergibt sich a) durch eine elementargeometrische Betrachtung. Eine approximierende Folge \mathfrak{G}_μ greift nämlich in einer Umgebung der betreffenden Ecke notwendig über Ω hinaus, so daß nicht alle \mathfrak{G}_μ Teilgebiete von Ω sein können.

Falls die betreffende Ecke ausspringend ist, beweist man

$$l_{r,\lambda}^{(\mu)} - l_r - \lambda \equiv 0 \pmod{2},$$

woraus b) folgt.

Über die Arten der Ecken glatter Polygone gibt es einige geometrische Sätze, deren Beweise sich z. T. am leichtesten aus den Abbildungsfunktionen ergeben. Dies gilt z. B. für die folgenden Sätze 3 und 3a:

Satz 3: Bei einem glatten n -Eck Ω sind höchstens $n - 2$ Ecken von derselben Art.

Beweis: Daß nicht alle Ecken von derselben Art sein können, ist eine triviale Folgerung aus (2). Daß $n - 1$ Ecken nicht von derselben Art sein können, folgt am einfachsten aus (3a), S. 407.

Satz 3a: Bei einem glatten n -Eck Ω können nicht alle Ecken einer bestimmten Art aufeinanderfolgende Ecken sein. Jedoch gibt es für jedes n solche n -Ecke Ω , bei welchen $n - 3$ Ecken derselben Art aufeinanderfolgen.

Beweis: Die erste Aussage folgt am einfachsten aus (5) S. 407. Der Beweis der zweiten Aussage ergibt sich anhand des in Fig. 7 konstruierten glatten 6-Eckes, welches 3 aufeinanderfolgende Ecken 1. Art besitzt. Man überlegt sich, daß sich auf analoge Weise für beliebiges n ein glattes n -Eck mit $n - 3$ aufeinanderfolgenden Ecken 1. Art konstruieren läßt.

Aus Satz 3 und 3a folgt insbesondere, daß bei einem glatten Viereck 2 aufeinanderfolgende Ecken stets von verschiedener Art sind (Fig. 6).

Für die Summe der Ordnungen der Ecken eines Polygons Ω gilt der folgende

$$\text{Satz 4: } \sum_{r=1}^n k_r \geq 4^{18}.$$

Satz 4 besagt im einzelnen:

1. Die Ecke eines Einecks ist mindestens von der 4. Ordnung.
2. Bei einem Zweieck ist entweder eine Ecke mindestens von der 3. Ordnung (wenn die andere glatt ist) oder beide Ecken sind mindestens von der 2. Ordnung.
3. Bei einem Dreieck ist eine Ecke mindestens von der 2. Ordnung.
4. Bei einem glatten n -Eck ist $n \geq 4$.

¹⁸⁾ Mit Satz 4 hängt der folgende Satz über Zweiecke zusammen: Ist in einem Zweieck die Summe der Ordnungen der Ecken gleich 4, dann sind die Ecken dann und nur dann von verschiedener Art, wenn ihre Ordnungen verschieden ($= 1$ und $= 3$) sind.

Ein geometrischer Beweis von Satz 4 ist hier überflüssig, da dieser unmittelbar aus der Differentialgleichung für die Abbildungsfunktion gefolgt werden kann (s. die Anm. S. 408)¹⁹⁾.

Die Frage der Winkeldefinition für Ecken E_v mit $k_v = 2$, $l_v = 2$ und mit $k_v > 2$ wird im II. Teil meiner Arbeit behandelt.

Schließlich sei noch auf die topologische Frage verwiesen, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu einer vorgegebenen Menge \mathfrak{M} von Kreisbogenrandstücken mit vorgegebener Reihenfolge ein zugehöriges Polygon Q existiert. Die Beantwortung dieser Frage soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Als Beispiele seien hier nur drei notwendige Bedingungen erwähnt:

1. Wenn zwei aufeinanderfolgende unendliche Polygonseiten über zwei sich schneidenden Kreisen liegen, dann muß die von diesen Seiten gebildete Ecke mindestens von der 4. Ordnung sein, d. h. daß zwischen diesen Seiten mindestens ein (eigentlicher) isolierter Randpunkt liegen muß. (Eine analoge Bedingung gilt für die halbbunendlichen Polygonseiten).

2. Wenn ein Polygon Q von der 2. Ordnung lauter unendliche Polygonseiten besitzt, dann müssen diese über mindestens drei getrennten Kreisen liegen, sofern es sich nicht um einen logarithmischen Streifen ($n = 2$) handelt.

Dazu kommt noch wie in Arbeit [1] die Bedingung

3. Zwei aufeinanderfolgende eigentliche Elemente derselben Ecke (d. h. Eckenelemente, zwischen denen sich lediglich ein uneigentliches Element befindet) können nicht über demselben Punkt der Ebene liegen.

Im übrigen scheinen die Bedingungen von der Art zu sein, daß man sagen kann, daß „in der Regel“ zu einem vorgegebenen \mathfrak{M} ein Polygon Q existiert.

§ 3. Allgemeine Formeln über konforme Abbildung.

Wir wollen nun die bekannte SCHWARZsche Differentialgleichung für die Abbildungsfunktion eines gewöhnlichen Kreisbogenpolygons so verallgemeinern, daß sie auch für ein Kreisbogenpolygon Q gilt. Insbesondere wird es sich um das Problem handeln, in welcher Form die Ordnung und die Art einer Ecke in der Differentialgleichung zum Ausdruck kommt. Wir benutzen zur Abkürzung die bekannte Bezeichnungsweise

$$\{z, \zeta\} = \frac{2z'z'' - 3z''^2}{2z'^2}.$$

Dann gilt der folgende

Hauptsatz 5: In der z -Ebene sei ein nicht ausgeartetes Kreisbogenpolygon Q mit n Ecken E_v , $v = 1, 2, \dots, n$ gegeben. E_v habe die Ordnung k_v und die Art l_v . Wir bilden Q auf die obere ζ -Halbebene so ab, daß die Ecken E_v den endlichen Punkten $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ der reellen ζ -Achse entsprechen. Dann genügt die Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ einer Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$(3) \quad \{z, \zeta\} = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{a_{v\mu}}{(\zeta - \alpha_v)^\mu} = F_n(\zeta),$$

¹⁹⁾ Die Ziffern 3. und 4. folgen übrigens unmittelbar aus Satz 3 oder Satz 3a.

wobei alle $a_{v,\mu}$ reell und $a_{v,k_v} \neq 0$ sind. Das Vorzeichen von a_{v,k_v} ist für $k_v \neq 2$ durch l_v und k_v bestimmt, und zwar gilt

$$(4) \quad \begin{cases} a_{v,k_v} = (-1)^{k_v+l_v} |a_{v,k_v}| & \text{für } k_v \neq 2 \\ a_{v,2} - \frac{1}{2} = (-1)^{l_v} |a_{v,2} - \frac{1}{2}| & \text{für } k_v = 2^{20}). \end{cases}$$

Zwischen den Parametern κ_v und $a_{v,\mu}$ der Differentialgleichung (3) bestehen für beliebiges Ω die 3 Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} A_{3,n} &= \sum_{v=1}^n a_{v,1} = 0 \\ A_{2,n} &= \sum_{v=1}^n (a_{v,2} + \kappa_v a_{v,1}) = 0 \\ A_{1,n} &= \sum_{v=1}^n (a_{v,3} + 2\kappa_v a_{v,2} + \kappa_v^2 a_{v,1}) = 0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist $a_{v,\mu} = 0$ zu setzen für $\mu > k_v$.

Für $k_n = \infty$ sind zwei Fallunterscheidungen erforderlich entsprechend dem folgenden

Satz 5a: Wird Ω auf die obere ζ -Halbebene so abgebildet, daß $\kappa_n = \infty$ wird, dann gilt für $k_n < 4$: (mit den Bezeichnungen von Hauptsatz 5):

$$(3a) \quad \begin{cases} \{z, \zeta\} = \sum_{v=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{a_{v,\mu}}{(\zeta - \kappa_v)^\mu} = F_{n-1}(\zeta) \\ A_{k_n, n-1} \neq 0 \\ A_{k_n+1, n-1} = 0 \\ A_{3, n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{für } k_n < 3.$$

Für l_v , $v = 1, 2, \dots, n-1$ gelten die Gleichungen (4). Für l_n gilt

$$(4a) \quad \begin{aligned} A_{k_n, n-1} &= (-1)^{l_n} |A_{k_n, n-1}| \quad \text{für } \begin{cases} k_n = 1 \\ k_n = 3 \end{cases} \\ A_{2, n-1} - \frac{1}{2} &= (-1)^{l_n} |A_{2, n-1} - \frac{1}{2}| \quad \text{für } k_n = 2. \end{aligned}$$

Für $k_n \geq 4$ gilt

$$(3a^*) \quad \{z, \zeta\} = \sum_{v=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{a_{v,\mu}}{(\zeta - \kappa_v)^\mu} + \sum_{\mu=0}^{k_n-4} a_{n,\mu}^* \zeta^\mu.$$

Dabei gilt für l_n die Gleichung

$$(4a^*) \quad a_{n, k_n-4}^* = (-1)^{l_n} |a_{n, k_n-4}^*| \neq 0$$

Aus Satz 5a folgt insbesondere der nachstehende

Satz 5b: Ist Ω ein Einneck und entspricht bei der konformen Abbildung von Ω auf die obere ζ -Halbebene der Ecke E_1 der Punkt $\zeta = \kappa_1 = \infty$, dann gilt

$$(3b) \quad \{z, \zeta\} = \sum_{\mu=0}^{k_1-4} a_{1,\mu}^* \zeta^\mu$$

$$(4b) \quad a_{1, k_1-4}^* = (-1)^{l_1} |a_{1, k_1-4}^*| \neq 0.$$

²⁰⁾ Für $a_{v,1} = \frac{1}{2}$ und $k_v = 2$ ist $l_v = 1$.

Ist $k_1 = 4$, dann gilt insbesondere

$$\{z, \zeta\} = a_{1,0}^*$$

und wenn man

$$a_{1,0}^* = (-1)^{l_1} \cdot \frac{\lambda^2}{2}$$

setzt, dann folgt durch Integration dieser Differentialgleichung:

$$z = \frac{c_1 e^{\lambda \zeta} + c_2}{c_3 e^{\lambda \zeta} + c_4} \quad \text{für } l_1 = 1$$

$$z = \frac{c_1 e^{i\lambda \zeta} + c_2}{c_3 e^{i\lambda \zeta} + c_4} \quad \text{für } l_1 = 2^{21}.$$

Anmerkung: Aus den vorstehenden Sätzen folgt unmittelbar der geometrische Satz 4 (d. h. Ziffer 1. bis 4., S. 405) und die Fußnote.

Für das Eineck setzen wir in (5) $\kappa_1 = 0$. Dann folgt $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Wäre also $k_1 < 4$, d. h. $a_{1,v} = 0$ für alle $v \geq 4$, dann wäre $\{z, \zeta\} = 0$, d. h. die Abbildung eine Kreisverwandtschaft. Also muß $k_1 \geq 4$ sein.

Die Abbildung eines Zweiecks normieren wir durch $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = \infty$. Ist $k_1 = 1$ und $k_2 < 4$, dann gilt gemäß (3a) und (5):

$$(3c) \quad \{z, \zeta\} = \frac{a_{11}}{\zeta}, \quad a_{11} \neq 0$$

$$(4c) \quad A_{31} = a_{11}.$$

Also ist $k_2 = 3$.

Ist $k_1 = 2$ und $k_2 < 3$, dann gilt

$$(3d) \quad \{z, \zeta\} = \frac{a_{11}}{\zeta} + \frac{a_{12}}{\zeta^2}, \quad a_{12} \neq 0$$

$$(4d) \quad \begin{cases} A_{31} = a_{11} = 0 \\ A_{21} = a_{12}. \end{cases}$$

Also ist $k_2 = 2$. Die Ziffern 3) und 4) folgen in bekannter Weise unmittelbar aus der SCHWARZschen Differentialgleichung für die konforme Abbildung eines gewöhnlichen Kreisbogendreiecks²²⁾.

Beweis von Hauptsatz 5: Wir führen den Beweis zunächst für glatte Polygone Ω , d. h., daß alle $k_v = 1$ sind. Durch eine lineare Transformation denken wir uns Ω in eine solche Lage gebracht, daß $E_1 = \infty$ wird und die Seite s_n auf der positiv-reellen z -Halbachse verläuft. Dann verläuft s_1 in der unteren oder oberen z -Halbebene (parallel zur reellen Achse), je nachdem E_1 von der 1. oder 2. Art ist. Eine lokale Uniformisierende der Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ in der Umgebung von $\zeta = \kappa_1$ gewinnen wir in der Umkehrfunktion $w = \tilde{f}_0(z)$ der Funktion $z = f_0(w)$, welche die obere w -Halbebene auf ein gewisses (gewöhnliches, beschränkartiges) geradliniges Dreieck Δ der z -Ebene abbildet; Δ wird begrenzt von zwei Halbgeraden, welche in einer Umgebung

²¹⁾ Vgl. § 1, S. 398, Polygon $\Omega^{(0)}$.

²²⁾ Die Fußnote zu Satz 4 ergibt sich folgendermaßen: Gilt für ein Zweieck $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, dann folgt aus (4), (4a) und (4c) $l_1 \neq l_2$. Ist jedoch $k_1 = k_2 = 2$, dann folgt aus (4), (4a) und (4d) $l_1 = l_2$.

von $z = \infty$ mit s_n und s_1 zusammenfallen, und von einer endlichen, zur imaginären Achse parallelen Polygonseite. Falls man die Ecken $z = \infty$ und die beiden endlichen Ecken von Δ bei der konformen Abbildung der Reihe nach in die Punkte $w = 0, 1, \infty$ überführt, dann ergibt sich

$$(6) \quad \begin{cases} z = f_0(w) = C \cdot \int_{w_0}^w \frac{d\tau}{\tau^2 \sqrt{\tau-1}}, & \text{falls } E_1 \text{ von 1. Art} \\ z = f_0(w) = \int_{w_0}^w \frac{\sqrt{\tau-1}}{\tau^2} d\tau, & \text{falls } E_1 \text{ von 2. Art.} \end{cases}$$

Wir führen außerdem die Bezeichnung ein:

$$(7) \quad w = \tilde{f}_0(f(\zeta)) = g(\zeta).$$

Dann gilt:

$$(8) \quad \{f(\zeta), \zeta\} = [g'(\zeta)]^2 \{f_0(w), w\} + \{g(\zeta), \zeta\}.$$

Dabei sind $g(\zeta)$ und $\{g(\zeta), \zeta\}$ in einer Umgebung von $\zeta = \kappa_1$ reguläre, reelle Funktionen mit $g(\kappa_1) = 0$, $g'(\kappa_1) > 0$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \log f'_0(w) &= -\frac{2}{w} - \frac{1}{2(w-1)}, & \text{falls } E_1 \text{ von 1. Art,} \\ \frac{d}{dw} \log f'_0(w) &= -\frac{2}{w} + \frac{1}{2(w-1)}, & \text{falls } E_1 \text{ von 2. Art,} \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$(9) \quad \begin{cases} \{f_0(w), w\} = \frac{3}{8(w-1)^2} - \frac{1}{w(w-1)}, & \text{falls } E_1 \text{ von 1. Art} \\ \{f_0(w), w\} = -\frac{5}{8(w-1)^2} + \frac{1}{w(w-1)}, & \text{falls } E_1 \text{ von 2. Art.} \end{cases}$$

Setzt man $g(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v (\zeta - \kappa_1)^v$, $b_1 > 0$, dann erhält man aus (8) und (9) in einer Umgebung von $\zeta = \kappa_1$ die Entwicklung

$$(10) \quad \{f(\zeta), \zeta\} = \frac{(-1)^{1+l_1} b_1}{\zeta - \kappa_1} + \sum_{v=0}^{\infty} c_v (\zeta - \kappa_1)^v. \quad (23)$$

Dasselbe gilt natürlich für beliebiges κ_v , $v = 1, 2, \dots, n$. In der Formel (3) ist also

$$(11) \quad a_{v,1} = (-1)^{1+l_v} |a_{v,1}| \quad \text{für } k_v = 1.$$

Damit ist (4) für glatte Polygone Ω bewiesen.

Für Ecken E_1 mit $k_1 = 2$ und $l_1 = 1$ ist in herkömmlicher Weise ein Winkel definiert, welchen wir mit $\alpha_1 \pi$ bezeichnen, wobei $\alpha_1 \geq 0$ ist²⁴⁾. Man beweist dann mit bekannten Methoden²⁵⁾, daß

$$a_{1,2} - \frac{1}{2} = -\frac{\alpha_1^2}{2},$$

woraus (4) für $k_1 = 2$ und $l_1 = 1$ unmittelbar folgt.

²³⁾ Die Bezeichnung c_v wechselt später ihre Bedeutung.

²⁴⁾ Im Gegensatz zur Geometrie der echten geradlinigen Polygone \mathfrak{P} kommen hier negative Winkel nicht vor.

²⁵⁾ Vgl. C. CARATHÉODORY, Funktionentheorie, 2. Bd., S. 116ff.

Für $k_1 = 2$ und $l_1 = 2$ enthält das Polygon Ω in einer gewissen Umgebung von E_1 einen logarithmischen Halbstreifen. Wir denken uns Ω durch eine lineare Transformation in eine Lage gebracht, so daß die beiden zu E_1 gehörenden Polygonseiten s_n bzw. s_1 über den Kreisen $|z| = 1$ bzw. $|z| = r < 1$ liegen. Dann bezeichnen wir mit $w = \bar{f}_0(z)$ diejenige lokale Uniformisierende der Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ für die Ecke E_1 , welche den durch die beiden genannten Kreise definierten logarithmischen Streifen auf die obere w -Halbebene abbildet, und zwar so, daß der uneigentliche Punkt E_1 und die Punkte $z = 1$ und $z = r$ eines bestimmten Blattes des logarithmischen Streifens den Punkten $w = 0, -1, 1$ entsprechen. Dann ist

$$(12) \quad \begin{aligned} z = f_0(w) &= r^{\frac{i}{\pi} \cdot \log w + 1} \\ \{z, w\} &= \frac{1 + \left(\frac{\log r}{\pi}\right)^2}{2w^2}, \end{aligned}$$

und aus (8) und (12) folgt für eine Umgebung von $\zeta = \kappa_1$:

$$\{f(\zeta), \zeta\} = \frac{a_{11}}{(\zeta - \kappa_1)^2} + \frac{a_{11}}{\zeta - \kappa_1} + \sum_{v=0}^{\infty} c_v (\zeta - \kappa_1)^v$$

mit

$$(13) \quad a_{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\log r}{\pi} \right)^2 > 0.$$

Damit ist (4) auch für $k_1 = 2$ und $l_1 = 2$ bewiesen.

Ist $k_1 > 2$, so erkennt man zunächst folgendes: Bei der konformen Abbildung von Ω auf die obere ζ -Halbebene entsprechen alle Elemente von E_1 demselben Punkt κ_1 der reellen Achse. Für die eigentlichen Eckenelemente beweist man dies analog zur Arbeit [1], S. 98; für die uneigentlichen Eckenelemente ist der Beweis geringfügig zu modifizieren, was hier im einzelnen nicht durchgeführt zu werden braucht.

Ist ε_μ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_\mu = 0$, so bezeichnen wir als eine „ μ -Umgebung von E_1 “ das Bild des Halbkreises $|\zeta - \kappa_1| \leq \varepsilon_\mu$, $\Im(\zeta) \geq 0$ in der z -Ebene bei der Abbildung $z = f(\zeta)$. Zu dieser μ -Umgebung gehören insbesondere auch die eigentlichen und uneigentlichen Elemente von E_1 .

Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, daß die Ecken E_2, \dots, E_n von Ω von der 1. Ordnung sind. Wir konstruieren nun eine Folge glatter Teilpolygone \mathfrak{G}_μ von Ω mit $k_1 + n - 1$ Ecken, welche sich, außer in einer μ -Umgebung von E_1 , mit Ω decken und welche gegen Ω konvergieren. Die Seiten von \mathfrak{G}_μ , die sich nicht mit den Seiten von Ω decken, verlaufen innerhalb Ω und werden folgendermaßen konstruiert:

Bezeichnen wir jetzt mit e_v die isolierten, eigentlichen Elemente von $E_1^{(26)}$, dann konstruieren wir zu jedem e_v eine Folge unendlicher Kreisbogen $r_{v,\mu}$, die innerhalb Ω verlaufen und den Mittelpunkt e_v besitzen. Für die Radien $r_{v,\mu}$ gelte

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} r_{v,\mu} = 0, \quad r_{v,\mu+1} < r_{v,\mu}.$$

²⁶⁾ Diese Bezeichnung e_v weicht von der Bezeichnung des § 2 ab.

Bezeichnen wir ferner mit e'_ν die nicht-isolierten, eigentlichen Elemente von E_1 (es sind höchstens zwei), dann konstruieren wir zu jedem e'_ν eine Folge halbunendlicher Kreisbogen $r'_{\nu,\mu}$, die innerhalb Ω verlaufen, und zwar so, daß e'_ν der eigentliche Endpunkt von $r'_{\nu,\mu}$ ist und daß $r'_{\nu,\mu}$ mit der zu e'_ν gehörenden Polygonseite in e'_ν eine glatte Ecke bildet. Für die Radien $r'_{\nu,\mu}$ gelte wieder

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} r'_{\nu,\mu} = 0, \quad r'_{\nu,\mu} + 1 < r'_{\nu,\mu}.$$

Die Größen $r'_{\nu,1}$ sollen außerdem so klein gewählt werden, daß die glatten Ecken in e_1 für alle μ von der 1. Art und die glatten Ecken in e'_2 für alle μ von der 2. Art sind²⁷⁾. (Dabei sei e'_1 stets das erste und e'_2 stets das letzte Element von E_1 , sofern das betreffende Element eigentlich ist.)

Mit \mathfrak{G}_μ^* bezeichnen wir dasjenige Teilpolygon von Ω , welches von den Seiten s_ν und von den $r_{\nu,\mu}$ und $r'_{\nu,\mu}$ begrenzt wird. Die Folge \mathfrak{G}_μ^* konvergiert gegen das Polygon Ω .

\mathfrak{G}_μ^* besitzt in einer μ -Umgebung von E_1 ebenso viele logarithmische Halbstreifen $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$, wie E_1 uneigentliche Elemente besitzt, und diese sind mit den uneigentlichen Elementen der $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$ identisch.

In jedem $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$ konstruieren wir einen schlichten Kreisbogen $r''_{\nu,\mu}$, der die beiden halbunendlichen Seiten von $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$ miteinander verbindet und der $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$ in einen logarithmischen Halbstreifen $\mathfrak{L}'_{\nu,\mu}$ und ein gewöhnliches Kreispolygon $q_{\nu,\mu}$ teilt. Die Endpunkte von $r''_{\nu,\mu}$ bezeichnen wir mit $e_{\nu,\mu}^*$ und $e_{\nu,\mu}^{**}$. Diese Bezeichnung sei so gewählt, daß $q_{\nu,\mu}$ auf der linken Seite liegt, wenn $r''_{\nu,\mu}$ von $e_{\nu,\mu}^*$ nach $e_{\nu,\mu}^{**}$ durchlaufen wird. Bei der Konstruktion der $r''_{\nu,\mu}$ sollen noch die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Endpunkte $e_{\nu,\mu}^*$ und $e_{\nu,\mu}^{**}$ seien glatte Ecken von $q_{\nu,\mu}$, und zwar $e_{\nu,\mu}^*$ von der 2. Art und $e_{\nu,\mu}^{**}$ von der 1. Art. (Daß diese Bedingung erfüllbar ist, kann man sich z. B. dadurch klarmachen, daß man durch eine lineare Transformation von $\mathfrak{L}_{\nu,\mu}$ die halbunendlichen Seiten konzentrisch macht.)

2. Der innerhalb $\mathfrak{L}_{\nu,1}$ verlaufende Teil von $r''_{\nu,\mu}$ konvergiert für $\mu \rightarrow \infty$ monoton gegen den uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{L}_{\nu,1}$.

Aus \mathfrak{G}_μ^* gewinnen wir nunmehr \mathfrak{G}_μ durch Weglassen aller logarithmischen Halbstreifen $\mathfrak{L}'_{\nu,\mu}$. Von dem Polygon \mathfrak{G}_μ decken sich die Ecken $E_2^{(\mu)}, \dots, E_n^{(\mu)}$ mit den Ecken E_2, \dots, E_n von \mathfrak{G} . Außerdem besitzt \mathfrak{G} noch k_1 glatte Ecken $E_{11}^{(\mu)}, \dots, E_{1,k_1}^{(\mu)}$. Die Art von $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ bezeichnen wir mit $l_{1,\lambda}^{(\mu)}$. Dann ergibt sich auf Grund der obigen Konstruktion

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{1,\lambda}^{(\mu)} = 1 \text{ für ungerades } \lambda \\ l_{1,\lambda}^{(\mu)} = 2 \text{ für gerades } \lambda \end{array} \right\} \text{ falls } E_1 \text{ von 1. Art,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{1,\lambda}^{(\mu)} = 2 \text{ für ungerades } \lambda \\ l_{1,\lambda}^{(\mu)} = 1 \text{ für gerades } \lambda \end{array} \right\} \text{ falls } E_1 \text{ von 2. Art.}$$

²⁷⁾ Die e'_ν sind hier ebenso wie die e_ν als endliche Punkte vorausgesetzt, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beschränkt wird.

Die Funktion $z = f_\mu(\zeta)$ möge die obere ζ -Halbebene konform auf \mathfrak{G}_μ abbilden. Hierbei seien die Bilder der Ecken von \mathfrak{G}_μ auf der reellen ζ -Achse

$$\begin{aligned} \kappa_{1,\lambda}^{(\mu)}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k_1 \\ \kappa_v^{(\mu)}, \quad v = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann erfüllt die Abbildungsfunktion eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt

$$(15) \quad \{f_\mu(\zeta), \zeta\} = \sum_{\lambda=1}^{k_1} \frac{a_{1,\lambda}^{(\mu)}}{\zeta - \kappa_{1,\lambda}^{(\mu)}} + \sum_{v=2}^n \frac{a_v^{(\mu)}}{\zeta - \kappa_v^{(\mu)}}.$$

Dabei sind die Größen $a_{1,\lambda}^{(\mu)}$, $a_v^{(\mu)}$ reell und $\neq 0$ und ihre Vorzeichen sind durch (11) und (14) bestimmt.

Wie in Arbeit [1], S. 99 u. 100, beweist man, daß bei geeigneter Normierung der Abbildung folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_{1,\lambda}^{(\mu)} &= \kappa_1, \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_v^{(\mu)} &= \kappa_v. \end{aligned}$$

Führt man also in (15) den Grenzübergang $\mu \rightarrow \infty$ durch, so rücken in der ersten Summe die k_1 -Pole 1. Ordnung $\kappa_{1,\lambda}^{(\mu)}$ in den einen Punkt κ_1 zusammen. Aus (15) ergibt sich durch Grenzübergang $\mu \rightarrow \infty$ analog zur Arbeit [1]:

$$(16) \quad \{f(\zeta), \zeta\} = \sum_{\mu=1}^{k_1} \frac{a_{1,\mu}}{(\zeta - \kappa_1)^\mu} + \sum_{v=2}^n \frac{a_v}{\zeta - \kappa_v},$$

wo die $a_{1,\mu}$, a_v wieder reelle Zahlen sind. Man überlegt sich nun, daß $a_{1,k_1} \neq 0$ ist, d. h. daß der Pol κ_1 wirklich von der k_1 -ten Ordnung ist. Denn wäre das nicht der Fall, dann ließe sich der Pol κ_1 bereits durch Zusammenrücken von $k_1 - 1$ -Polen 1.0. längs der reellen Achse gewinnen, d. h. \mathfrak{Q} ließe sich bereits durch ein glattes $(k_1 + n - 2)$ -Eck approximieren. Man erkennt aber leicht, daß dies nicht möglich ist: Für die Approximation jedes uneigentlichen Elementes von E_1 benötigt man nämlich eine besondere Folge von Polygonseiten, wie sie oben unter der Bezeichnung $r''_{v,\mu}$ konstruiert worden sind. Ist μ hinreichend groß, dann können $r''_{v,\mu}$ und $r''_{v+1,\mu}$ im Rahmen eines glatten Polygons nur durch einen Kreisbogen miteinander verbunden werden, der nicht den Kreisen von $r''_{v,\mu}$ oder $r''_{v+1,\mu}$ angehört. Dasselbe würde zutreffen, wenn man die uneigentlichen Eckenelemente in anderer Weise durch Kreisbogen approximieren würde; denn man gelangt aus der „Nähe“ eines uneigentlichen Eckenelementes in die „Nähe“ eines anderen nur durch mehrfachen Umlauf um eine logarithmische Verzweigung. Bei der Approximation von E_1 kommt man deshalb nicht mit weniger Polygonseiten und weniger glatten Ecken aus, als oben benötigt wurden. Also ist $a_{1,k_1} \neq 0$.

Bei der Berechnung von a_{1,k_1} beachte man, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\kappa_{11}^{(\mu)} = 0$ und $\kappa_1 = 0$ setzen darf, wobei alle übrigen κ der Formeln (15) und (16) positiv werden. Man findet dann

$$a_{1,k_1} = (-1)^{k_1-1} \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{11}^{(\mu)} \cdot \prod_{\lambda=2}^{k_1} \kappa_{1,\lambda}^{(\mu)}.$$

Und aus (11) und (14) folgt

$$(17) \quad \frac{a_{1,k_1}}{|a_{1,k_1}|} = (-1)^{k_1 + l_1}.$$

Damit sind die Gleichungen (4) vollständig bewiesen und die Entwicklung der rechten Seite von (3) ist zunächst in einer Umgebung von $\zeta = \kappa_1$ hergeleitet. Dasselbe denken wir uns für jedes κ_r durchgeführt. Man sieht dann in bekannter Weise, daß außer den Gliedern der Doppelsumme auf der rechten Seite von (3) keine weiteren Glieder vorkommen, womit (3) und (4) bewiesen sind.

Zum Beweis von (5) bilden wir durch $\zeta = -1/\tau$ die obere ζ -Halbebene auf die obere τ -Halbebene ab und beachten, daß

$$\{z, \tau\} = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \tau^r$$

$$F_n(\zeta) = \{z, \zeta\} = \tau^4 \cdot \{z, \tau\} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{c_r}{\zeta^{r+4}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta F_n(\zeta) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^2 F_n(\zeta) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^3 F_n(\zeta) = 0.$$

Andererseits errechnet man:

$$A_{3,n} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \cdot F_n(\zeta),$$

$$A_{2,n} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^2 \cdot F_n(\zeta), \text{ falls } A_{3,n} = 0,$$

$$A_{1,n} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^3 F_n(\zeta), \text{ falls } A_{3,n} = A_{2,n} = 0.$$

Damit ist Hauptsatz 5 vollständig bewiesen.

Satz 5a ergibt sich als Folgerung aus Hauptsatz 5, indem man durch die Transformation

$$\tau = \frac{1}{\kappa_n - \zeta}$$

zur oberen τ -Halbebene übergeht. Dann gilt

$$\{z, \tau\} = (\zeta - \kappa_n)^4 \cdot \{z, \zeta\}.$$

Daraus ergeben sich alle Aussagen von Satz 5a, von welchem Satz 5b einen Spezialfall behandelt.

Aus der Konstruktion der Polygonfolge \mathfrak{G}_n und aus (14) folgt die erste Aussage von Satz 2.

§ 4. Konforme Abbildung spezieller Polygone.

Wir betrachten zunächst den speziellen Fall, daß die Kreise aller Seiten von \mathfrak{Q} einen Punkt P gemeinsam haben und daß nur endliche Seiten vorkommen. Transformiert man durch eine lineare Transformation den Punkt P in den Punkt $z = \infty$, dann wird aus \mathfrak{Q} ein geradliniges Polygon \mathfrak{P} im Sinne

der Arbeit [1], das im allgemeinen unecht ist²⁸⁾. Die konforme Abbildung erfolgt entsprechend Hauptsatz 5 und Satz 5a und 5b. Abgesehen von dem Fall $k_v = 1$ kommen hierbei nur gerade k_v vor und $\frac{k_v}{2}$ ist gleich der in Arbeit [1] für \mathfrak{P} definierten Ordnung von E_v . Für die Koeffizienten a_{v, k_v} gilt:

$$\begin{aligned} a_{v, k_v} &\leq \frac{1}{2} \text{ für } k_v = 2, \\ a_{v, k_v} &< 0 \text{ für } k_v = 4, 6, 8, \dots \end{aligned}$$

Als weiteren Spezialfall betrachten wir noch ein Zweieck mit $k_1 = 3$, $l_1 = 2$, $k_2 \leq 3$ (Fig. 3 u. 4). Setzen wir $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \infty$, dann gilt

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_{11}}{\zeta} + \frac{a_{12}}{\zeta^2} + \frac{a_{13}}{\zeta^3}, \quad a_{13} < 0.$$

Ist $k_2 = 3$, dann folgt aus (5) und (4a)

$$a_{11} < 0 \text{ für } l_2 = 1 \text{ (Fig. 3),}$$

$$a_{11} > 0 \text{ für } l_2 = 2 \text{ (Fig. 4).}$$

Ist $k_2 = 2$, dann ist $a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$ und

$$a_{12} \leq \frac{1}{2} \text{ für } l_2 = 1 \text{ (Fig. 3a),}$$

$$a_{12} > \frac{1}{2} \text{ für } l_2 = 2.$$

Für $l_2 = 1$ ist für die Ecke E_2 in herkömmlicher Weise ein Winkel $\alpha_2 \pi \geq 0$ definiert und es gilt

$$a_{12} = \frac{1 - \alpha_2^2}{2}.$$

Insbesondere ist $a_{12} = \frac{1}{2}$ für eine nullwinklige Ecke E_2 . Für $k_2 = 1$ ist $a_{11} = a_{12} = 0$ und E_2 ist nach der Fußnote zu Satz 4 notwendig von der 1. Art²⁹⁾.

Wir betrachten schließlich noch ein Eineck mit $k_1 = 5$, $l_1 = 2$ (vgl. § 1, S. 398). Setzen wir $\kappa_1 = 0$, dann folgt aus (4)

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$$

und man erhält also die Differentialgleichung

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_{14}}{\zeta^4} + \frac{a_{15}}{\zeta^5}, \quad a_{15} < 0.$$

(Eingegangen am 23. September 1954.)

²⁸⁾ \mathfrak{P} ist nur echt, wenn für jede Ecke von \mathcal{Q} von zwei aufeinanderfolgenden eigentlichen Eckenelementen stets eines über P gelegen ist. Nur für diesen Fall gelten die Abbildungsformeln der Arbeit [1].

²⁹⁾ Die konforme Abbildung von Polygonen \mathcal{Q} mit Ecken 4. Ordnung (Fig. 5) soll dem II. Teil meiner Arbeit vorbehalten bleiben, da hierbei die verallgemeinerte Winkeldefinition eine Rolle spielt.

Über die Methode der a priori-Schranken.

Von

HELMUT SCHAEFER in Leipzig.

1. E bezeichne einen linearen, lokalkonvexen vollständigen Hausdorffraum¹⁾. Wenn M eine konvexe, bikompakte²⁾ Menge in E , φ eine stetige Abbildung von M in sich bedeutet, so gibt es nach einem Satz von TYCHONOFF³⁾ einen Fixpunkt $X_0 \in M: X_0 = \varphi(X_0)$. Es sei nun ψ eine vollstetige⁴⁾ (nicht notwendig lineare) Abbildung von E in sich; dann besitzt die Gleichung in E (λ ein reeller Parameter)

$$(1) \quad X = \lambda \psi(X)$$

für alle genügend kleinen $|\lambda|$ (mindestens) eine Lösung⁵⁾. Wenn E eine normierte Topologie besitzt, d. h. ein Banachraum ist, so gibt es zu jedem $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ eine Lösung von (1), sobald für die bei $0 < \lambda < 1$ möglicherweise vorhandenen Lösungen von (1) eine a priori-Schranke existiert; das ist eine Konstante C , für welche die Relationen (1), $0 < \lambda < 1$, und $\|X\| > C$ einander ausschließen. Dies ist das — wenigstens für die Anwendungen — wichtigste Resultat⁶⁾ der LERAY-SCHAUDERSchen Theorie [5], die den klassischen Begriff Abbildungsgrad (BROUWER) auf Abbildungen in Banachräumen überträgt.

Zweck der vorliegenden Note ist es, den angegebenen Satz ohne Benutzung des Abbildungsgrades zu beweisen und ihn gleichzeitig auf vollstetige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen zu verallgemeinern. Daß der TYCHONOFFsche Satz³⁾ dabei entscheidendes Beweismittel ist, zeigt erneut die Bedeutung von Fixpunktsätzen⁷⁾ für Existenzbeweise der nichtlinearen Analysis.

2. **Hilfssatz.** *E sei ein linearer, lokalkonvexer vollständiger Hausdorffraum. Wenn K eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von E , φ eine stetige Abbildung von K mit kompaktem $\varphi(K) \subset K$ ist, so gibt es einen Fixpunkt von φ in $K: X_0 = \varphi(X_0)$ ⁸⁾.*

¹⁾ Für die benutzten Begriffe vgl. [1, 2]. Das skalare Feld von E sei der Körper der reellen Zahlen mit der üblichen Topologie.

²⁾ $M \subset E$ heiße kompakt, wenn jede offene Überdeckung von \overline{M} durch ein endliches Teilsystem ersetzt werden kann, d. h. wenn \overline{M} bikompakt ist.

³⁾ TYCHONOFF [8].

⁴⁾ Wir nennen eine Abbildung ψ von E in sich vollstetig, wenn ψ stetig ist und für eine (abgeschlossene) Umgebung U des Nullelementes die Mengen $\psi(nU)$ ($n = 1, 2, \dots$) kompakt sind. Vgl. LERAY [4].

⁵⁾ Dies folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz in Nr. 2.

⁶⁾ Vgl. [5], Theoreme I.

⁷⁾ Es sei bemerkt, daß sich der BROUWERSche Fixpunktsatz (und damit seine Verallgemeinerungen auf Räume unendlicher Dimension, vgl. [6, 8]) ohne die Hilfsmittel der Komplextopologie beweisen läßt (s. [3]).

⁸⁾ Für eine etwas weitergehende Aussage vgl. [7], Satz I. 1.

Beweis. Es sei $\varphi(K) = H$. Wenn K^* die abgeschlossene konvexe Hülle von H bezeichnet, so ist K^* bikompakt⁹⁾; ferner offenbar $K^* \subset K$ und $\varphi(K^*) \subset \subset H \subset K^*$. Daher erfüllt K^* die Voraussetzungen des TYCHONOFFSchen Satzes³⁾ (s. oben), womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz. E bezeichne einen linearen, lokalkonvexen vollständigen Hausdorffraum, φ eine vollstetige⁴⁾ Abbildung von E in sich. Dann existiert zu jedem $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ ein $X = \lambda \varphi(X)$ oder aber die Menge $\{X : X = \lambda \varphi(X), 0 < \lambda < 1\}$ ist nicht beschränkt¹⁰⁾ in E .

Beweis. Sei U eine konvexe, symmetrische, abgeschlossene Umgebung der Null in E , für welche die Mengen $\varphi(nU)$ kompakt sind ($n = 1, 2, \dots$), $p(X)$ die (vermöge $p(X) \leq 1$) U charakterisierende Halbnorm. Falls für ein $\lambda_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ keine Lösung von (1) existiert, so setzen wir $\varphi^* = \lambda_0 \varphi$. Es genügt nun zu zeigen: Zu jedem n gibt es (wenigstens) ein $X_n = \mu_n \varphi^*(X_n)$ mit $0 < \mu_n < 1$ und $p(X_n) = n$.

Wir haben $nU = \{X : p(X) \leq n\}$ und definieren χ_n wie folgt:

$$(2) \quad \chi_n(X) = \begin{cases} \varphi^*(X) & \text{in } \{X : \varphi^*(X) \in nU\} \\ n p^{-1}[\varphi^*(X)] \varphi^*(X) & \text{in } \{X : \varphi^*(X) \in E - nU\}. \end{cases}$$

$\chi_n(X)$ ist stetig in nU , $\chi_n(nU)$ kompakt und $\subset nU$. Daher existiert $X_n = \chi_n(X_n)$ nach obigem Hilfssatz. Nach Voraussetzung ist aber $X_n = \varphi^*(X_n) = \lambda_0 \varphi(X_n)$, d. h. $\varphi^*(X_n) \in nU$, nicht möglich; daher $\varphi^*(X_n) \in E - nU$ und $X_n = \mu_n \varphi^*(X_n)$, $0 < \mu_n = n p^{-1}[\varphi^*(X_n)] < 1$, w.z.b.w.

Literatur.

- [1] N. BOURBAKI: *Elém. de Math.: Topologie générale*, Chap. I, II. Act. sci. industr. 858 (Paris 1951). — [2] N. BOURBAKI: *Elém. de Math.: Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I, II. Act. sci. industr. 1189 (Paris 1953). — [3] B. KNASTER, C. KURATOWSKI, S. MAZURKIEWICZ: Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Räume. *Fund. Math.* 14, 132—137 (1929). — [4] J. LERAY: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. *Acta Scient. Math.* 12 B, 177—186 (1950). — [5] J. LERAY et J. SCHAUDER: *Topologie et équations fonctionnelles*. Ann. Ec. Norm. Sup. 51, 45—78 (1934). — [6] J. SCHAUDER: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia math.* 2, 171—180 (1930). — [7] H. SCHAEFER: Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. *Sitzgsber. sächs. Akad. Wiss. Math.-nat. Klasse* 101, H. 7 (1955). — [8] A. TYCHONOFF: Ein Fixpunktsatz. *Math. Ann.* 111, 767—776 (1935).

(Eingegangen am 14. Januar 1955.)

⁹⁾ Vgl. [2], p. 81, Corollaire.

¹⁰⁾ $A \subset E$ heißt beschränkt, wenn zu jeder Umgebung der Null in E ein $\lambda > 0$ existiert, so daß $A \subset \lambda U$.

On Normal Coordinates in Finsler Spaces.

By

HERBERT BUSEMANN in Los Angeles.

1. Riemann, and after him many other authors dealing with two- or higher-dimensional Riemannian geometry, took it for granted that, under adequate differentiability hypotheses, normal coordinates have at their origin continuous second derivatives. This is correct, but the proof is not trivial¹⁾. W. MAYER was the first to notice in [2], p. 95, that the corresponding problem in Finsler spaces offers real difficulties, although I. H. C. WHITEHEAD showed in [3] that normal coordinates have continuous first derivatives²⁾. The author observed in [5] that, in general, no more can be said even in the analytic case.

Nevertheless, papers have appeared, and continue to appear, see for instance [6], which take the existence of normal coordinates of class C^2 in Finsler spaces for granted. The results established on this basis prove remarkably similar to Riemannian results. It seems therefore worthwhile to find out, whether the class of Finsler spaces with normal coordinates of class C^2 is significant.

The present note furnishes a brief proof that this is not the case. The argument runs like this: the existence of normal coordinates of class C^2 implies that a parallel displacement with the usual properties exists. Under parallel displacement along a geodesic the local Minkowski geometry is unchanged. Thus *the local Minkowski geometries at different points are all isometric. If the total group of rotations which this common local geometry possesses is finite*, then the parallel displacement is independent of the path and *the geometry is Minkowskian*.

A two-dimensional Finsler space which possesses everywhere normal coordinates of class C^2 is therefore Minkowskian or Riemannian.

In higher dimensions there are other possibilities, for instance, *products of Riemannian and Minkowskian spaces*. No attempt is made to determine all possibilities, because the mentioned facts imply already that the (non-Riemannian) Finsler spaces with normal coordinates of class C^2 are of no geometric interest. However, a simple characterization of these spaces, if it exists, would be valuable.

The presentation of these facts offered a little problem: the use of the parallelism should be preceded by a discussion of its properties; this would mean going through a completely standard and correspondingly boring procedure, only to find in the end that the spaces are uninteresting. The author

¹⁾ A satisfactory proof is found, for instance, in [1], Ann. 20, pp. 97, 98.

²⁾ A simpler proof was given by T. Y. THOMAS in [4].

tried to solve this problem by treating the two-dimensional case completely without parallelism, and by sketching the higher-dimensional case on the basis of the parallelism, whose properties are taken for granted.

2. Normal coordinates are affine coordinates in a special local Minkowskian geometry obtained by a simple geometric procedure, which is feasible under very weak differentiability hypotheses, compare [7, Chapter II]; we will not discuss this point here since we are interested only in questions pertaining to a high order of differentiability.

Consider an n -dimensional manifold M of class C^3 , and on M a function $F(x, \xi) = F(x_1, \dots, x_n, \xi^1, \dots, \xi^n)$ of class C^4 defined on all contravariant vectors (x, ξ) of M , satisfying the conditions:

$$F(x, \xi) > 0 \text{ for } \xi \neq 0,$$

$$F(x, k\xi) = |k| F(x, \xi) \text{ for all real } k \neq 0,$$

$F(x, \xi)$ is regular, i. e. the surface $F(x, \xi) = 1$ in ξ -space has (for each fixed x) everywhere positive Gauss curvature.

In M we introduce the distance

$$pq = \inf \int F(x, \dot{x}) dt,$$

where $x(t)$ traverses all curves from p to q of class D^1 . If a curve $x(t)$ exists for which $pq = \int F(x, \dot{x}) dt$, then $x(t)$ is an arc of an extremal, and will be called a segment $T(p, q)$ from p to q . Every point a of M has a closed neighborhood U of the form $a x \leq \varrho_a$ with the following properties: for any two points b, c in U the segment $T(b, c)$ exists and is unique, in particular the segments with origin a and of length ϱ_a cover U , except for a , simply. We may even assume that $T(b, c) \subset U$ for $b, c \subset U$, see [8], but may avoid the use of this theorem by using $T(b, c) \subset U$ for $ab \leq \varrho_a/2, ac \leq \varrho_a/2$.

For any point $b \neq a$ in U denote by $b_t, 0 < t \leq 1$ the point on $T(a, b)$ for which $ab_t = t \cdot ab$, put $a_t = a$. The limit

$$m_a(b, c) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{b_t c_t}{t}$$

exists for any two points b, c in U , and $m_a(b, c)$ is a Minkowski metric, see [7, Chapter II]. Since $m_a(a, b) = ab$, the segments through a are also segments for the Minkowski metric. $m_a(b, c)$ is the normal Minkowski metric of the Finsler space at a , and affine coordinates z_1, \dots, z_n with origin a belonging to $m_a(b, c)$ are called normal coordinates at a . The z_1, \dots, z_n are determined up to a non-degenerate homogeneous affinity.

Associating the original coordinates x and the normal coordinates z of the same point in U defines continuous functions

$$z_i = f_i(x) \text{ and } x_i = g_i(z) \quad i = 1, \dots, n.$$

For $x \neq a$ or $z \neq 0$ these functions are of class C^2 , see [2], pp. 93—95, and for $x = a$ or $z = 0$ they are of class C^1 , see [3, 4]. In general no more can be said at $x = a$, even if M and $F(x, \xi)$ are analytic, see [5, Appendix].

²⁾ Our results can be extended to the non-symmetric case, where only $F(x, k\xi) = kF(x, \xi)$ for $k > 0$.

3. We are interested in those spaces which possess at every point a normal coordinates of class C^2 at a . We first investigate consequences of the assumption that this be true at one point a . In the normal coordinates z_i the integrand takes the form

$$G(z, \zeta) = F\left(g(z), \frac{\partial g}{\partial z_j} \zeta^j\right)$$

and

$$(1) \quad \frac{\partial G(z, z)}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial G(0, z)}{\partial \zeta^i},$$

see [2] p. 100, where it is also proved that (1) is sufficient for the z_i to be normal coordinates at $z = 0$. The homogeneity of $G(z, \zeta)$ and (1) imply

$$(2) \quad G(z, z) = G(0, z),$$

which also follows from $m_a(a, b) = ab$. Differentiation of (2) with respect to z_i yields

$$G_{z_i}(z, z) + G_{\zeta^i}(z, z) = G_{z_i}(0, z),$$

hence $G_{z_i}(z, z) = 0$. Because of

$$G_{z_i}(k^{-1}z, k^{-1}z) = k^{-1}G_{z_i}(k^{-1}z, z) \text{ for } k > 0, z \neq 0,$$

we conclude

$$G_{z_i}(k^{-1}z, z) = 0 \text{ for } k > 0, z \neq 0.$$

Since the functions $g_i(z)$ are of class C^2 at $z = 0$, the function $G(z, \zeta)$ is of class C^1 at $z = 0$ for $\zeta \neq 0$.

Therefore the last equations yield for $k \rightarrow \infty$ that

$$(3) \quad \frac{\partial G(0, \zeta)}{\partial z_i} = 0 \text{ for } \zeta \neq 0, i = 1, \dots, n.$$

Since these are the *decisive relations*, we observe for comparison that in the Riemannian case

$$G(z, \zeta) = \sqrt{g_{jk}(z)} \zeta^j \zeta^k, G_{z_i} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial g_{jk}}{\partial z_i} \zeta^j \zeta^k,$$

so that (3) is equivalent to $\frac{\partial g_{jk}(0)}{\partial z_i} = 0$, which is the standard definition for z_i to be geodesic coordinates at 0.

We consider an extremal

$$z_i = \gamma^i t, \gamma \neq 0,$$

through a and two sets $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t))$, $\beta(t) = (\beta^1(t), \dots, \beta^n(t))$ of n functions of class C^1 of t such that

$$\frac{d\alpha^i(t)}{dt} = \frac{d\beta^i(t)}{dt} = 0 \text{ for } t = 0, \text{ but } \alpha(0) \neq \beta(0).$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{dG(\gamma t, \alpha(t) - \beta(t))}{dt} &= \frac{\partial G(\gamma t, \alpha(t) - \beta(t))}{\partial z_i} \gamma^i + \\ &+ \frac{\partial G(\gamma t, \alpha(t) - \beta(t))}{\partial \zeta^i} \left(\frac{d\alpha^i}{dt} - \frac{d\beta^i}{dt} \right), \end{aligned}$$

hence

$$(4) \quad \frac{dG(\gamma t, \alpha(t) - \beta(t))}{dt} = 0 \text{ for } t = 0.$$

4. We first discuss the two-dimensional case. In a Minkowskian (ζ^1, ζ^2) -plane with a distance determined by a function $G(\zeta^1, \zeta^2) = G(\zeta)$, geometric angular measures can be introduced in many ways. In order to avoid an ad hoc definition we use the angular measure proportional to the area of the sector of the unit circle, so normalized that a straight angle has measure π . This measure has proved useful in other investigations, see [5]. If ${}^i\zeta = (r_i \cos \varphi_i, r_i \sin \varphi_i)$, $r_i \neq 0$, $i = 1, 2$, then the measure of the angle between ${}^1\zeta$ and ${}^2\zeta$ is given by

$$\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} G^{-2}(u) du / \int_0^\pi G^{-2}(u) du,$$

where $G(u) = G(\cos u, \sin u)$.

If the two Minkowski metrics given by $G(\zeta^1, \zeta^2)$ and $F(\xi^1, \xi^2)$ are isometric, then a mapping $\varphi \rightarrow \psi(\varphi)$ exists such that for any two corresponding pairs of directions φ_1, φ_2 and $\psi_1 = \psi(\varphi_1)$, $\psi_2 = \psi(\varphi_2)$ and any two numbers r_1, r_2 with

$${}^i\zeta = (r_i G(\varphi_i) \cos \varphi_i, r_i G(\varphi_i) \sin \varphi_i)$$

$${}^i\xi = (r_i F(\psi_i) \cos \psi_i, r_i F(\psi_i) \sin \psi_i)$$

the relation

$$G({}^1\zeta - {}^2\zeta) = F({}^1\xi - {}^2\xi)$$

holds. Moreover, if μ_G, μ_F are the corresponding angular measures, then

$$\mu_G(\varphi_1, \varphi_2) = \mu_F(\psi_1, \psi_2).$$

For a given φ_0 the corresponding $\psi(\varphi_0)$ can be prescribed arbitrarily if, and only if, the isometric Minkowskian geometries are euclidean, because then the geometries possess the full group of rotations. Otherwise there is only a finite number of possible choices $\psi(\varphi_0)$ (in the interval $[0, 2\pi]$).

Consider a two-dimensional Finsler space with a metric $G(z, \zeta)$ for which z_1, z_2 are normal coordinates at $z = 0$. Let $\gamma^1 = \cos \psi$, $\gamma^2 = \sin \psi$, put $G(z_1, z_2, \cos u, \sin u) = G(z, u)$ and

$${}^i\alpha(t) = [r_i G(\gamma t, \varphi_i(t)) \cos \varphi_i(t), r_i G(\gamma t, \varphi_i(t)) \sin \varphi_i(t)], \quad i = 1, 2,$$

where $\varphi_i(t)$ is determined such that at γt the measure $\mu(\psi, \varphi_i(t))$ equals a fixed number Θ_i , $0 < |\Theta_i| < \pi$. Then

$$\pi \int_{\varphi_i(t)}^{\varphi_i(t)} G^{-2}(\gamma t, u) du = \Theta_i \int_0^\pi G^{-2}(\gamma t, u) du,$$

hence

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \cdot \frac{\pi}{G^2(\gamma t, \varphi_i(t))} - 2\pi \int_{\varphi_i(t)}^{\varphi_i(t)} \frac{\gamma^1 G_{z_1}(\gamma t, u) + \gamma^2 G_{z_2}(\gamma t, u)}{G^3(\gamma t, u)} du \\ = -2 \Theta_i \int_0^\pi \frac{\gamma^1 G_{z_1}(\gamma t, u) + \gamma^2 G_{z_2}(\gamma t, u)}{G^3(\gamma t, u)} du. \end{aligned}$$

Theorem 1. A two-dimensional Finsler space which possesses at every point normal coordinates of class C^2 is Riemannian or Minkowskian.

5. This theorem cannot be extended to higher dimensions: if $F(x, \xi)$ and $F'(x', \xi')$ are integrands of Finsler spaces and normal coordinates z, z' exist for the two spaces at a and a' respectively, then (z, z') are normal coordinates at (a, a') for the product space (x, x') with the metric

$$g[F(x, \xi), F'(x', \xi')],$$

where $g(t, t')$ satisfies the assumptions for an integrand of a two-dimensional Minkowski space (i. e. $g(t, t') > 0$ for $(t, t') \neq (0, 0)$, $g(kt, kt') = |k| g(t, t')$, and $g(t, t') = 1$ has everywhere positive curvature).

For if, as above, $G(z, \zeta) = F(x, \xi)$, $G'(z', \zeta') = F'(x', \xi')$ then (1) and (2) show readily that

$$\frac{\partial g[G(z, \zeta), G'(z', \zeta')]}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial g[G'(0, \zeta'), G'(0, \zeta')]}{\partial \zeta^i}$$

and similarly for ζ'^i , so that (z, z') are normal coordinates and evidently of class C^2 with respect to (x, x')

Thus the product, in this sense, of any Minkowski space and any Riemann space possesses, under adequate differentiability hypotheses, everywhere normal coordinates of class C^2 .⁴⁾

Consider now a Finsler space which possesses everywhere normal coordinates of class C^2 . Then a parallel displacement can be defined by using one of the standard approaches in Riemannian geometry: If the z_i are normal coordinates at a and ζ is a contravariant vector with origin a , then the vector parallel to ζ with origin $a + da$ is simply the vector with the same components as ζ . For the reasons mentioned in the introduction we are not going to verify that this parallelism has the usual properties.

The relation (4) implies that, under parallel displacement along an extremal of two vectors with the same origin on the extremal, the Minkowski distance of their endpoints in the local Minkowskian geometry belonging to their origin remains unchanged. Thus the local Minkowskian geometries at different points of the extremal are isometric, and because the extremals are autoparallel, the isometry can be effected in such a way that directions along extremals correspond. Thus we have firstly:

Theorem 2. If a Finsler space possesses everywhere normal coordinates of class C^2 , then local Minkowskian geometries at the different points of the space are all isometric.

Secondly, if the group of rotations about a point in this common Minkowskian geometry is finite, then there is only a finite number of directions at one point, to which a direction at another point can correspond under the

⁴⁾ This can, of course, be generalized to m spaces with integrands $F^i(x^i, \xi^i)$, $i = 1, \dots, m$, and an m -dimensional MINKOWSKI metric $g(t^1, \dots, t^m)$; i. e., $g[F^1(x^1, \xi^1), \dots, F^m(x^m, \xi^m)]$ will possess normal coordinates of class C^2 at (a^1, \dots, a^m) , if $F^i(x^i, \xi^i)$ possesses normal coordinates of class C^2 at a^i , $i = 1, \dots, m$.

isometry of the Minkowski metrics at the two points. At least in a sufficiently small neighborhood of a point, this correspondence between directions at different points becomes one-to-one if it is continuous. On the other hand, corresponding directions at different points also correspond under parallel displacement along geodesic polygons. Therefore parallel displacement is independent of the path. A standard argument shows that the extremals are the affine lines, and coincide, in the neighborhood U of a constructed in the beginning, with those of the normal Minkowskian geometry at a . It follows as in two dimensions that the metric is Minkowskian.

Theorem 3. If a Finsler space possesses everywhere normal coordinates of class C^2 and the group of rotations about a point in the common local Minkowskian geometry is finite, then the metric is Minkowskian.

One is tempted to see in this argument an indication that in general Finsler spaces no comprehensive parallelism can exist, that is, one which shares many properties with the parallelism in Riemann spaces. This is confirmed by the ever increasing number of parallel displacements in Finsler spaces, most of which are invented to preserve some special Riemannian property.

References.

- [1] H. SEIFERT, u. W. THRELFALL: Variationsrechnung im Großen. Leipzig 1938 und New York 1951. — [2] W. MAYER: Riemannsche Geometrie, vol. II of A. DUSCHEK - W. MAYER, Lehrbuch der Differentialgeometrie. Leipzig 1930. — [3] I. H. C. WHITEHEAD: On the covering of a complete space by the geodesics through a point. Ann. of Math. **36**, 679—704 (1935). — [4] T. Y. THOMAS: On normal coordinates. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22**, 309—312 (1936). — [5] H. BUSEMANN: On geodesic curvature in two-dimensional Finsler spaces. Ann. di Mat. Ser. IV **31**, 281—295 (1950). — [6] H. RUND: Eine Krümmungstheorie der FINSLERSchen Räume. Math. Ann. **125**, 1—18 (1952). — [7] H. BUSEMANN: Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry. Ann. Math. Studies 8, Princeton 1942. — [8] I. H. C. WHITEHEAD: The WEIERSTRASS E-function in differential metric geometry. Quart. J. Oxford Ser. 4, 291—296 (1933).

(Eingegangen am 1. Februar 1955.)

Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg/Lahn.

Eine affin-metrische Geometrie läßt sich algebraisch im Vektorraum über einem involutorischen Schiefkörper¹⁾ erklären, indem die Metrik durch eine Hermitesche bzw. schief-Hermitesche Form eingeführt wird²⁾. Umgekehrt erhält man nach R. BAER und H. LENZ³⁾ mit grundsätzlich einfachen Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen für Dimensionen > 2 eine analytische Geometrie mit einer derartigen metrischen Grundform. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß die Existenz einer entsprechenden metrischen Grundform für die Ebene einem Schließungssatz äquivalent ist. Dieser Schließungssatz, der aus den trivialen Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen des Raumes, aber nicht aus denen der Ebene folgt, zieht den Satz von DESARGUES, aber nicht den Satz von PAPPUS-PASCAL nach sich. Die Übertragung des hier in der Ebene beschrittenen Weges auf höhere Dimensionen liefert einen weiteren Beweis für das Ergebnis von H. LENZ.

Das Axiomensystem der *affin-metrischen Ebene* soll außer den *trivialen Inzidenzaxiomen* und dem *Parallelenaxiom* nur die *trivialen Orthogonalitätsaxiome* enthalten:

O 1. Ist $g \perp h$, so $h \perp g$.

O 2. Ist $g \perp h$ und $h \parallel k$, so $g \perp k$.

O 3. Durch jeden Punkt einer Geraden g gibt es genau eine Gerade h mit $g \perp h$.

Ist $g \perp g$, so heißt g *isotrop*. x, y, z, \dots seien Vektoren mit festem Ursprung O (d. h. geordnete Punktepaare OP). Durch die Orthogonalität der Geraden ist eine Orthogonalität der Vektoren gegeben. Gemäß O 2 ist die Orthogonalität für beliebige Geraden bereits durch die Orthogonalität der Vektoren mit Ursprung O festgelegt.

Wir suchen die Bedingung, unter der sich die Orthogonalität durch das Verschwinden eines *Skalarproduktes* $x \cdot y$ kennzeichnen läßt. Die Werte von $x \cdot y$ sollen einem geometrisch eingeführten Koordinatenbereich angehören, also den Punkten einer festen Geraden zugeordnet sein. Mit der üblichen Vektoraddition stellen wir für das Skalarprodukt die Forderungen:

S 1. $x \perp y$ äquivalent $x \cdot y = 0$,

S 2. Ist $x - y \perp z$, so $x \cdot z = y \cdot z$,

S 3. Ist $x \perp y - z$, so $x \cdot y = x \cdot z$.

¹⁾ Kriterien für involutorische Divisionsalgebren wurden von A. ALBERT [1] gegeben.

²⁾ Untersuchungen über die zugehörigen unitären Gruppen von J. DIEUDONNÉ [3] und [4].

³⁾ R. BAER [2], H. LENZ [5] und [6].

der Relationen $P'_i P'_k \parallel P'_i P'_k$ ($i \neq k$) die dritte“. (Aus dem zunächst gegebenen Spezialfall mit $P'_1 P'_1 = k$ läßt sich bekanntlich der allgemeine Fall gewinnen.) Mit Hilfe des Satzes von DESARGUES kann man sich beim Schließungssatz leicht von der Voraussetzung $P_0 = P'_0 = O$ und auch von den übrigen Einschränkungen frei machen.

Setzen wir nun den Schließungssatz voraus, so können wir auf Grund des daraus folgenden Satzes von DESARGUES ein Koordinatensystem (mit k als einer Achse und Nullpunkt O) so erklären, daß die Koordinaten einen Schiefkörper bilden und die Inzidenz eines Punktes (ξ_1, ξ_2) mit einer Geraden durch eine lineare Gleichung $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 = 0$ ausgedrückt wird. Das Skalarprodukt $x \cdot y$ sei jetzt als Koordinate des Punktes Q_{XY} definiert. Auf Grund der Konstruktion von Q_{XY} gilt dann

$$(1) \quad x \cdot y \lambda = (x \cdot y) \lambda.$$

Weiterhin erhält man

$$(2) \quad x \cdot (y + \beta) = x \cdot y + x \cdot \beta,$$

und zwar unmittelbar aus S 1 und S 3, falls $x \perp y + \beta$ ist, und mit (1), falls y, β kollinear sind. Andernfalls gibt es ein λ mit $x \perp (y + \beta) \lambda - y$. Hieraus und aus der Folgerung $x \perp \beta - (y + \beta) (1 - \lambda)$ ergibt sich mit S 3 und (1) die Gleichung (2).

$x \cdot y$ ist im allgemeinen nichtkommutativ. Auf Grund der Definition des Skalarproduktes und der Eigenschaften S 2, S 3 ist bei $x \cdot y = x' \cdot y'$ auch $y \cdot x = y' \cdot x'$. Folglich hängt die Abbildung $x \cdot y \rightarrow y \cdot x$ nicht von den Vektoren, sondern nur von ihren Skalarprodukten ab. Ist jede Gerade isotrop, so

$$(x + y) \cdot (x + y) = (x + y) \cdot x + (x + y) \cdot y = y \cdot x + x \cdot y = 0,$$

also

$$(3) \quad y \cdot x = -x \cdot y,$$

was nur bei kommutativem Koordinatenkörper möglich ist. Andernfalls sei k nicht-isotrop und E Einheitspunkt auf k . Dann läßt sich die Abbildung

$$(3') \quad (x \cdot y)^J = y \cdot x$$

geometrisch so kennzeichnen: X sei ein Punkt auf k mit der Koordinate ξ , Y ein von E verschiedener Punkt der Senkrechten zu k durch E (Fig. 3). Dann ist

$$\xi = OE \cdot OX = OY \cdot OX = OY \cdot OP_{XY}$$

und

$$\xi^J = OP_{XY} \cdot OY = OP_{XY} \cdot OX^J = OE \cdot OX^J,$$

wo X^J der Schnittpunkt des Lotes von Y auf OP_{XY} mit der Geraden k ist. Man hat also $\xi^J = \xi$ genau dann, wenn der Höhenschnittpunktsatz für das Dreieck $OX P_{XY}$ gilt.

Algebraisch erweist sich J als eine *Involution*, d. h. als eine Abbildung mit den Eigenschaften

$$(4) \quad (\xi + \eta)^J = \xi^J + \eta^J, (\xi \eta)^J = \eta^J \xi^J, \xi^{JJ} = \xi.$$

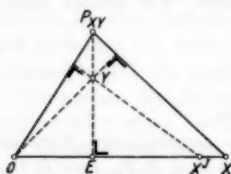


Fig. 3.

Die letzte Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Definition von J . Zur Herleitung der anderen Gleichungen gehen wir von dem Vektor $e = OE$ aus. Nach Definition ist $e \cdot e \xi = \xi$. Daraus folgt

$$\xi^J = e \xi \cdot e, \quad \xi \eta = e \xi^J \cdot e \eta, \quad (\xi \eta)^J = e \eta \cdot e \xi^J = \eta^J \xi^J.$$

Ist e' ein zu e senkrechter Vektor und $\alpha = e' \cdot e'$, so gilt $\alpha^J = \alpha \neq 0$ und $(e - e') \cdot (e \alpha + e') = 0$, also $e - e' \perp e \alpha + e'$. Folglich ist auch

$$e(\xi + \eta) - (e \xi + e' \eta) \perp e \alpha + e'$$

und nach S 2

$$e(\xi + \eta) \cdot (e \alpha + e') = (e \xi + e' \eta) \cdot (e \alpha + e'),$$

woraus $(\xi + \eta)^J = \xi^J + \eta^J$ folgt.

Gemäß (1)–(3) bzw. (1), (2), (3'), (4) ist das Skalarprodukt eine schiefsymmetrische Bilinearform bzw. eine Hermitesche Form. Wir nehmen auch schief-Hermitesche Formen hinzu und verstehen allgemein unter einer *metrischen Grundform* eine Form $f(x, y)$ mit den Eigenschaften:

1. $f(x, y) = 0$ ist äquivalent $x \perp y$.
2. $f(x, y)$ ist linear in y , d. h. es gilt $f(x, y \lambda) = f(x, y) \lambda$ und $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$.
3. Entweder ist stets $f(y, x) = f(x, y)^J$ oder stets $f(y, x) = -f(x, y)^J$, wo J eine Involution mit den Eigenschaften (4) bzw. die Identität ist.

Hieraus folgt sofort

$$f(x \lambda, y) = \lambda^J f(x, y) \quad \text{und} \quad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z).$$

In dem Spezialfall, in dem J die Identität ist, haben wir einen kommutativen Koordinatenkörper und eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische Bilinearform $f(x, y)$. Es gilt:

Satz 1. Im Rahmen des Axiomensystems der affin-metrischen Ebene ist der Schließungssatz äquivalent mit der Existenz einer metrischen Grundform.

Mit dem Schließungssatz ergab sich nämlich das zuletzt erklärte Skalarprodukt als eine metrische Grundform⁴⁾. Ist andererseits die Orthogonalität durch eine metrische Grundform $f(x, y)$ gegeben, so gilt der Schließungssatz; denn für Vektoren $x_i = P_0 P_i$, $y_i = P'_0 P'_i$ ($i = 1, 2, 3$) werden die Relationen des Schließungssatzes durch die Gleichungen

$$f(x_i, y_{i+1}) = f(x_i, y_{i+2}), \quad f(x_{i+1}, y_i) = f(x_{i+2}, y_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

ausgedrückt, wenn mit den Indizes modulo 3 gerechnet wird. Aus fünf dieser Gleichungen folgt die sechste.

Die Kommutativität des Koordinatenkörpers, die im Falle, daß jede Gerade isotrop ist, aus der schiefsymmetrischen Bilinearform hervorgeht, folgt auch unmittelbar aus dem Schließungssatz in diesem Falle, in dem die Orthogonalität durch die Parallelität bzw. Gleichheit zu ersetzen ist. *Der Schließungssatz für die Parallelität ist dem affinen Satz von PAPPUS-PASCAL äquivalent.* Um den Satz von PAPPUS-PASCAL aus dem Schließungssatz zu gewinnen,

⁴⁾ Die im nicht-isotropen Falle gewonnene Hermitesche Form kann, falls J nicht die Identität ist, auch auf eine schief-Hermitesche Form transformiert werden (vgl. z. B. [4]).

wählen wir P_0, P_1, P'_3 kollinear und $P_1 = P'_2, P_3 = P'_0$ (Fig. 4). Dann gelten für die Verbindungsgeraden die Gleichungen

$$P_0 P_1 = P'_2 P'_3, P'_0 P_1 = P_2 P_3, P'_0 P'_2 = P_3 P_1,$$

und die übrigen Relationen des Schließungssatzes lauten

$$P_0 P_2 \parallel P'_3 P'_1, P_0 P_3 \parallel P'_1 P'_2, P'_0 P'_3 \parallel P_1 P_2.$$

Die Behauptung des Schließungssatzes, daß aus zwei dieser Parallelitäten die dritte folgt, ist der affine Satz von PAPPUS-PASCAL. Da andererseits bei Gültigkeit des affinen Satzes von PAPPUS-PASCAL der Koordinatenkörper kommutativ und $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ metrische Grundform für Vektoren $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)$ im isotropen Falle ist, folgt nach Satz 1 auch aus dem affinen Satz von PAPPUS-PASCAL der Schließungssatz für die Parallelität.

Allgemein folgt der Schließungssatz aus dem Höhenschnittpunktsatz. Mit dem Höhenschnittpunktsatz erhält man nämlich den affinen Satz

von PAPPUS-PASCAL, weiterhin eine bilineare metrische Grundform (bei Anwendung des Höhenschnittpunktsatzes auf Dreiecke mit zwei festen Seiten) und somit nach Satz 1 auch den Schließungssatz.

Wir gehen nun zum *affin-metrischen Raum* über. $P \in g, P \in \mathfrak{E}$ und $g \in \mathfrak{E}$ bezeichne die Inzidenzen zwischen einem Punkt P , einer Geraden g und einer Ebene \mathfrak{E} . Als Axiome benutzen wir die *trivialen Inzidenzaxiome*, das *Parallelaxiom* und die *trivialen Orthogonalitätsaxiome* O1, O2 und

O3'. Zu jedem Punkt $P \in g$ gibt es eine Ebene $\mathfrak{E} \ni P$, so daß $P \in h \in \mathfrak{E}$ äquivalent $P \in h \perp g$ ist.

Eine Ebene \mathfrak{E} heißt *isotrop*, wenn es eine Gerade $g \in \mathfrak{E}$ mit $g \perp h$ für alle $h \in \mathfrak{E}$ gibt. Für die Geraden einer nichtisotropen Ebene folgt aus O3' das ebene Orthogonalitätsaxiom O3. Ist \mathfrak{E} eine isotrope Ebene, so ergibt sich eine Parallelschar, so daß für g, h auf \mathfrak{E} genau dann $g \perp h$ gilt, wenn g oder h dieser Schar angehört.

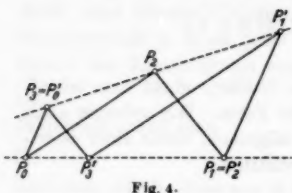
$g \perp \mathfrak{E}$ bedeute: $g \perp h$ für alle $h \in \mathfrak{E}$. Aus den Orthogonalitätsaxiomen des Raumes folgt

O3''. Zu jeder Ebene \mathfrak{E} und jedem Punkt $P \in \mathfrak{E}$ gibt es genau eine Gerade g mit $P \in g \perp \mathfrak{E}$.

Sind nämlich h_1, h_2 zwei verschiedene Geraden mit $P \in h_i \in \mathfrak{E}$, so haben die zu h_1, h_2 orthogonalen Ebenen durch P eine Gerade $g \ni P$ gemeinsam. Dann ist $g \perp h_1, h_2$, woraus $g \perp \mathfrak{E}$ folgt. Die Annahme, daß es zwei verschiedene Geraden g_1, g_2 mit $P \in g_i \perp \mathfrak{E}$ gibt, führt zu folgendem Widerspruch. k sei eine Gerade durch P , so daß g_1, g_2, k nicht komplanar sind. Die zu k orthogonale Ebene durch P hat mit \mathfrak{E} eine gemeinsame Gerade $h \ni P$. Da $h \perp g_1, g_2, k$ ist, müßten g_1, g_2, k nach O3' komplanar sein.

O3' und O3'' besagen, daß $g \perp \mathfrak{E}$ eine Korrelation im Bündel der Geraden und Ebenen durch P ist.

Satz 2. Der Schließungssatz folgt aus den Axiomen des affin-metrischen Raumes.



Für isotrope Ebenen ist der Schließungssatz trivial. Wir können uns daher beim Beweise des Schließungssatzes auf eine nicht-isotrope Konfigurationsebene \mathcal{E} beschränken. Außerdem können wir $P_0 = P'_0$ annehmen, da aus diesem Spezialfall der allgemeine Schließungssatz folgt. Auf der zu \mathcal{E} orthogonalen Geraden durch P_0 gibt es, da \mathcal{E} nicht isotrop ist, einen Punkt Z , der nicht auf \mathcal{E} liegt. Die nach $O3'$, $O3''$ bestehende Orthogonalitäts-Korrelation im Bündel der Geraden und Ebenen durch Z liefert im Schnitt mit \mathcal{E} eine Korrelation zwischen den Punkten und Geraden der projektiv erweiterten Ebene \mathcal{E} . Bei dieser Korrelation mögen die Punkte $P'_i (i = 1, 2, 3)$ den Geraden k_i und die Geraden h'_i den Punkten Q_i zugeordnet sein. Den Inzidenzen $P'_i \in h'_i$ entsprechen die Inzidenzen $Q_i \in k_i$. Da die Geraden g_i und g'_i durch den Fußpunkt des Lotes von Z auf \mathcal{E} gehen, ist $g_i \perp h'_i$ äquivalent $Q_i \in g_i$ und $P'_0 P'_i = g'_i \perp h_i$ äquivalent $h_i \parallel k_i$. Demgemäß ist der Schließungssatz äquivalent dem Satz von DESARGUES für die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3$, bei denen die Verbindungen entsprechender Ecken durch P_0 gehen und die entsprechenden Seiten h_i, k_i parallel sind. Da der Satz von DESARGUES aus den trivialen Inzidenzaxiomen des Raumes folgt, gilt der Schließungssatz.

Für die Einbettbarkeit einer affin-metrischen Ebene in einen affin-metrischen Raum ist somit die Gültigkeit des Schließungssatzes notwendig.

Der bereits von H. LENZ bewiesene Satz, daß ein affin-metrischer Raum von mehr als zwei Dimensionen eine metrische Grundform besitzt, läßt sich auch mit einer entsprechenden Konstruktion des Skalarproduktes, wie wir sie im ebenen Falle durchgeführt haben, gewinnen. Es sei hier ein geometrischer Beweis angegeben, der außer den Axiomen des affinen Raumes und $O1, O2$ die folgenden Orthogonalitätsaxiome $O3^*, O4, O5$ benutzt⁵⁾. Dabei bedeute \mathcal{R} einen dreidimensionalen Unterraum und $g \perp \mathcal{R}$, daß g auf jeder Geraden von \mathcal{R} senkrecht steht.

$O3^*$. Zu beliebigen P, g, \mathcal{R} mit $P \in \mathcal{R}$ und g nicht $\perp \mathcal{R}$ gibt es eine Ebene \mathcal{E} mit $P \in \mathcal{E} \in \mathcal{R}$, so daß $P \in h \in \mathcal{E}$ äquivalent $P \in h \perp g$ ist für alle Geraden $h \in \mathcal{R}$.

$O4$. Ist g ungleich und nicht parallel h , so gibt es eine Gerade, die auf g , aber nicht auf h senkrecht steht.

$O5$. Sind g, h, k drei nicht komplanare Geraden durch einen Punkt, so gibt es eine Gerade, die auf g und h , aber nicht auf k senkrecht steht.

Wir gehen wiederum von einer festen Geraden k und festen Punkten O, E aus, wobei $O \in k$ und OE nicht $\perp k$ ist.

Konstruktion des Skalarproduktes $OX \cdot OY$. 1. Fall: $Y \notin k$. Gemäß $O4$ gibt es eine Gerade g durch X , die auf OY , aber nicht auf k senkrecht steht. \mathcal{R}_1 umfasse O, E, g . Da k nicht $\perp \mathcal{R}_1$, enthält \mathcal{R}_1 eine zu k senkrechte Ebene durch E . Diese hat mit g einen Schnittpunkt P . \mathcal{R}_2 umfasse k, P, Y . Da OP nicht $\perp \mathcal{R}_2$, enthält \mathcal{R}_2 eine zu OP senkrechte Ebene durch Y . Diese hat mit k genau einen Schnittpunkt Q_{XY} . Wir setzen $OX \cdot OY = Q_{XY}$. — 2. Fall: Ist $Y \in k$, so sei $OX \cdot OY = Q_{XY'}$, wo Y' ein nicht auf k liegender Punkt mit $Y Y' \perp OX$ sein soll.

⁵⁾ Diese Axiome sollen nicht den Anspruch besonderer Einfachheit erheben, sondern sind nur für den vorliegenden Zweck gewählt worden.

Folgerungen für Punkte, die gemäß dem 1. Fall konstruiert sind:

a) Q_{XY} ist unabhängig von der Hilfsgeraden g . Führt nämlich eine zweite Gerade g' zu P' und Q'_{XY} , so ist $g, g' \perp OY$ und somit $PP' \perp OY$. Da ferner $PP' \perp k$, so auch $PP' \perp YQ_{XY}$. Mit $OP \perp YQ_{XY}$ folgt $OP' \perp YQ_{XY}$ und $Q_{XY} = Q'_{XY}$.

b) $Q_{XY} = O$ nur bei $OX \perp OY$, da beide Relationen mit $OP \perp OY$ äquivalent sind.

c) Ist $X_1X_2 \perp OY$, so $Q_{X_1Y} = Q_{X_2Y}$. Sind nämlich P_1, P_2 die bei den Konstruktionen mit X_1, X_2 benutzten Punkte, so ist entweder $P_1 = P_2$ oder $P_1P_2 \perp OY$, woraus die Behauptung wie unter a) folgt.

d) Ist $OX \perp Y_1Y_2$, so $Q_{XY_1} = Q_{XY_2}$. 1. Fall: k, Y_1, Y_2 seien nicht komplanar. Gemäß O5 gibt es durch X eine Gerade g , die auf OY_1, OY_2 , aber nicht auf k senkrecht steht. Hiermit konstruieren wir P . Dann ist $Y_1Y_2 \perp PX$, OX , also $Y_1Y_2 \perp OP$. Da auch $OP \perp Y_1Q_{XY_1}$, so $OP \perp Y_2Q_{XY_2}$, woraus $Q_{XY_1} = Q_{XY_2}$ folgt. — 2. Fall: k, Y_1, Y_2 seien komplanar. Dann wählen wir Y_3 so, daß $OX \perp Y_1Y_3, Y_2Y_3$ und Y_3 nicht mit k, Y_1, Y_2 komplanar ist. Nach dem 1. Fall haben wir $Q_{XY_1} = Q_{XY_2} = Q_{XY_3}$.

Hiermit erhalten wir die Eigenschaften S1—S3 für $OX \cdot OY$, womit dieses Skalarprodukt wie vorher als *metrische Grundform* zu erkennen ist.

Für eine *projektive Ebene mit Polarkorrelation* erhält man nun mit dem Satz von DESARGUES eine metrische Grundform, indem man homogene Koordinaten einführt und für den affin-metrischen Raum, der sich bei Übergang zu inhomogener Auffassung der Koordinaten ergibt, die metrische Grundform bildet. Diese ist zugleich metrische Grundform der projektiven Ebene in homogenen Koordinaten.

Der Schließungssatz ist bei vorliegender Polarkorrelation, bei der sich die Orthogonalität zweier Geraden durch die Inzidenz einer Geraden mit dem Pol der anderen Geraden ausdrücken läßt, *dem Satz von DESARGUES äquivalent*. Ist nämlich p die Polare von P_0 und Q_i der Pol von h'_i ($i = 1, 2, 3$), so sind die Relationen des Schließungssatzes $g_i \perp h'_i$ bzw. $g'_i \perp h_i$ äquivalent zu $Q_i \in g_i$ (also P_iQ_i durch P_0) bzw. $p, Q_{i+1}Q_{i+2}, h_i$ kopunktal (also Schnittpunkte von P_iP_k mit Q_iQ_k auf p).

Literatur.

- [1] A. ALBERT: Involutorial simple algebras and real Riemann matrices. Ann. of Math. 36, 886—904 (1935). — [2] R. BAER: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [3] J. DIEUDONNÉ: Sur les groupes classiques. Actualités Sci. et Ind. 1040, Paris 1948. — [4] J. DIEUDONNÉ: On the structure of unitary groups. Transactions Amer. Math. Soc. 72, 367—385 (1952). — [5] H. LENZ: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1954, 17—72. — [6] H. LENZ: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. Math. Ann. 128, 363—372 (1954).

(Eingegangen am 17. Januar 1955.)

Laurent-Trennung und zweifach unendliche Faber-Systeme*.

Von

HORST TIETZ in Braunschweig.

§ 1. Einleitung.

1.1 Die Approximation beliebiger analytischer Funktionen durch spezielle ist eine der wichtigsten Methoden der Funktionentheorie. Es ist daher natürlich, daß die Approximationstheorie auch ohne Zusammenhang mit der Anwendung behandelt wird. Entsprechend den verschiedenen Forderungen, die man den approximierenden Funktionen auferlegt, erhält man Modifikationen dieses Problems. Es sind dabei wesentlich zwei Typen von Forderungen hervorzuheben: die Näherungsfunktionen sollen einen vorgeschriebenen, den Definitionsbereich der zu approximierenden Funktion umfassenden Existenzbereich besitzen, oder sie sollen bequeme kalkülmäßige Eigenschaften aufweisen.

Für analytische Funktionen der Ebene ist der Runge'sche Approximationssatz das allgemeinste Resultat zur ersten Form des Problems, während die zweite zunächst nicht in reiner Form behandelt worden ist; sie wird vielmehr mit der ersten verbunden, indem man vornehmlich nach Polynomen sucht die einem gewissen Kalkül genügen und durch die sich in vorgeschriebenen Gebieten jede dort reguläre Funktion annähern läßt. Das spezielleste Ergebnis in dieser Richtung ist die Taylorreihe. Durch Untersuchungen von FABER [6], SZEGÖ [22], BERGMANN [3] und BOCHNER [5] sind Verfahren entwickelt worden, die zwischen diesen beiden Extremen liegen: es wird ein Gebiet vorgegeben, das gewissen allgemeinen Bedingungen genügt, und dazu ein Polynomsystem konstruiert, das eine Basis für die regulären Funktionen des Gebietes darstellt. Der Faberkalkül steht dem Taylorsche sehr nahe — wird er doch aus diesem durch eine geeignete konforme Abbildung gewonnen —, während den übrigen der genannten Verfahren die Methode der Orthogonalfunktionen zugrunde liegt (und zwar handelt es sich bei SZEGÖ um Orthogonalisierung bezüglich einer Kurvenmetrik, bei BERGMANN und BOCHNER aber bezüglich einer Flächenmetrik).

1.2. Die Entsprechungen dieser Resultate auf Riemannschen Flächen zeigen eine schärfere Struktur als im ebenen Falle. Einerseits fallen die beiden extremen Resultate in ihrer Tragweite grundsätzlich auseinander: während der Runge'sche Approximationssatz, wie BEHNKE und STEIN [2] gezeigt haben, in voller Allgemeinheit gültig ist, vermittelt die Taylorreihe nur die Darstellung von Funktionen „im Kleinen“. Andererseits liegt das Gewicht der zu einem Gebiet gehörigen Orthogonalfunktionen vor allem auf der Nützlichkeit des Kalküls und nicht so sehr darauf, daß sie noch über das vorgegebene

*) Habilitationsarbeit Braunschweig 1955.

Gebiet hinaus fortsetzbar wären¹⁾; sie stellen also im wesentlichen ein Resultat für unsere zweite Formulierung des Approximationsproblems dar. Dagegen halten die Faberentwicklungen [24] wieder die Mitte zwischen den beiden Fragestellungen: die Faberfunktionen sind auf der ganzen — als geschlossen angenommen — Riemannschen Fläche erklärt und gestatten die Darstellung von Funktionen „im Großen“ durch taylorähnliche Reihenentwicklungen. — Ein ähnliches Ziel verfolgt übrigens FLATHE [9] im Anschluß an [2]: er setzt von seinem Entwicklungsgebiet voraus, daß es einem mehrblättrigen Kreise konform äquivalent ist; es erscheint für die Bedeutung der Flattheschen Resultate bemerkenswert, daß diese Voraussetzung nach einem Ergebnis von AHLFORS [1] stets erfüllt ist.

1.3. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Fabertheorie auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Dabei wurde ein zweifaches Ziel gesteckt:

Durch die systematische Verwendung des Begriffes der Laurent-Trennung (§ 2) werden die Faberschen Schlüsse, soweit sie der Analysis angehören, auf eine allgemeine und elementare Grundlage gestellt; so sind beispielsweise sämtliche Konvergenzaussagen triviale Folgerungen aus der Stetigkeit der Laurent-Trennung (Satz 1), und auch die von FABER seinen Reihen zugeordneten Taylorreihen treten hier als organischer Bestandteil der Theorie auf (s. u.).

Zum anderen erfährt die von FABER angewandte konforme Abbildung eine wesentliche Erweiterung. Diese wird ermöglicht durch ein vom Verf. kürzlich bewiesenes Resultat [26], das wir für unsere Zwecke formulieren als

Abbildungssatz: *Zu einer berandeten Riemannschen Fläche \bar{G} mit einer einzigen Randkurve C gibt es eine konforme Abbildung, unter welcher C in eine schlechte Kreisl Linie übergeht; das Bild von \bar{G} besteht also aus einer Kreisscheibe und aus einer gewissen Anzahl — etwa N — von Vollebenen.*

Dadurch wird folgendes erreicht: Verf. zeigte in [24], daß sich die Fabertheorie auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche \mathfrak{A} für solche Gebiete G durchführen läßt, deren Komplement \bar{G} einfach-zusammenhängend ist. Unser Abbildungssatz gestattet nun, diese Einschränkung fallenzulassen; in dem Sinne, wie sich die bisherigen Faberreihen als Verallgemeinerungen der Taylorreihen auffassen lassen, sind die neuen Faberreihen Verallgemeinerungen der Laurentreihen (§ 4). Der letzte Abschnitt (§ 6) bringt noch die fast selbstverständliche Ausdehnung auf solche Gebiete, die von mehreren Kurven berandet werden; jedoch ist dabei vorauszusetzen, daß jede der Randkurven auf \mathfrak{A} nullhomolog ist.

Wesentlicher fast als diese Erweiterung der Theorie ist die Tatsache, daß erst von diesem Standpunkt aus sich die volle Harmonie der Wechselbeziehungen zwischen den zum Grundgebiet G gehörenden Faberschen und zugeordneten Funktionen und Differentialen zu eröffnen scheint (§ 3). Ein Beleg für diese Behauptung ist Satz 5, nach dem die Faberschen Koeffizienten einer Funktion gleichzeitig die Koeffizienten der Laurentreihe sind, durch die in der Nähe des Gebietsrandes die betrachtete Funktion dargestellt wird; in den

¹⁾ Vgl. [4] und den dortigen Schriftennachweis.

früher betrachteten Fällen verschwindet nun jedoch die „Hälfte“ der Faber-funktionen identisch; man ließ daher auch die zugehörigen Koeffizienten, die selbst keineswegs zu verschwinden brauchen, außer acht, und die genannte Laurentreihe degenerierte zu der oben erwähnten Taylorreihe, wodurch der enge Zusammenhang mit der dargestellten Funktion verloren ging. — Es mag vielleicht als Nachteil angesehen werden, daß Nullentwicklungen im allgemeinen Falle möglich sind; die interessanten und einfachen Beziehungen jedoch, die sie vermitteln, dürften hierfür entschädigen (§ 5).

Es sei noch erwähnt, daß sich die Fabertheorie auch auf gewissen offenen Riemannschen Flächen durchführen läßt, was einer späteren Note vorbehalten bleibe. Da jedoch die Charakterisierung von Funktionen durch Singularitäten ihre Macht auf offenen Riemannschen Flächen verliert, ist zu erwarten, daß die Fabertheorie hier weniger reichhaltig sein wird als im vorliegenden Falle.

1.4. Diese einleitenden Bemerkungen geben Gelegenheit, noch kurz diejenigen Arbeiten — soweit sie dem Verf. bekannt geworden sind — zusammenzustellen, die sich seit dem Erscheinen der Faberschen Dissertation [6] mit dieser Theorie beschäftigen. Zunächst unternimmt es FABER selbst in einer zweiten Arbeit [7], seine Theorie so zu erweitern, daß sie die klassischen Polynomsysteme enthält. Diese ad hoc gemachte Erweiterung wird von KRAFFT [16] zu einer einheitlichen Theorie ausgebaut; dieser Autor gibt später zusammen mit KÖNIG [15] die Einordnung der Faberreihen in die Königsche Klassentheorie. In [8] stellt FABER seine Theorie erneut dar²⁾ im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Tschebyscheff-Polynome. Diese Zusammenhänge werden von HEUSER [13, 14] weiter aufgeheilt. Bemerkenswert ist das von HEUSER [10] angegebene Verhalten der Faberreihen bei konformer Abbildung des Entwicklungsgebietes. Die Frage, wie der Entwicklungssatz zu modifizieren ist, wenn man die Voraussetzung, daß der Rand des Grundgebietes analytisch ist, abschwächt, wird von HEUSER [11, 12] und neuerdings von einigen russischen Autoren [17, 20, 21] untersucht. — Die Übertragung der Fabertheorie auf geschlossene Riemannsche Flächen [24] setzt von einer gewissen Charakterisierungsstelle voraus, daß sie kein Weierstraßpunkt ist. Diese Einschränkung wird in [25] beseitigt und eine Anwendung der Theorie auf Approximationen durch Produkte oder Partialbruchreihen gegeben. Die Einordnung dieser letzteren Arbeiten in die von ihm stammende Erweiterung der Königschen Klassentheorie gibt RÖHRL [18, 19]; gleichzeitig dehnt er die Ergebnisse aus auf die allgemeinste Lage der Charakterisierungsstellen.

§ 2. Die Laurent-Trennung.

2.1. Auf der geschlossenen Riemannschen Fläche \mathfrak{A} legen wir eine Stelle³⁾ \mathfrak{b} fest, von der wir voraussetzen, daß sie von den endlich vielen Weierstraß-

²⁾ Eine in [8] enthaltene Rekursionsformel für die Faberpolynome wird in [23] richtiggestellt.

³⁾ Stellen auf \mathfrak{A} werden mit Frakturbuchstaben, entsprechende komplexe Variable mit den entsprechenden lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet; lateinische Variable bedeuten vorzugsweise lokale Parameter.

punkten verschieden ist. Mit $dF(y, \zeta)$ bezeichnen wir das in [24] konstruierte Elementardifferential, das relativ zu einer bei \mathfrak{d} vorgegebenen Ortsuniformisierenden y bzw. z durch die folgenden Eigenschaften bestimmt ist:

Für festes $\zeta \neq \mathfrak{d}$ ist $dF(y, \zeta)$ ein Differential 3. Gattung mit den einfachen Polen ζ und \mathfrak{d} und den Residuen $+1$ bzw. -1 ; es ist normiert durch die Bedingung⁴⁾

$$dF(y, \zeta) = \left(-\frac{1}{y} + y^p P(y) \right) dy \quad \text{für } y \text{ bei } \mathfrak{d},$$

wobei p das Geschlecht von \mathfrak{A} bezeichnet. In Abhängigkeit von der Polstelle ζ ist $dF(y, \zeta)$ dann eine eindeutige Funktion auf \mathfrak{A} mit y als einfachem und \mathfrak{d} als p -fachem Pol, und für ζ bei \mathfrak{d} fehlt das absolute Glied in der Entwicklung von $dF(y, \zeta)$ nach Potenzen von z ⁵⁾.

2.2 Nun sei C eine rektifizierbare Jordankurve, die \mathfrak{A} zerlegt; die von C berandeten Gebiete seien G und \bar{G} , und \mathfrak{d} liege in \bar{G} . Wir nehmen an, daß C bzgl. G positiv orientiert ist, und fassen G als Innengebiet, \bar{G} als Außengebiet von C auf. Entsprechend bezeichnen wir zu C hinreichend benachbarte Kurven kurz mit C^i bzw. C^a , wenn es auf ihre genaue Lage nicht ankommt: C^i verläuft ganz in G und C^a ganz in \bar{G} .

Eine besondere Rolle unter den auf $G + C$ bzw. auf $\bar{G} + C$ definierten eindeutigen und bis auf Pole regulären Funktionen φ und Differentialen⁶⁾ $d\sigma$ spielen diejenigen, die eine Cauchysche Integraldarstellung besitzen:

$$(2.1) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{p}(C^a)} \varphi(y) dF(y, \zeta) \quad \text{für } \zeta \text{ auf } G + C,$$

$$(2.2) \quad d\sigma(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C^a)} d\sigma(\zeta) dF(y, \zeta) \quad \text{für } y \text{ auf } G + C$$

bzw.

$$(2.3) \quad \varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{p}(C^i)} \varphi(y) dF(y, \zeta) \quad \text{für } \zeta \text{ auf } \bar{G} + C,$$

$$(2.4) \quad d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C^i)} d\sigma(\zeta) dF(y, \zeta) \quad \text{für } y \text{ auf } \bar{G} + C.$$

Wie sich im folgenden ergeben wird, oder auch leicht direkt eingesehen werden kann, ist für diese Größen, die wir kurz als *Cauchygrößen* auf $G + C$ bzw. $\bar{G} + C$ bezeichnen wollen, charakteristisch die folgende

Definition: In G bzw. auf $G + C$ eindeutige analytische Funktionen und Differentiale sind *Cauchygrößen*, wenn sie in G bzw. auf $G + C$ regulär sind. — Eine *Cauchy-Funktion* in \bar{G} bzw. auf $\bar{G} + C$ ist dort eindeutig und regulär bis auf den Pol \mathfrak{d} von höchstens p -ter Ordnung, und in ihrer Entwicklung nach dem

⁴⁾ Mit P bezeichnen wir eine reguläre Potenzreihe.

⁵⁾ Das Elementardifferential könnte ohne weiteres so allgemein gewählt werden wie bei RÖHL [18]; zur Vermeidung einer schwerfälligen Formulierung wird das jedoch unterlassen.

⁶⁾ Statt von Funktionen oder Differentialen sprechen wir gelegentlich kurz von „Größen“, wenn es auf die Unterscheidung nicht ankommt.

dort vorgegebenen lokalen Parameter fehlt das konstante Glied. — Ein Cauchy-Differential in \bar{G} bzw. auf $\bar{G} + C$ ist dort eindeutig und regulär bis auf den einfachen Pol \mathfrak{d} , und in der Entwicklung bei \mathfrak{d} fehlen die 0-te bis $(p-1)$ -te Potenz der vorgegebenen Ortsuniformisierenden⁷⁾.

2.3. Unter C -Funktionen bzw. C -Differentialen verstehen wir analytische Funktionen und Differentiale, die in einer beiderseitigen Umgebung von C regulär-eindeutig sind⁸⁾.

Zu einer C -Funktion φ und einem C -Differential $d\sigma$ bilden wir jetzt

$$(2.5) \quad \varphi^{(i)}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(C^a)} \varphi(y) dF(y, \mathfrak{z}) \quad \text{für } \mathfrak{z} \text{ auf } G + C,$$

$$(2.6) \quad \varphi^{(a)}(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(C^i)} \varphi(y) dF(y, \mathfrak{z}) \quad \text{für } \mathfrak{z} \text{ auf } \bar{G} + C$$

und

$$(2.7) \quad d\sigma^{(i)}(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C^a)} d\sigma(\mathfrak{z}) dF(y, \mathfrak{z}) \quad \text{für } y \text{ auf } G + C,$$

$$(2.8) \quad d\sigma^{(a)}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C^i)} d\sigma(\mathfrak{z}) dF(y, \mathfrak{z}) \quad \text{für } y \text{ auf } \bar{G} + C.$$

Aus der Regularität von $dF(y, \mathfrak{z})$ für y bzw. \mathfrak{z} auf C^a und \mathfrak{z} bzw. y auf $G + C$ folgt, daß $\varphi^{(i)}$ und $d\sigma^{(i)}$ Cauchygrößen auf $G + C$ sind. Ebenso ergibt sich aus dem in 2.1 angegebenen Verhalten von $dF(y, \mathfrak{z})$ bei \mathfrak{d} , daß $\varphi^{(a)}$ und $d\sigma^{(a)}$ Cauchygrößen auf $\bar{G} + C$ darstellen. — Der Residuensatz, angewandt auf die von $C^i C^{a(-1)}$ berandete Umgebung von C auf \mathfrak{A} , ergibt

$$(2.9) \quad \varphi^{(i)} + \varphi^{(a)} = \varphi \text{ auf } C$$

und

$$(2.10) \quad d\sigma^{(i)} + d\sigma^{(a)} = d\sigma \text{ auf } C.$$

Wir interpretieren (2.9) und (2.10) als die *Laurent-Trennung* von φ und $d\sigma$ in die Cauchy-Funktionen (2.5), (2.6) bzw. in die Cauchy-Differentiale (2.7), (2.8). Eine solche Zerlegung ist nur auf eine Weise möglich. Denn seien

$$\bar{\varphi}^{(i)} + \bar{\varphi}^{(a)} = \varphi, \quad \bar{d}\sigma^{(i)} + \bar{d}\sigma^{(a)} = d\sigma$$

Zerlegungen von φ und $d\sigma$ in Cauchygrößen, so sind

$$\Phi = \bar{\varphi}^{(i)} - \varphi^{(i)} = \varphi^{(a)} - \bar{\varphi}^{(a)}$$

und

$$d\bar{\Phi} = \bar{d}\sigma^{(i)} - d\sigma^{(i)} = d\sigma^{(a)} - \bar{d}\sigma^{(a)}$$

eindeutige Größen auf \mathfrak{A} mit der einzigen Polstelle \mathfrak{d} . Als Cauchy-Funktion auf $\bar{G} + C$ hat Φ bei \mathfrak{d} einen Pol von höchstens p -ter Ordnung; da aber \mathfrak{d} kein Weierstraßpunkt ist, reduziert sich Φ auf eine Konstante; diese schließlich muß verschwinden, da das konstante Glied von Φ bei \mathfrak{d} fehlt. Ebenso folgt, daß $d\bar{\Phi}$ höchstens einen einfachen Pol bei \mathfrak{d} besitzt, es ist also polfrei;

⁷⁾ Die Definition ist also nur sinnvoll bzgl. einer festen Ortsuniformisierenden bei \mathfrak{d} .

⁸⁾ Die Tatsache, daß ein Teil der folgenden Aussagen auch für allgemeinere Kurvengrößen gilt, wird hier nicht benötigt.

aber ein Differential 1. Gattung mit einer p -fachen Nullstelle bei \mathfrak{b} verschwindet identisch, wieder weil \mathfrak{b} kein Weierstraßpunkt ist. — Diese Einzigkeit der Laurent-Trennung gestattet es, die Cauchygrößen (2.5) und (2.7) bzw. (2.6) und (2.8) kurz als G - bzw. \bar{G} -Komponenten von φ und $d\sigma$ zu bezeichnen.

2.4. Die Laurent-Trennung ist offenbar eine *lineare Operation*. Sie ist aber auch *stetig* in folgendem Sinne:

es sei $\{\varphi_n\}$ eine Folge von C -Funktionen, die auf einer gemeinsamen Umgebung von C erklärt sind, und es gelte dort gleichmäßig

$$\varphi = \lim \varphi_n;$$

dann ist φ wieder eine C -Funktion, und es folgt aus

$$\varphi^{(i)}(\mathfrak{z}) - \varphi_n^{(i)}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{y}(C^a)} (\varphi(\mathfrak{y}) - \varphi_n(\mathfrak{y})) dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$$

und der gleichmäßigen Beschränktheit von $\frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\mathfrak{y}}$ für \mathfrak{y} auf C^a und \mathfrak{z} auf $G + C$, daß die Beziehung

$$\varphi^{(i)} = \lim \varphi_n^{(i)}$$

gleichmäßig auf $G + C$ besteht. Ebenso beweist man, daß

$$\varphi^{(a)} = \lim \varphi_n^{(a)}$$

gleichmäßig auf $\bar{G} + C - [\mathfrak{b}]$ ist*) sowie Entsprechendes für C -Differentiale.

Satz 1: Die Laurent-Trennung ordnet jeder C -Größe eindeutig ein Paar von Cauchygrößen auf $G + C$ bzw. $\bar{G} + C$ zu. Diese Operation

$$L(\varphi) = (\varphi^{(i)}, \varphi^{(a)}) \quad \text{bzw.} \quad L(d\sigma) = (d\sigma^{(i)}, d\sigma^{(a)})$$

ist linear und stetig.

Aus (2.9), (2.10) und der Einzigkeit der Laurent-Trennung ergeben sich noch unmittelbar die wichtigen Folgerungen

Satz 2: Eine C -Größe ist dann und nur dann rational¹⁰⁾ in G bzw. \bar{G} fortsetzbar, wenn ihre \bar{G} - bzw. G -Komponente rational auf ganz \mathfrak{A} ist.

Die obige Behauptung über die Darstellung der Cauchygrößen durch ein Cauchy-Integral ist enthalten in

Satz 3: Eine C -Größe ist dann und nur dann als Cauchygröße in G bzw. \bar{G} fortsetzbar, wenn ihre \bar{G} - bzw. G -Komponente identisch verschwindet; die C -Größe ist dann mit ihrer anderen Komponente identisch.

Nur eine andere Fassung dieses Satzes ist

Satz 4: Zwei C -Größen besitzen dann und nur dann dieselbe G - bzw. \bar{G} -Komponente, wenn ihre Differenz eine Cauchygröße in \bar{G} bzw. G ist.

§ 3. Die Faber-Systeme eines einfach berandeten Gebietes.

3.1. Die geschlossene Riemannsche Fläche \mathfrak{A} vom Geschlecht p werde durch die analytische Jordankurve C in die Gebiete G und \bar{G} zerlegt. Auf \bar{G} wird nun der in § 1 zitierte Abbildungssatz angewandt. Es sei also

$$(3.1) \quad \eta = \psi(\mathfrak{y})$$

*) $[\mathfrak{b}]$ bezeichnet eine beliebig kleine Umgebung von \mathfrak{b} .

¹⁰⁾ Eindeutig und bis auf Pole regulär.

eine in \bar{G} eindeutige und bis auf Pole reguläre Funktion, die \bar{G} abbildet auf eine konkrete Riemannsche Fläche, die aus $N + 1$ Blättern besteht, nämlich aus einem Exemplar des Einheitskreises und aus N Vollebenen; das Bild des Randes C^{-1} von \bar{G} ist dann die schlichte Kreislinie $|\eta| = 1$; der Hilfspol b von $dF(y, z)$ liege in \bar{G} . — Wegen der vorausgesetzten Analytizität von C ist ψ noch auf C regulär und uniformisiert eine gewisse beiderseitige Umgebung von C . Jede C -Größe läßt daher eindeutig eine Laurent-Entwicklung nach Potenzen von ψ zu.

3.2. Wir betrachten insbesondere die vier Laurentreihen für $dF(y, z)$, die man erhält, wenn man z bzw. y in G bzw. \bar{G} fixiert und die andere Stelle bei C variieren läßt ¹¹⁾:

$$(3.2) \quad dF(y, z) = \frac{d\eta}{\eta} \sum \mathfrak{E}_n(z) \eta^n \quad \text{für } y \text{ bei } C \text{ und } z \text{ in } G,$$

$$(3.3) \quad dF(y, z) = \frac{d\eta}{\eta} \sum \mathfrak{e}_n(z) \eta^n \quad \text{für } y \text{ bei } C \text{ und } z \text{ in } \bar{G},$$

$$(3.4) \quad dF(y, z) = \frac{1}{\zeta} \sum d\mathfrak{F}_n(y) \zeta^n \quad \text{für } z \text{ bei } C \text{ und } y \text{ in } G,$$

$$(3.5) \quad dF(y, z) = \frac{1}{\zeta} \sum d\mathfrak{f}_n(y) \zeta^n \quad \text{für } z \text{ bei } C \text{ und } y \text{ in } \bar{G}.$$

Die Koeffizienten \mathfrak{E}_n und $d\mathfrak{F}_n$ aus (3.2) und (3.4) nennen wir die *Faber-größen* ¹²⁾ des Gebietes G , die Koeffizienten \mathfrak{e}_n und $d\mathfrak{f}_n$ aus (3.3) und (3.5) deren *zugeordnete Größen*. Als Laurentkoeffizienten besitzen sie die folgenden Integraldarstellungen ¹³⁾:

$$(3.6) \quad \mathfrak{E}_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{p(C^G)} \psi^{-n}(y) dF(y, z) \quad \text{für } z \text{ auf } G + C,$$

$$(3.7) \quad \mathfrak{e}_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{p(C^{\bar{G}})} \psi^{-n}(y) dF(y, z) \quad \text{für } z \text{ auf } \bar{G} + C,$$

$$(3.8) \quad d\mathfrak{F}_n(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{z(C^G)} \psi^{-n}(z) dF(y, z) d\psi(z) \quad \text{für } y \text{ auf } G + C,$$

$$(3.9) \quad d\mathfrak{f}_n(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{z(C^{\bar{G}})} \psi^{-n}(z) dF(y, z) d\psi(z) \quad \text{für } y \text{ auf } \bar{G} + C.$$

3.3. Die Begriffe aus § 2 führen nun sofort zu folgenden Aussagen: Vergleich von (3.6—9) mit (2.5—8) ergibt

$$L(\psi^{-n}) = (-\mathfrak{E}_n, \mathfrak{e}_n)$$

sowie

$$L(\psi^{-n} d\psi) = (d\mathfrak{F}_n, -d\mathfrak{f}_n).$$

Nun sind aber die C -Größen ψ^{-n} und $\psi^{-n} d\psi$ rational in \bar{G} ; nach Satz 2 sind daher alle \mathfrak{E}_n und alle $d\mathfrak{F}_n$ rational auf \mathfrak{A} . Auf $G + C$ sind sie als Cauchy-

¹¹⁾ Wenn nicht das Gegenteil angegeben ist, wird in der ganzen Arbeit stillschweigend angenommen, daß ein Summationsindex alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

¹²⁾ Die \mathfrak{E}_n sind die Entsprechungen der *FABER'schen* Polynome.

¹³⁾ C ist bezüglich des Einheitskreises in der η, ζ -Ebene negativ orientiert.

größen regulär. Ihr Verhalten in \bar{G} folgt aus

$$\begin{aligned} -\mathfrak{E}_n + c_n &= \psi^{-n}, \\ d\mathfrak{F}_n - d\mathfrak{f}_n &= \psi^{-n} d\psi \end{aligned}$$

und aus dem Hinweis, daß c_n und $d\mathfrak{f}_n$ Cauchygrößen in \bar{G} sind. Damit erhalten wir

Satz 5: Die Faber-Funktionen \mathfrak{E}_n und die Faber-Differentiale $d\mathfrak{F}_n$ des einfach berandeten Gebietes G sind rational auf \mathfrak{A} ; auf $G + C$ sind sie regulär, während ihr singuläres Verhalten in \bar{G} bis auf das einer Cauchygröße übereinstimmt mit dem Verhalten von $-\psi^{-n}$ bzw. $\psi^{-n} d\psi$.

Die zugeordneten Funktionen und Differentiale c_n bzw. $d\mathfrak{f}_n$ sind Cauchygrößen auf $\bar{G} + C$; sie stehen dort mit den Fabergrößen im Zusammenhang gemäß

$$\begin{aligned} (3.10) \quad c_n &= \mathfrak{E}_n + \psi^{-n}, \\ (3.11) \quad d\mathfrak{f}_n &= d\mathfrak{F}_n - \psi^{-n} d\psi. \end{aligned}$$

Die genannten Eigenschaften sind für alle Größen charakteristisch.

3.4. Die Annahme, der Rand C von G sei analytisch, ist für das bisherige nicht notwendig; sie wird jedoch für die Aufstellung der Entwicklungssätze des folgenden § 4 wesentlich.

3.5. Dagegen ist die Forderung, daß C auf \mathfrak{A} berandet, nicht zu umgehen. Denn besteht der Rand von G beispielsweise aus zwei einzeln nicht zerlegenden Kurven C_1 und C_2 , so gibt es zwar wieder eine Abbildung von \bar{G} , die C_1 und C_2 je in die schlichte Linie des Einheitskreises überführt; an die Stelle jeder der Entwicklungen (3.2—5) treten jetzt zwei Entwicklungen, die C_1 und C_2 entsprechen; für die dabei auftretenden Koeffizienten bestehen wieder Darstellungen wie (3.6—9); da in diesen aber die nicht zerlegenden Kurven C_1 oder C_2 nur einzeln als Integrationswege auftreten, sind diese Koeffizientengrößen auf \mathfrak{A} nicht mehr eindeutig.

3.6. Über die Abbildungsfunktionen ψ und die Charakterisierungsstelle \mathfrak{d} kann noch die zusätzliche Annahme gemacht werden, daß über $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ kein Verzweigungspunkt des Bildes von \bar{G} liegt, daß \mathfrak{d} eine der Nullstellen von ψ ist und daß $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ selbst dort als ausgezeichnete Ortsuniformisierende gewählt ist, nach welcher $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und die Cauchygrößen in \bar{G} normiert sind.

Es genügt zu zeigen, daß man $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ so bestimmen kann, daß über $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ kein Weierstraßpunkt und kein Verzweigungspunkt liegt. Sei dies für ψ zunächst nicht erfüllt, so gibt es jedenfalls nur endlich viele η -Werte, die solche Ausnahmestellen tragen; es gibt daher ein η_0 mit $|\eta_0| < 1$, derart, daß weder η_0 noch $\bar{\eta}_0^{-1}$ Ausnahmewert ist;

$$\frac{\psi(\mathfrak{y}) - \eta_0}{1 - \bar{\eta}_0 \psi(\mathfrak{y})}$$

anstelle von ψ hat dann die geforderten Abbildungseigenschaften und erfüllt die zusätzliche Annahme. Dadurch wird also erreicht, daß $y = \eta$ und $y = \eta^{-1}$ ausgezeichnete lokale Parameter für die Nullstellen bzw. Pole von ψ sind, und daß \mathfrak{d} auf eine der Nullstellen gelegt werden kann.

3.7. Bezeichnen wir die von δ verschiedenen Nullstellen von ψ mit n , und die Pole mit p , so besagt Satz 5 nun einfach, daß die Fabergrößen sich an ihren Singularitäten wie folgt verhalten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_n(\delta) &= -\frac{1}{z^{n+1}} + P(z) && \text{bei } n, \text{ für } n > 0, \text{ bei } p, \text{ für } n < 0, \\ \mathfrak{E}_n(\delta) &= -\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^p} P^*(z) && \text{bei } \delta \text{ für } n > p, \\ \mathfrak{E}_n(\delta) &= \frac{1}{z^p} P^*(z) && \text{bei } \delta \text{ für } n \leq p, n \neq 0, \\ \mathfrak{E}_0(\delta) &= -1, \\ d\mathfrak{F}_n(y) &= \frac{dy}{y^n} + P(y) dy && \text{bei } n, \text{ für } n \geq 1, \\ d\mathfrak{F}_n(y) &= -\frac{dy}{y^{n-1}} + P(y) dy && \text{bei } p, \text{ für } n \leq 1, \\ d\mathfrak{F}_n(y) &= \frac{dy}{y^n} + \frac{dy}{y} P'(y) && \text{bei } \delta \text{ für alle } n \neq 1 \\ d\mathfrak{F}_1(y) &= y^p P(y) dy && \text{bei } \delta;\end{aligned}$$

dabei fehlen in $P^*(z)$ der Koeffizient von z^p und in $P'(y)$ die Koeffizienten von y, y^2, \dots, y^p .

3.8. Nach den Formeln aus 3.7 verschwindet keine Fabergröße identisch, wenn wirklich Stellen n , und p , auftreten, d. h. falls N positiv ist, was sicherlich zutrifft, wenn \bar{G} nicht schlichtartig ist¹⁴). Tatsächlich spielt der Fall $N = 0$ eine Sonderrolle: nur dann sind die Fabergrößen Elementargrößen (d. h. sie besitzen auf \mathfrak{A} nur eine Polstelle), und nur dann brechen die Fabersysteme für $n \rightarrow -\infty$ ab; es ist dies der in [24] und [18] behandelte Fall, in welchem $\mathfrak{E}_n = 0$ ist für $p \geq n > 0$ und $n < 0$, sowie $d\mathfrak{F}_n = 0$ für $n = 1$ und $n \leq -p$. Dies Ergebnis, das auch ohne weiteres aus Satz 3 folgt, besagt, daß für die angegebenen Werte von n gilt:

$$c_n = \psi^{-n} \text{ bzw. } df_n = -\psi^{-n} d\psi;$$

diese Größen treten in [16] und [18] als „zugeordnete“ Größen auf, während die den übrigen n entsprechenden Größen dort unbeachtet bleiben.

3.9. Der duale Charakter der Fabergrößen und ihrer zugeordneten Systeme spiegelt sich in dem folgenden Sachverhalt.

Alle diese Größen sind C -Größen und lassen daher auf C Laurentreihen nach Potenzen des uniformisierenden Parameters ψ zu¹⁵):

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_a &= -\sum_k A_{ak} \psi^{-k}, \\ d\mathfrak{F}_b &= \sum_l B_{bl} \psi^{-l} d\psi, \\ c_c &= \sum_m C_{cm} \psi^{-m}, \\ df_d &= -\sum_n D_{dn} \psi^{-n} d\psi.\end{aligned}\tag{3.12}$$

¹⁴) Aber auch wenn \bar{G} schlichtartig ist, kann man eine mehrwertige Abbildungsfunktion wählen.

¹⁵) Die Form dieser Reihen ist zweckmäßig gewählt.

Wegen (3.10) und (3.11) ist zunächst

$$(3.13) \quad \begin{aligned} A_{ak} + C_{ak} &= \delta_{ak}, \\ B_{bl} + D_{bl} &= \delta_{bl}, \end{aligned}$$

wobei δ_{rs} das Kronecker-Symbol bedeutet. Weiter ist

$$\begin{aligned} A_{ak} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta(C)} \mathfrak{E}_a \psi^{k-1} d\psi, \\ D_{an} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(C)} d\mathfrak{f}_a \psi^{n-1}. \end{aligned}$$

Dafür kann man aber wegen (3.6) und (3.9) schreiben

$$\begin{aligned} A_{ak} &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta(C)} \int_{\eta(C^a)} \psi^{-a}(\eta) \psi^{k-1}(\delta) dF(\eta, \delta) d\psi(\delta), \\ D_{an} &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\eta(C)} \int_{\delta(C^d)} \psi^{-d}(\delta) \psi^{n-1}(\eta) dF(\eta, \delta) d\psi(\delta). \end{aligned}$$

Ändert man nun in dem letzten Integral die Integrationsreihenfolge und wählt dann C^a statt C und C statt C^i als Integrationswege (hierbei wird ja keine Singularität des Integranden überschritten), so ergeben die letzten Gleichungen

$$D_{an} = A_{1-n, 1-d};$$

hieraus und aus (3.13) folgt die analoge Beziehung

$$C_{cm} = B_{1-m, 1-c}.$$

Fassen wir für unsere Zwecke als Hauptdiagonale einer allseitig unendlichen Matrix

$$X = \|x_{rs}\|, \quad -\infty < r, s < +\infty,$$

diejenigen Stellen auf, für welche $r+s=1$ ist, so können wir die Matrix

$$X^T = \|x_{1-s, 1-r}\|$$

als die Transponierte von X ansehen; es ist dann $X^{TT} = X$. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$(3.14) \quad I = \|\delta_{rs}\|, \quad E = \|A_{ak}\|, \quad \Phi = \|B_{bl}\|, \quad e = \|C_{cm}\|, \quad \varphi = \|D_{an}\|$$

und fassen die gewonnenen Resultate zusammen in

Satz 6: Zwischen den Koeffizientenmatrizen in den Laurent-Entwicklungen (3.12) der Faberschen und der zugeordneten Systeme bestehen die Beziehungen

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varphi &= E^T, & E + e &= I, & e + \varphi^T &= I \\ e &= \Phi^T, & \Phi + \varphi &= I, & E + \Phi^T &= I, \end{aligned} \quad (3.15) \quad (3.16)$$

nach denen sich jede der vier Matrizen durch eine beliebige unter ihnen ausdrücken läßt.

§ 4. Der Entwicklungssatz.

4.1. Unter den Annahmen und Bezeichnungen von § 3 wird noch folgende Verabredung getroffen: Wir nennen ψ -Parallele von C solche speziellen

Kurven C^+ und C^- , die in einer Umgebung von C liegen und durch ψ (ebenso wie C) auf konzentrische Kreise abgebildet werden; wir bezeichnen eine ψ -Parallele von C mit $C(\delta)$, wenn auf ihr $|\psi| = 1 + \delta$ ist; es ist also $C = C(0)$ und $C(\delta)$ eine C^+ bzw. C^- , je nachdem δ positiv oder negativ ist. Die von $C(\delta)$ auf \mathfrak{A} berandeten Gebiete¹⁶⁾ seien $G(\delta)$ und $\bar{G}(\delta)$; letzteres enthält die Charakterisierungsstelle b . Wegen der Analytizität von C , gibt es ein positives δ^+ und ein negatives δ^- , derart, daß $C(\delta)$ für

$$\delta^+ > \delta > \delta^-$$

noch singularitätenfrei ist. Eine Cauchygröße in G bzw. \bar{G} ist erst recht eine solche auf $G(\delta) + C(\delta)$ bzw. auf $G(\delta) + C(\delta)$ und insbesondere eine $C(\delta)$ -Größe für jedes δ aus

$$0 < \delta < \delta^+ \quad \text{bzw.} \quad 0 > \delta > \delta^-.$$

4.2 Cauchyfunktionen und -differentiale in G bzw. \bar{G} bezeichnen wir in offensichtlicher Beziehung mit

$$f_G, dg_G, f_{\bar{G}}, dg_{\bar{G}}.$$

Als $C(\delta)$ -Größen besitzen sie Laurententwicklungen¹⁷⁾

$$(4.1) \quad \left. \begin{aligned} f_G &= - \sum a_n \psi^{-n} \\ dg_G &= \sum b_n \psi^{-n} d\psi \end{aligned} \right\} \text{ auf } C(\delta), 0 < \delta < \delta^+,$$

$$(4.2) \quad \left. \begin{aligned} f_{\bar{G}} &= \sum c_n \psi^{-n} \\ dg_{\bar{G}} &= - \sum d_n \psi^{-n} d\psi \end{aligned} \right\} \text{ auf } C(\delta), 0 > \delta > \delta^-;$$

diese Reihen konvergieren auf dem jeweiligen $C(\delta)$ gleichmäßig. Nach (3.10) und (3.11) bestehen die Laurent-Trennungen

$$\begin{aligned} L(\psi^{-n}) &= (-\mathfrak{E}_n, \mathfrak{e}_n), \\ L(\psi^{-n} d\psi) &= (d\mathfrak{F}_n, -d\mathfrak{f}_n); \end{aligned}$$

andererseits ist nach Satz 3

$$\begin{aligned} L(f_G) &= (f_G, 0), \\ L(dg_G) &= (dg_G, 0), \\ L(f_{\bar{G}}) &= (0, f_{\bar{G}}), \\ L(dg_{\bar{G}}) &= (0, dg_{\bar{G}}). \end{aligned}$$

Daher ergeben Linearität und Stetigkeit der Laurent-Trennung (Satz 1) sofort den

Satz 7 (Entwicklungssatz): Jede Cauchygröße in G bzw. \bar{G} läßt eine zweifach unendliche Reihenentwicklung nach den Faberschen bzw. den zugeordneten Größen zu; diese Reihen konvergieren gleichmäßig im Innern¹⁸⁾ von G bzw. $\bar{G} - b$ ¹⁹⁾, und die Koeffizienten stimmen überein mit den Laurent-Koeffizienten,

¹⁶⁾ δ sei stets so klein gewählt, daß $C(\delta)$ nicht zerfällt und zu C noch homotop bleibt.

¹⁷⁾ Vgl. Fußnote 14.

¹⁸⁾ Wir verstehen unter Gleichmäßigkeit im Innern von G — oder kurz: in G — die Gleichmäßigkeit auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von G .

¹⁹⁾ Dies gilt zunächst für jedes $G(\delta)$ bzw. $\bar{G}(\delta) - b$; für $\delta \rightarrow 0$ ergibt sich daraus die obige Aussage.

die diese Größen als $C(\delta)$ -Größen besitzen. Im einzelnen ist also

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_G &= \sum a_n \mathfrak{E}_n \\ dg_G &= \sum b_n d\mathfrak{F}_n \end{aligned} \quad \text{gleichmäßig in } G,$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f_{\bar{G}} &= \sum c_n \mathfrak{C}_n \\ dg_{\bar{G}} &= \sum d_n d\mathfrak{f}_n \end{aligned} \quad \text{gleichmäßig in } \bar{G} - [b],$$

mit den „Faber-Koeffizienten“

$$(4.5) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^i} f_G \psi^{n-1} d\psi,$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^i} \psi^{n-1} dg_G,$$

$$(4.6) \quad c_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^a} f_{\bar{G}} \psi^{n-1} d\psi,$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^a} \psi^{n-1} dg_{\bar{G}}.$$

4.3. Es folgt noch die Existenz von Nullentwicklungen gemäß

Satz 8: Neben den Entwicklungen (4.3), (4.4) mit den Koeffizienten (4.5), (4.6) bestehen die Nullentwicklungen

$$(4.7) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= \sum a_n \mathfrak{C}_n \\ 0 &= \sum b_n d\mathfrak{f}_n \end{aligned} \right\} \text{ gleichmäßig auf } \bar{G} + C - [b],$$

$$(4.8) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= \sum c_n \mathfrak{E}_n \\ 0 &= \sum d_n d\mathfrak{F}_n \end{aligned} \right\} \text{ gleichmäßig auf } G + C.$$

4.4. Mit Nullentwicklungen beschäftigt sich der nächste Abschnitt. Jedoch sei hier noch bemerkt, daß die Nullentwicklungen (4.7) schon im Falle $N = 0$ auftreten. Daß sie in früheren Arbeiten nicht bemerkt worden sind²⁰⁾, liegt begründet in dem in 3.8. erwähnten Sachverhalt. Danach wurden bisher nur für negative n die zugeordneten Größen betrachtet, weil diese zur Darstellung der Cauchygrößen von \bar{G} ausreichen; \bar{G} ist ja für $N = 0$ der schlichten Kreisscheibe äquivalent, so daß die Reihen (4.4) in Taylorreihen ausarten. — Dagegen stellen die Reihen (4.8) im Falle $N = 0$ auch hier die Null nur trivial dar; denn (4.2) sind Taylorreihen — die Koeffizienten (4.6) verschwinden also für positive n —, während für die übrigen n die Fabergrößen identisch verschwinden.

4.5. Es sei noch eine ungelöste Fragestellung erwähnt, auf die mich Herr HERMANN SCHMIDT hingewiesen hat:

Wenn \bar{G} nicht schlichtartig ist, ist das Geschlecht q von G kleiner als das Geschlecht p von \mathfrak{A} ; sicherlich kann man G in eine andere geschlossene Riemannsche Fläche \mathfrak{A}^* einbetten, deren Geschlecht q ist.

²⁰⁾ Die Nullentwicklungen in [6, 7, 16] haben einen völlig anderen Ursprung, der auf einer hier nicht diskutierten Erweiterung der Theorie beruht.

Ist es nun möglich, diese Fläche \mathfrak{A}^* so zu wählen, daß der zugehörige Funktionenkörper ein Unterkörper des zu \mathfrak{A} gehörigen ist? Dann gäbe es nämlich für G Fabersysteme auf \mathfrak{A} , die einem algebraischen Körper vom Geschlecht g angehören.

Ich möchte hier einen naheliegenden Beweisversuch zu diesem Problem anführen, der trotz seiner Vergeblichkeit einiges Interesse beanspruchen darf, weil die dabei konstruierte spezielle Fläche \mathfrak{A}^* in bezug auf die Faberentwicklungen in G besondere Eigenschaften aufweist.

Wir wollen kurz von einer *Abschließung* der einfach berandeten Riemannschen Fläche G vom Geschlecht g reden, wenn \mathfrak{A}^* eine geschlossene Riemannsche Fläche ist, die G enthält und ebenfalls das Geschlecht g besitzt; eine Abschließung von G ist also jede Randverheftung von G mit einer Kreisscheibe.

Nun vermittelt unsere Abbildung ψ von \bar{G} schon eine reale Darstellung des Randes C von G als schlichte Linie des Einheitskreises. Eine ausgezeichnete Abschließung \mathfrak{A}^* von G erhält man also, wenn man an C in dieser Darstellung den schlichten Einheitskreis anhängt.

Es besteht ein enger Zusammenhang der Faberentwicklungen in G in bezug auf \mathfrak{A} mit denjenigen in bezug auf \mathfrak{A}^* . Da eine einseitige, in G gelegene Umgebung von C auf beiden Flächen in der genannten Darstellung von C punktweise dieselbe Realisierung besitzt, folgt aus (4.5), daß die Faberentwicklungen bezüglich \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^* für die Cauchygrößen von G dieselben Faberkoeffizienten haben; jedoch treten diese in den Reihen auf \mathfrak{A}^* für $n \rightarrow -\infty$ nicht auf wegen des Fehlens der entsprechenden Fabergrößen.

Die naheliegende Vorstellung jedoch, daß dieses \mathfrak{A}^* das gestellte Problem löst, ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die konkrete Riemannsche Fläche \mathfrak{A} bestehe aus drei Blättern: die Blätter 1 und 2 mögen eine elliptische Fläche bilden, deren Verzweigungsschnitte außerhalb des Einheitskreises um den Ursprung liegen, und Blatt 3 sei mit Blatt 2 längs eines Schnittes im Inneren dieses Kreises verheftet. — Auf der so konstruierten Fläche \mathfrak{A} vom Geschlecht 1 betrachten wir jetzt als Kurve C den genannten Kreis in Blatt 2. Er zerlegt die Fläche in die Gebiete G und \bar{G} , von denen \bar{G} aus Blatt 3 und dem Kreis aus Blatt 2 besteht; G hat das Geschlecht 1, und \bar{G} ist schon so realisiert, wie es im allgemeinen Falle die Abbildung ψ bewirkt. Die oben beschriebene ausgezeichnete Abschließung \mathfrak{A}^* von G ist hier also einfach die elliptische Fläche, die aus den vollen Blättern 1 und 2 besteht. \mathfrak{A} ist aber keine Überlagerung von \mathfrak{A}^* , da die Blätterzahl 2 von \mathfrak{A}^* nicht die Blätterzahl 3 von \mathfrak{A} teilt.

§ 5. Beziehungen zwischen Faberreihen.

5.1. Während wir im vorigen Abschnitt die Cauchygrößen von G durch Faberreihen dargestellt haben, sollen hier umgekehrt solche Reihen betrachtet und Aussagen über die von ihnen dargestellten Größen hergeleitet werden.

Es liegt nach dem bisherigen nahe, zu einer vorgegebenen Faberreihe mit denselben Koeffizienten die Laurentreihe nach Potenzen von ψ zu bilden und nach Beziehungen zwischen den dargestellten Größen zu suchen. Dieser

Weg, den wir tatsächlich einschlagen werden, stößt jedoch auf eine Schwierigkeit: es scheint außer²¹⁾ im Falle $N = 0$ schwierig zu sein, scharfe Koeffizientenbedingungen für die Konvergenz einer Faberreihe anzugeben, weil aus der Konvergenz der Faberreihe nicht allgemein auf die Konvergenz der entsprechenden Laurentreihe geschlossen werden kann: es seien z. B. zwei Laurentreihen gegeben mit punktfremden Konvergenzgebieten in Umgebungen von Kurven $C(\delta_1)$ und $C(\delta_2)$ mit

$$\delta^- < \delta_1, \delta_2 \leq 0$$

(vgl. 4.1); die entsprechenden Faberreihen — also auch deren Summe — konvergieren gleichmäßig auf G , während die Summe der Laurentreihen nirgends konvergiert.

Wir schränken daher die Reihen ein, indem wir fordern: die Laurentreihe konvergiere auf $C(\delta)$ für alle hinreichend kleinen positiven δ . Da dann wieder die Faberreihe in G konvergiert, besagt diese Forderung, daß beide Reihen gemeinsam innerhalb G in einer (einseitigen) Umgebung von C konvergieren. Wir bemerken noch, daß uns dabei keine der in § 4 gewonnenen Reihen verlorengelht, so daß noch alle Cauchygrößen von den eingeschränkten Faberreihen dargestellt werden. Gemäß der Cauchyschen Koeffizientenformel wird die erwähnte Einschränkung geleistet durch die folgende

Festsetzung: Es werden nur solche Koeffizienten,,vektoren“ $\alpha = \{\alpha_n\}$, $-\infty < n < +\infty$ zugelassen, die der Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \begin{cases} \leq 1 & \text{für } n \rightarrow +\infty \\ < 1 & \text{für } n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

genügen.

5.2. Zu jedem solchen α bilden wir nun die Größen

$$(5.1) \quad \varphi = - \sum \alpha_n \psi^{-n},$$

$$(5.2) \quad f_G = \sum \alpha_n \mathfrak{E}_n,$$

$$(5.3) \quad f_{\bar{G}} = - \sum \alpha_n \mathfrak{e}_n$$

sowie

$$(5.4) \quad d\sigma = \sum \alpha_n \psi^{-n} d\psi,$$

$$(5.5) \quad dg_G = \sum \alpha_n d\mathfrak{E}_n,$$

$$(5.6) \quad dg_{\bar{G}} = - \sum \alpha_n d\mathfrak{f}_n,$$

die gemeinsam wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen innerhalb G in einer (einseitigen) Umgebung von C regulär-eindeutig sind.

Nach Satz 5 ist nun

$$L(-\psi^{-n}) = (\mathfrak{E}_n, -\mathfrak{e}_n),$$

$$L(\psi^{-n} d\psi) = (d\mathfrak{E}_n, -d\mathfrak{f}_n),$$

und daher folgt wieder aus Satz 1

$$(5.7) \quad L(\varphi) = (f_G, f_{\bar{G}}),$$

$$(5.8) \quad L(d\sigma) = (dg_G, dg_{\bar{G}}).$$

²¹⁾ Vgl. [24], Satz 5.

Diese Beziehungen besagen, daß die Vektoren α eindeutig sowohl den Funktionenpaaren $(f_G, f_{\bar{G}})$ als auch den Differentialpaaren $(dg_G, dg_{\bar{G}})$ entsprechen, so daß wir einen Vektor identifizieren können mit einem dieser Paare, je nachdem wir Funktionen oder Differentiale betrachten.

5.3. Wir beschäftigen uns zunächst mit Funktionen. Der lineare Raum der Vektoren α ist hier

der Raum $[\varphi]$ der Paare $(f_G, f_{\bar{G}})$;

er ist die direkte Summe aus

dem Raum $[f_G]$ der Paare $(f_G, 0)$

und

dem Raum $[f_{\bar{G}}]$ der Paare $(0, f_{\bar{G}})$;

$$[\varphi] = [f_G] + [f_{\bar{G}}].$$

Während hierin $[f_{\bar{G}}]$ nach Definition der Raum der Nullentwicklungen nach Faberschen Funktionen ist, liegt die Bedeutung des Raumes $[f_G]$ gemäß den Sätzen 7 und 8 darin, daß die Komponenten eines Vektors α aus $[f_G]$ die ausgezeichneten Faber-Koeffizienten für f_G in (5.2) darstellen; indem wir α dann kurz als „Faber-Vektor“ bezeichnen, erhalten wir nach Satz 3

Satz 9: Es ist dann und nur dann

$$\sum \alpha_n \mathfrak{E}_n = 0 \quad \text{in } G,$$

wenn sich $\sum \alpha_n \psi^{-n}$ auf $\bar{G} + C$ als Cauchyfunktion fortsetzen läßt. α ist dann und nur dann Faber-Vektor von $f_G = \sum \alpha_n \mathfrak{E}_n$, wenn

$$\sum \alpha_n \mathfrak{E}_n = 0 \quad \text{auf } \bar{G} + C.$$

5.4. Jedem Vektor α entspricht eindeutig ein Faber-Vektor $\alpha^F = \{\alpha_n^F\}$, der zu f_G aus (5.2) die Faberkoeffizienten repräsentiert. Man erhält diesen Faber-Vektor gemäß (5.6) und Satz 9 aus

$$L(\varphi - f_{\bar{G}}) = (f_G, 0).$$

Es ist also

$$-\sum \alpha_n^F \psi^{-n} = \varphi - f_{\bar{G}} = f_G = \sum \alpha_k \mathfrak{E}_k.$$

Setzt man hierin für die \mathfrak{E}_k die Laurentreihen (3.12) ein und ordnet gemäß dem Hilfssatz von WEIERSTRASS nach Potenzen von ψ , so ergibt der Koeffizientenvergleich

$$(5.9) \quad \alpha_n^F = \sum_k \alpha_k A_{kn}.$$

Denkt man sich die Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben und bedient man sich der in (3.14) eingeführten Matrizen, so kann dieses Ergebnis zusammen mit seinen unmittelbaren Folgerungen ausgesprochen werden als

Satz 10: Die zu $[f_{\bar{G}}]$ parallele Projektion des Raumes $[\varphi] = [f_G] + [f_{\bar{G}}]$ auf den „Faberraum“ $[f_G]$ wird durch die Matrix E vermittelt vermöge

$$\alpha^F = \alpha E;$$

diese Abbildung annulliert $[f_{\bar{G}}]$ und stellt in $[f_G]$ die Identität dar.

5.5. Für Differentiale bestehen analoge Resultate, die ebenso bewiesen werden wie diejenigen, die sich auf Funktionen beziehen. Wir beschränken uns daher darauf, diese Aussagen zu formulieren.

Der Raum der Vektoren α ist jetzt aufzufassen als Raum $[d\sigma]$ der Paare $(dg_G, dg_{\bar{G}})$; es ist

$$[d\sigma] = [dg_G] + [dg_{\bar{G}}],$$

dabei bestehen die Unterräume $[dg_G]$ und $[dg_{\bar{G}}]$ aus den Paaren $(dg_G, 0)$ bzw. $(0, dg_{\bar{G}})$.

Satz 11: *Es ist dann und nur dann*

$$\sum \alpha_n d\mathfrak{F}_n = 0 \quad \text{in } G,$$

wenn sich $\sum \alpha_n \psi^{-n} d\psi$ auf $\bar{G} + C$ als Cauchy-Differential fortsetzen läßt.

α ist dann und nur dann Faber-Vektor von $dg_G = \sum \alpha_n d\mathfrak{F}_n$, wenn

$$\sum \alpha_n d\mathfrak{f}_n = 0 \quad \text{auf } \bar{G} + C.$$

Jedem Vektor α entspricht wieder ein eindeutig bestimmter Faber-Vektor $\alpha^D = [\alpha_n^D]$, dessen Komponenten die Faber-Koeffizienten für das durch α dargestellte Differential (5.5) bilden. Man erhält α^D aus [siehe (3.12) und (3.13)]

$$(5.10) \quad \alpha_n^D = \sum_k \alpha_k B_{kn}.$$

Satz 12: *Im Raum $[d\sigma] = [dg_G] + [dg_{\bar{G}}]$ vermittelt die Matrix Φ die zu $[dg_{\bar{G}}]$ parallele Projektion von $[d\sigma]$ auf den Faberraum $[dg_G]$ vermöge*

$$\alpha^D = \alpha \Phi;$$

dabei bleibt $[dg_G]$ elementweise fest, während $[dg_{\bar{G}}]$ annulliert wird.

5.6. Entwickelt man eine Fabergröße gemäß Satz 7 selbst nach Faber-Größen, so erhält man im allgemeinen keineswegs die triviale Darstellung. Vielmehr zeigen die Gleichungen (3.12) in Verbindung mit Satz 7, daß diese Entwicklungen

$$\mathfrak{E}_k = \sum_n A_{kn} \mathfrak{E}_n,$$

$$d\mathfrak{F}_k = \sum_n B_{kn} d\mathfrak{F}_n$$

lauten. Hieraus und aus (3.13) ergeben sich als spezielle Nullentwicklungen

$$(5.11) \quad \left. \begin{aligned} \sum_n C_{kn} \mathfrak{E}_n &= 0 \\ \sum_n D_{kn} d\mathfrak{F}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für jedes } k.$$

Gleichzeitig hiermit gilt nach (3.12)

$$(5.13) \quad \mathfrak{e}_k = \sum_n C_{kn} \psi^{-n},$$

bzw.

$$(5.14) \quad -d\mathfrak{f}_k = \sum_n D_{kn} \psi^{-n} d\psi.$$

Diese Beziehung steht im Einklang mit den Sätzen 9 und 11, nach denen jeder Nullentwicklung eine durch die entsprechende Laurent-Reihe dargestellte Cauchygröße von \bar{G} entspricht: unseren speziellen Nullentwicklungen entsprechen in diesem Sinne die zugeordneten Größen \mathfrak{e}_k und $-d\mathfrak{f}_k$ als spezielle

Cauchygrößen. Da sich andererseits nach Satz 7 jede Cauchygröße von \bar{G} nach diesen speziellen entwickeln läßt, kann man sagen, daß sämtliche Nullentwicklungen sich aus den speziellen (5.11) und (5.12) erzeugen lassen.

5.7. Falls $N = 0$ ist, sind die Nullentwicklungen (5.11) und (5.12) in dem Sinne trivial, daß in jedem Summanden entweder der Koeffizient oder die Fabergröße verschwindet. Auch im Falle $N > 0$ ist es denkbar, daß unter den genannten Nullentwicklungen triviale vorkommen; zwar müßte ψ dann sehr spezielle Eigenschaften haben, die jedoch a priori nicht auszuschließen sind. Dennoch können wir hinreichende Bedingungen für die lineare Unabhängigkeit endlich vieler der speziellen Nullentwicklungen angeben.

Es sei jetzt $N > 0$. Nach Satz 5 weisen c_n und $d f_n$ nur den Pol b auf, während ψ^{-n} und $\psi^{-n} d\psi$ noch weitere Polstellen besitzen; daher folgt aus dem genannten Satz, daß kein c_n und kein $d f_n$ identisch verschwindet. Irgendeine endliche Linearkombination der Reihen (5.11) oder (5.12) ist also genau dann die triviale Nullentwicklung, wenn die entsprechende Linearkombination der Größen (5.13) oder (5.14) identisch verschwindet.

Wir untersuchen daher Relationen der Form

$$\sum_{k_1}^{k_2} a_k c_k = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k_1}^{k_2} a_k d f_k = 0,$$

die nach Satz 5 gleichbedeutend sind mit der Aussage, daß die Funktion

$$(5.15) \quad f = \sum_{k_1}^{k_2} a_k \psi^{-k}$$

bzw. das Differential

$$(5.16) \quad dg = \sum_{k_1}^{k_2} a_k \psi^{-k} d\psi$$

rational auf \mathfrak{A} ist, und zwar polfrei auf $G + C$.

5.8. Wir stellen zunächst fest, daß für die Ordnung²²⁾ einer nicht identisch verschwindenden Funktion $h = \sum_{k_1}^{k_2} a_k \psi^{-k}$ in \bar{G} die Abschätzung

$$(5.17) \quad O_{\bar{G}}(h) \geq -(N+1)k_2 + Nk_1$$

besteht, da $N+1$ bzw. N die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole von ψ in \bar{G} ist.

Ferner besitzt das Differential $d\psi$ in \bar{G} die Ordnung

$$(5.18) \quad O_{\bar{G}}(d\psi) = 2q \quad (q = \text{Geschlecht von } \bar{G});$$

denn nimmt man zu der durch ψ vermittelten $(N+1)$ -blättrigen Realisierung von G noch das Äußere des Einheitskreises hinzu, so erhält man eine geschlossene Fläche vom Geschlecht q , auf der $d\psi$ als rationales Differential die Ordnung $2q-2$ besitzt; bei dieser Abschließung von G wird aber eine Unendlichkeitsstelle von ψ , also ein Doppelpol von $d\psi$ zuviel gezählt; daraus ergibt sich die Behauptung.

Für eine auf \mathfrak{A} rationale und auf $G+C$ polfreie Größe ist die Ordnung in \bar{G} höchstens gleich der Ordnung auf \mathfrak{A} . Also ist für f aus (5.15)

$$O_{\bar{G}}(f) \leq 0,$$

²²⁾ Anzahl der Nullstellen minus Anzahl der Pole.

und für dg aus (5.16)

$$O_{\bar{G}}(dg) \leq 2p - 2.$$

Hieraus und aus (5.17) und (5.18) folgen als notwendige Bedingungen für das nicht-identische Verschwinden der Funktion f :

$$-(N+1)k_2 + Nk_1 \leq 0$$

bzw. des Differentials dg :

$$-(N+1)k_2 + Nk_1 \leq 2(p-q-1).$$

Sind nun umgekehrt diese Bedingungen nicht erfüllt, ist also

$$(5.19) \quad -(N+1)k_2 + Nk_1 > 0$$

bzw.

$$(5.20) \quad -(N+1)k_2 + Nk_1 > 2(p-q-1),$$

so ist dies gemäß 5.7 hinreichend dafür, daß die zu den Indizes k aus

$$k_1 \leq k \leq k_2$$

gehörenden Nullentwicklungen (5.11) bzw. (5.12) linear unabhängig sind; mit anderen Worten: nur ihre triviale Linearkombination ergibt die triviale Nullentwicklung.

(5.19) ist z. B. stets erfüllt für $k_1 = k_2 < 0$ und (5.20) für $k_1 = k_2 < -2(p-q-1)$. Das ergibt

Satz 13: Falls $N > 0$ ist, sind für alle k mit $k < 0$ bzw. $k < -2(p-q-1)$ die entsprechenden Nullentwicklungen (5.11) bzw. (5.12) nicht-trivial.

Als letzte Folgerung bemerken wir, daß (5.19) bzw. (5.20) erfüllt ist für alle k_1, k_2 aus den Intervallen

$$-K(N+1) < k_1 \leq k_2 < -KN$$

bzw.

$$-K(N+1) + 2(p-q-1) < k_1 \leq k_2 < -KN + 2(p-q-1),$$

wenn K eine beliebige natürliche Zahl bedeutet; da diese Intervalle aber die Länge K besitzen, folgt schließlich

Satz 14: Falls $N > 0$ ist, gibt es beliebig viele linear unabhängige unter den Nullentwicklungen (5.11) bzw. (5.12); insbesondere besitzen sie also keine endliche Basis.

§ 6. Mehrfach berandete Gebiete.

6.1. In diesem Schlußabschnitt soll noch kurz nachgewiesen werden, daß Fabersche Entwicklungen möglich sind auch für Funktionen und Differentiale, die regulär-eindeutig sind auf mehrfach berandeten Gebieten; im Hinblick auf 3.5 muß jedoch auch hier vorausgesetzt werden, daß jede Randkurve des Entwicklungsgebietes auf \mathfrak{A} berandet.

Es sei also G ein Gebiet auf \mathfrak{A} , dessen relativ zu G positiv orientierte Randkurven C_ϱ ($\varrho = 1, \dots, r$) analytisch und einzeln nullhomolog sind. Auf \mathfrak{A} grenze an G längs C_ϱ das Gebiet \bar{G}_ϱ , und es sei

$$G_\varrho = \mathfrak{A} - (C_\varrho + \bar{G}_\varrho).$$

Eine innerhalb G hinreichend nahe zu C_ϱ verlaufende Kurve bezeichnen wir mit C_ϱ^i ; schließlich sei die Charakterisierungsstelle \mathfrak{d} in \overline{G}_1 gewählt.

6.2. Für in G regulär-eindeutige Größen bestehen wieder Zerlegungen

$$f = \sum_1^r f_{\varrho_i}, \quad dg = \sum_1^r dg_{\varrho_i}$$

mit den in G_ϱ gültigen Integraldarstellungen

$$f_{\varrho}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho(C_\varrho^i)} f(\vartheta) dF(\vartheta, \mathfrak{z}),$$

$$dg_{\varrho}(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C_\varrho^i)} dg(\mathfrak{z}) dF(\vartheta, \mathfrak{z}).$$

Offenbar sind f_{ϱ} und dg_{ϱ} Cauchygrößen in G_ϱ .

Lassen nun die f_{ϱ} und dg_{ϱ} einzeln Faberentwicklungen zu, so ist unsere Behauptung bewiesen. Für $\varrho = 1$ ist das sicherlich nach § 4 richtig. Der Fall $\varrho \neq 1$ erfordert jedoch eine kleine Diskussion, da dann \mathfrak{d} in G_ϱ enthalten ist.

Indem wir den Index ϱ wieder unterdrücken, bemerken wir nun, daß die Annahme, \mathfrak{d} liege in G statt in \overline{G} , die Darlegungen der §§ 3, 4 (außer 3.6 und 3.7) nicht berührt; nur weisen jetzt die Cauchygrößen von G den Normierungspol \mathfrak{d} auf, während die Cauchygrößen von \overline{G} regulär sind; die Konvergenzaussagen gelten daher in bezug auf $G - [\mathfrak{d}]$.

Satz 15: Zu jedem Gebiet G auf \mathfrak{A} , dessen Randkurven einzeln nullhomolog und analytisch sind, gibt es Systeme von Fabergrößen, nach denen jede in G regulär-eindeutige Größe Reihenentwicklungen zuläßt, die im Innern von G gleichmäßig konvergieren.

Literatur.

- [1] L. AHLFORS: Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. Comment. math. Helvet. **24**, 100—134 (1950). — [2] H. BEHNKE und K. STEIN: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948). — [3] S. BERGMANN: Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math. Ann. **96**, 237—271 (1922). — [4] S. BERGMAN: The Kernel Function and conformal mapping. New York 1950. [5] S. BOCHNER: Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. Math. Z. **14**, 180—207 (1922). — [6] G. FABER: Über polynomische Entwicklungen. I. Math. Ann. **57**, 389—408 (1903). — [7] G. FABER: Über polynomische Entwicklungen. II. Math. Ann. **64**, 116—135 (1907). — [8] G. FABER: Über Tschebyscheffsche Polynome. J. reine angew. Math. **150**, 79—106 (1920). — [9] H. FLATHE: Approximation analytischer Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. Math. Ann. **125**, 287—306 (1952). — [10] P. HEUSER: Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen. Math. Z. **38**, 777—782 (1934). — [11] P. HEUSER: Zur Approximation analytischer Funktionen durch Polynome. Math. Z. **45**, 146—154 (1939). — [12] P. HEUSER: Zur Theorie der Faberschen Polynomreihen. Dtsch. Math. **4**, 451—454 (1939). — [13] P. HEUSER: Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome. Math. Z. **51**, 574—585 (1949). — [14] P. HEUSER: Über eine Tschebyscheffsche Eigenschaft der Faberschen Polynome. Math. Z. **54**, 339—342 (1951). — [15] R. KÖNIG und M. KRAFFT: Über Reihenentwicklungen analytischer Funktionen. J. reine angew. Math. **154**, 154—173 (1925). — [16] M. KRAFFT: Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen. Diss. Marburg 1915. —

[17] A. MARKUSCHEWITSCH: Sur les polynomes de Faber. Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 8, 49—60 (1944). — [18] H. RÖHRL: Zur Theorie der Faberschen Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. d. Math. 3, 93—102 (1952). [19] H. RÖHRL: Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechts. Arch. d. Math. 4, 298—307 (1953). — [20] P. SUETIN: Fabersche Polynome für Gebiete mit nicht-analytischer Begrenzung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 88, 25—28 (1953). — [21] P. SUETIN: Abelsche und Taubersche Sätze für Reihen nach Faberschen Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 91, 27—30 (1953). — [22] G. SZEGÖ: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Z. 9, 218—270 (1921). — [23] H. TIETZ: Eine Rekursionsformel der Faberschen Polynome. J. reine angew. Math. 189, 192 (1951). — [24] H. TIETZ: Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. J. reine angew. Math. 190, 22—33 (1952). — [25] H. TIETZ: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. der Math. 4, 31—38 (1953). — [26] H. TIETZ: Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen. Math. Ann. 129, 44—49 (1955).

(Eingegangen am 16. Januar 1955.)

Berichtigung

der Arbeit

„Zur Realisierung Riemannscher Flächen“

in Math. Ann. 128, 453—458 (1955).

In Hilfssatz 2 wird nicht berücksichtigt, daß Randpunkte von F_0 auf Punkte von \mathfrak{G} abgebildet werden können, wenn die Abbildung $f(\lambda)$ nicht schlicht ist.

Man kann aber durch Variation des Randes C von F_0 in F_0 zwei Gebiete F_0^1, F_0^2 erhalten — ihre Ränder seien C^1, C^2 — derart, daß noch

$$f(F_0^i) \supset \mathfrak{G} \quad (i = 1, 2)$$

gilt und daß die drei Randbilder $f(C), f(C^1), f(C^2)$ keinen Punkt gemeinsam haben.

Damit ist Hilfssatz 2 wie folgt zu ändern:

Hilfssatz 2: Zu jeder Punktmenge $\mathfrak{G} \subset f(F_0)$ gibt es in F_0 zwei von F_0 hinreichend wenig verschiedene Gebiete F_0^1, F_0^2 und eine Zahl $\varepsilon(\mathfrak{G}) > 0$, derart, daß für $\varepsilon < \varepsilon(\mathfrak{G})$ von f_ε und f jeder Wert w aus \mathfrak{G} auf mindestens einem der drei Gebiete F_0, F_0^1, F_0^2 gleich oft angenommen wird.

Beweis: F_0^1, F_0^2 wurden so gewählt, daß jeder Punkt $w \in \mathfrak{G}$ von mindestens einem Randbild $f(C), f(C^1), f(C^2)$ einen Abstand besitzt, der eine gewisse für \mathfrak{G} gleichmäßige positive Schranke nicht unterschreitet. Dem entspricht eine Überdeckung von \mathfrak{G} durch drei Punktmengen $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0^1, \mathfrak{G}_0^2$; auf jede von ihnen ist der Beweis von S. 456 oben anwendbar, wenn man dort F_0, C, \mathfrak{G} ersetzt durch F_0, C, \mathfrak{G}_0 , durch $F_0^1, C^1, \mathfrak{G}_0^1$ und schließlich durch $F_0^2, C^2, \mathfrak{G}_0^2$.

Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind.

Von

ERHARD HEINZ in Göttingen.

Wir betrachten ein Flächenstück \mathfrak{F} im dreidimensionalen Raume der Variablen x, y, z , welches für $x^2 + y^2 < R^2$ in der Form $z = z(x, y)$ darstellbar ist, wobei $z(x, y)$ eine reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion bedeutet. Wenn die Gaußsche Krümmung K oder die mittlere Krümmung H von \mathfrak{F} dem absoluten Betrage nach oberhalb einer positiven Zahl α bleiben, so hat dies für R eine Ungleichung der Form $R \leq \varrho(\alpha)$ zur Folge. Dieser Satz ist in den Fällen $K \geq \alpha > 0$ und $|H| \geq \alpha > 0$ leicht zu beweisen¹⁾. Der Vollständigkeit halber wird dafür in § 1 dieser Note ein Beweis gegeben, der im wesentlichen mit der mittleren Krümmung H operiert und zugleich die bestmöglichen Konstanten $\varrho(\alpha)$ liefert.

Der interessantere Fall $K \leq -\alpha < 0$, der eng mit dem Hilbertschen Theorem von der Nichtexistenz vollständiger Flächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung zusammenhängt, ist kürzlich von JEFIMOW [3], [4] behandelt worden. Dieser zeigte: Wenn \mathfrak{F} eine eindeutige Projektion auf ein Quadrat der Seitenlänge l gestattet und immer $K \leq -1$ ausfällt, so gilt $l \leq 14$. Der a. a. O. geführte Beweis beruht auf dem Studium der Asymptotenlinien von \mathfrak{F} und benötigt geometrisch-topologische Überlegungen. Es ist daher vielleicht von Interesse, einen *analytischen* Beweis dieses Theorems zu geben, welcher auf anderen Prinzipien beruht. Dies geschieht in § 2, wo außerdem eine quantitative Verschärfung dieses Resultates gewonnen wird (Satz 4). Haupthilfsmittel des Beweises ist dabei eine im wesentlichen von S. BERNSTEIN²⁾ herrührende Identität, welche in Satz 3 formuliert ist.

§ 1. Die Fälle $|H| \geq \alpha > 0$ und $K \geq \alpha > 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall $|H| \geq \alpha > 0$ und beweisen

Satz 1. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche der Ungleichung

$$|H| = \left| \frac{(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy}}{2(1+z_x^2+z_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \geq \alpha > 0$$

genügt. Dann ist $R \leq \frac{1}{\alpha}$.

¹⁾ Vgl. S. BERNSTEIN [2], insbes. S. 242—244.

²⁾ Vgl. S. BERNSTEIN [1], insbes. S. 96.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $H \geq \alpha > 0$ vorausgesetzt werden. Sei $0 < R_1 < R$. Dann hat man auf Grund der Identität

$$\begin{aligned} & \frac{(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy}}{(1+z_x^2+z_y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R_1^2} 2H \, dx \, dy = \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dx + \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dy \right).$$

Wegen $H \geq \alpha > 0$ hat man $\iint_{x^2+y^2 \leq R_1^2} 2H \, dx \, dy \geq 2\alpha \pi R_1^2$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} & \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dx + \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dy \right) \\ & \leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(\frac{z_x^2+z_y^2}{1+z_x^2+z_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} (dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2\pi R_1. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$2\alpha \pi R_1^2 \leq 2\pi R_1 \text{ oder } R_1 \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Für $R_1 \rightarrow R$ folgt die Behauptung.

Der Fall positiver Gaußscher Krümmung kann direkt auf Satz 1 zurückgeführt werden. Es gilt

Satz 2. Es sei $z = z(x, y)$ für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbar und

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \alpha > 0.$$

Dann hat man $R \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Beweis. Wegen $K \leq H^2$ ist $|H| \geq \sqrt{\alpha}$. Nach Satz 1 folgt daher $R \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, w.z.b.w.

Man erkennt an dem Beispiel $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, daß die in Satz 1 und Satz 2 bewiesenen Ungleichungen nicht verbessert werden können.

§ 2. Der Fall $K \leq -\alpha < 0$.

Wir wenden uns jetzt dem Studium von Flächen mit negativer Gaußscher Krümmung zu und beweisen zunächst

Satz 3. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $0 < r < R$ die Identität

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial r} \right)^2 d\varphi + 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy}) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Beweis. Setzen wir zur Abkürzung $\tilde{z}(\varrho, \varphi) = z(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$, so wird

$$\begin{aligned} 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) dx dy &= \oint_{x^2+y^2 \leq r^2} (z_x dz_y - z_y dz_x) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tilde{z}_\varphi^2}{\varrho^3} + \tilde{z}_\varrho^2 + \frac{\tilde{z}_\varrho \tilde{z}_{\varphi\varphi}}{\varrho} - \frac{\tilde{z}_{\varphi\varphi} \tilde{z}_\varrho}{\varrho} \right)_{\varrho=r} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tilde{z}_\varphi^2}{\varrho^3} + \tilde{z}_\varrho^2 \right)_{\varrho=r} d\varphi - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varphi^2)_{\varrho=r} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varphi^2)_{\varrho=r} d\varphi - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varphi^2)_{\varrho=r} d\varphi \right) \end{aligned}$$

für $0 < r < R$, was mit der Behauptung identisch ist.

Mit Hilfe der in Satz 3 bewiesenen Gleichung können wir das Hauptergebnis dieser Note beweisen, nämlich

Satz 4. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion, welche der Ungleichung

$$K = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \leq -\alpha < 0$$

genügt. Dann gilt $R \leq e \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$.

Beweis. Die Funktion

$$f(r) = \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\varrho^3} \left(\frac{\partial z(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\varphi$$

ist für $0 < r < R$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$f''(r) = 2\pi + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \right).$$

Ferner ist

$$\pi r^2 \leq f(r) \leq \pi^{\frac{1}{2}} r \left(\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (1 + z_x^2 + z_y^2) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit Benutzung von Satz 3 sowie der Ungleichung $K \leq -\alpha < 0$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} f''(r) &\geq 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) dx dy \\ &\geq 2\alpha \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (1 + z_x^2 + z_y^2) dx dy \geq \frac{2\alpha}{\pi r^2} f(r)^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{d}{d\varrho} (f'(\varrho)^2) \geq \frac{4\alpha}{3\pi r^2} \frac{d}{d\varrho} (f(\varrho)^2) \quad \text{für } 0 < \varrho \leq r.$$

Es folgt

$$f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3\pi r^2} f(r)^2$$

oder

$$-\frac{d}{dr}(f(r)^{-\frac{1}{2}}) \geq \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für } 0 < r < R.$$

Sei jetzt $0 < R_1 < R_2 < R$. Dann erhält man durch Integration die Ungleichung

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{1}{2}} R_1^{-1} &\geq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} - f(R_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Läßt man hierin R_2 gegen R konvergieren, so folgt

$$\log\left(\frac{R}{R_1}\right) \leq \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} R_1^{-1} \quad \text{für } 0 < R_1 < R$$

und somit auch für $0 < R_1 < \infty$. Setzt man $R_1 = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, so ergibt sich $R \leq e \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, womit Satz 4 bewiesen ist.

Literatur.

- [1] BERNSTEIN, S.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.* **69**, 82—136 (1910). — [2] BERNSTEIN, S.: Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale, *Ann. Ec. Norm. Sup.* **27** (1909), S. 233—256. [3] JEFIMOW, N. V.: Untersuchung einer vollständigen Fläche negativer Krümmung. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **93**, 393—395 (1953) (russ.). — [4] JEFIMOW, N. V.: Untersuchung der eindeutigen Projektion einer Fläche negativer Krümmung. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)* **93**, 609—611 (1953) (russ.).

(Eingegangen am 11. März 1955.)

